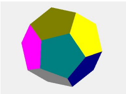
Om forfølgelse og flugt

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

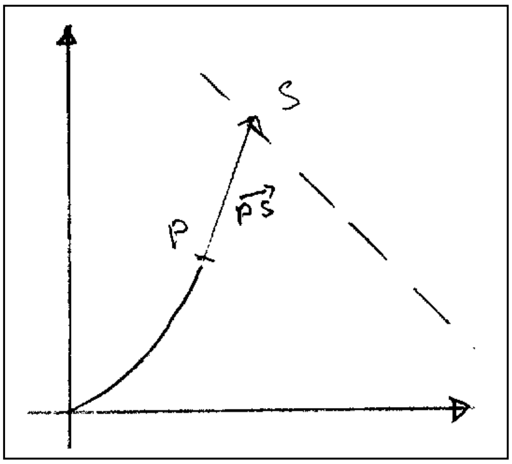


Ole Witt-Hansen 2019

Indhold

1. Introduktion til problemet

Flugt og forfølgelse er et klassisk matematisk problem, som, (så vidt jeg ved), endnu ikke har fundet en generel analytisk løsning. Som vist nedenfor har problemet mange forskellige varianter. Den mest klassiske og enkle er et piratskib, som forfølger en handelsskib. Vi antager at piratskibet kan sejle hurtigere end handelsskibet, og at handelsskibet følger en på forhånd given rute. Piratskibets strategi er så at følge en rute, så det hele tiden har kurs mod handelsskibets øjeblikkelige position. Dette er definitionen på den matematiske forfølgelseskurve.



Hvis vi antager, at handelsskibet er på positionen S, og piratskibet er på positionen P begge til tidspunktet t, så er stedvektorerne til de to skibe:

$$\vec{OP} = \vec{f}(t) = (x(t), y(t)) \;\; og \quad \vec{OS} = \vec{g}(t) = (u(t), v(t)) \;\; ,$$

Så vektoren fra piratskibet til handelsskibet er:

$$\vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = \vec{g}(t) - \vec{f}(t)$$

En enhedsvektor med den samme retning er derfor:

$$\vec{e}_{PS} = \frac{\vec{g}(t) - \vec{f}(t)}{|\vec{g}(t) - \vec{f}(t)|}$$

Hvis piratskibet sejler med hastigheden v_P ,og handelsesskibet sejler med hastigheden v_S, så kan man opstille følgende 1. ordens differentialligning:

$$\vec{f}'(t) = v_P \frac{\vec{g}(t) - \vec{f}(t)}{|\vec{g}(t) - \vec{f}(t)|}$$

Udskrevet i koordinater:

$$(x'(t), y'(t)) = v_P \frac{(u(t) - x(t) \, , \, v(t) - y(t))}{\sqrt{(u(t) - x(t))^2 + (v(t) - y(t))^2}}$$

Det er nok ikke muligt at opstille en general analytisk til disse to koblede første ordens differentialligninger. Der findes imidlertid nogle forelæsningsnoter fra elementærafdelingen på Århus universitet fra 1974 (Tiden med minicomputere uden grafiske muligheder), hvor der vises en løsning til det specielle tilfælde, hvor handelsskibet sejler langs med y-aksen, mens piratskibets begyndelsesposition er på x-aksen.

Her reducerer man de to ligninger til en ligning, i det man anvender $x(t) = x$ som en uafhængig variabel, under den forudsætning, at $x(t)$ er monoton, så vi kan udregne $t = t(x)$

Det er herefter muligt at løse den resulterende differentialligning ved anvendelsen af nogle få matematiske tricks.

Piratskibet sejler med den øjeblikkelige retning af: $\vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = (u(t) - x(t) \, , \, v(t) - y(t))$

Når piratskibet sejler med farten v_P, og handelsskibet sejler med farten v_S, og $v_P > v_S$, så kan man argumentere for at handelsskibet altid vil blive indhentet på følgende måde.

I tidsrummet dt, får de to skibe en relativ forskydning $(\vec{v}_S - \vec{v}_P)dt$. Projektionen af denne vektor på vektoren $\vec{PS}$, vil imidlertid altid være modsat rettet $\vec{PS}$, (så længe $v_P > v_S$), så afstanden mellem de to skibe vil formindskes, og handelsskibet vil uundgåeligt blive indhentet.

2. Et analytisk udtryk for piratskibets forfølgelseskurve.

Idet vi antager at handelsskibet sejler med den konstante hastighed v_S, langs med y-aksen, således at $\vec{v}_S = (0, v_S)$, og at: $y = f(x)$, kan vi skrive:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v - y}{u - x} \qquad \text{eller} \qquad f'(x) = \frac{v(x) - f(x)}{-x}$$

Idet de to skibe sejler med farten v_S og v_P, har vi:

$$v_S dt = \sqrt{du^2 + dv^2} \quad og \quad v_P dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Som også kan skrives: $dt = \dfrac{\sqrt{du^2 + dv^2}}{v_S}$ $\quad og \quad$ $dt = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v_P}$ og derfor

$$\sqrt{du^2 + dv^2} = \frac{v_S}{v_P}\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Vi dividerer med dx

$$\sqrt{(\frac{du}{dx})^2 + (\frac{dv}{dx})^2} = \frac{v_S}{v_P}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Idet $(\dfrac{du}{dx}) = 0$, får vi ligningen:

$$v'(x) = -\frac{v_S}{v_P}\sqrt{1 + f'(x)^2} \ ,$$

Minustegnet fordi v er en aftagende function af x.

Differentierer vi ligningen: $f'(x) = \dfrac{v(x) - f(x)}{-x} \quad \Leftrightarrow \quad -xf'(x) = v(x) - f(x)$ så får vi:

$$-f'(x) - xf''(x) = v'(x) - f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -xf''(x) = v'(x)$$

Når vi indsætter udtrykket for $v'(x)$, får vi endelig:

$$xf''(x) = \frac{v_S}{v_P}\sqrt{1 + f'(x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad xy'' = \alpha\sqrt{1 + y'^2}$$

Vi har sat: $\dfrac{v_S}{v_P} = \alpha$. Hvis vi erstatter y' med y, kan den resulterende 1. differentialligning løses ved separation af de variable.

$$xy' = \alpha\sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = \alpha\sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\alpha}{x}dx$$

Ved integration på begge sider: $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{\alpha}{x}dx$

Integralet $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$ kan udregnes ved substitutionen: $y = \sinh x \quad \Rightarrow \quad dy = \cosh x dx$

Idet $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$, kan integralet derfor omskrives:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{\cosh x dx}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \int \frac{\cosh x dx}{\cosh x} = \int dx = x + c$$

Vi mangler så blot at udtrykke *x* ved *y*. $y = \sinh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sinh^{-1} y$ og $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$d = 4y^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{2y \pm 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}\,)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln(y + \sqrt{1+y^2}\,)$$

Dette kan naturligvis også vises direkte ved differentiation:

$$(\ln(y + \sqrt{1+y^2}))' = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(y' + \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{y'}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) =$$

$$\frac{y'}{y+\sqrt{1+y^2}} \frac{\sqrt{1+y^2} + y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}$$

Og vi har dermed

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{\alpha}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \alpha \ln x + \ln c = \ln cx^\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$y + \sqrt{1+y^2} = cx^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+y^2} = cx^\alpha - y \quad \Leftrightarrow$$

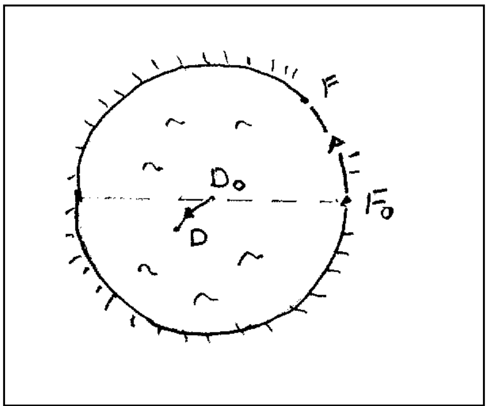
$$1 + y^2 = c^2x^{2\alpha} + y^2 - 2cx^\alpha y \quad \Leftrightarrow$$

$$y = f'(x) = \frac{1}{2cx^\alpha}(c^2x^{2\alpha} - 1) = \frac{1}{2}\left(cx^\alpha - \frac{1}{c}x^{-\alpha}\right)$$

$$f(x) = \frac{c}{\alpha+1}x^{\alpha+1} - \frac{1}{c(-\alpha+1)}x^{-\alpha+1} + b$$

Denne løsning er imidlertid mest af akademisk interesse, idet det er langt bedre at vise løsningen ved en numerisk computer grafisk løsning.
Men løsningen tillader os imidlertid at bestemme det tidspunkt, hvor piratskibet bliver indhentet. Som vist ovenfor, så bliver piratskibet altid indhentet, hvis $v_S < v_P$, hvis piratskibet sejler langs med den forfølgelseskurve som beskrevet i indledningen.
Vi tager udgangspunkt i ligningen: $v(x) = f(x) - xf'(x)$.
Idet $v(x) = v_S t(x)$, kan vi opnå et udtryk for $t(x) = (f(x) - xf'(x))/v_S$.
Hvis $v_S < v_P$ så rammer forfølgelseskurven nemlig y-aksen i $(0,b)$, til tidspunktet: $t_{indhentet} = \dfrac{b}{v_S}$

3. Anden og ræven. Numerisk grafisk computer løsning.



Dette er også et klassisk problem, some r blevet formuleret på mange forskellige måder, hvoraf vi vælger følgende:
Anden befinder sig i midten af en cirkulær dam.
En ræv sidder ude ved kanten og venter på at anden skal komme op af dammen. Anden svømmer med hastigheden v_D, og ræven bevæger sig med hastigheden v_F, og vi antager at v_F er større end v_D.
Antagelsen er, at hvis anden når ind til bredden, slipper den for at blive fanget.
Anden kan nu anvende forskellige strategier for at nå ind til bredden før ræven er nået rundt til den.
Den mest enkle strategi er naturligvis at svømme lige ud mod det diametralt modsatte punkt, hvor ræven befinder sig. Dette giver også et meget simpelt svar på, hvorvidt anden undslipper eller ej.
Hvis radius af dammen er r, så er den tid det tager for anden at nå bredden:

$$t_D = \frac{r}{v_D},$$

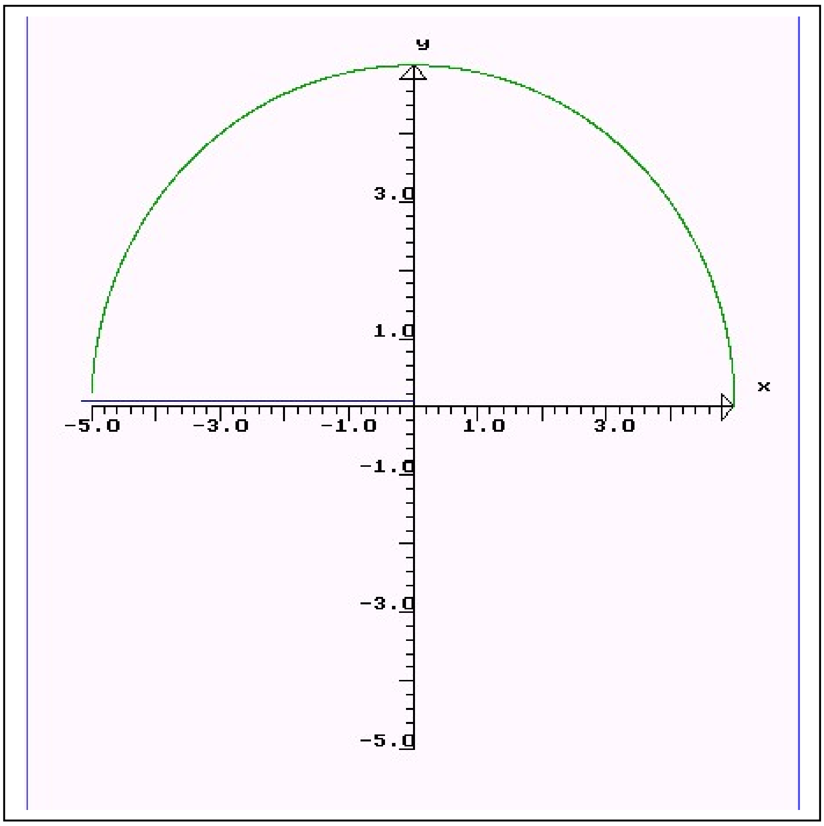
og den tid det tager for ræven, som løber rundt om dammen for at nå den samme position:

$$t_F = \frac{\pi r}{v_F}.$$

Anden vil nå bredden først og dermed undslippe, hvis:

$$t_D < t_F \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{v_D} < \frac{\pi r}{v_F} \quad \Leftrightarrow \quad v_D > \frac{v_F}{\pi}$$

Dette er (trivielt) illustreret på nedenstående figur:



Anden kan imidlertid også vælge en anden strategi, nemlig at bevæge sig den forfølgelses/flugt kurve, som er beskrevet i indledningen. Anden vil derfor til ethvert tidspunkt svømme i retning af vektoren $\vec{FD}$ fra ræven F til anden D. Rævens vinkelhastighed er $\frac{v_F}{r}$.

Hvis andens koordinater er (x, y), og rævens koordinater er $(u,v) = (r\cos(\frac{v_F}{r}t)\,,\, r\sin(\frac{v_F}{r}t))$, idet

$$\vec{FD} = (x - r\cos(\tfrac{v_F}{r}t)\,,\, y - r\sin(\tfrac{v_F}{r}t))$$

En enhedsvektor i denne retning er så:

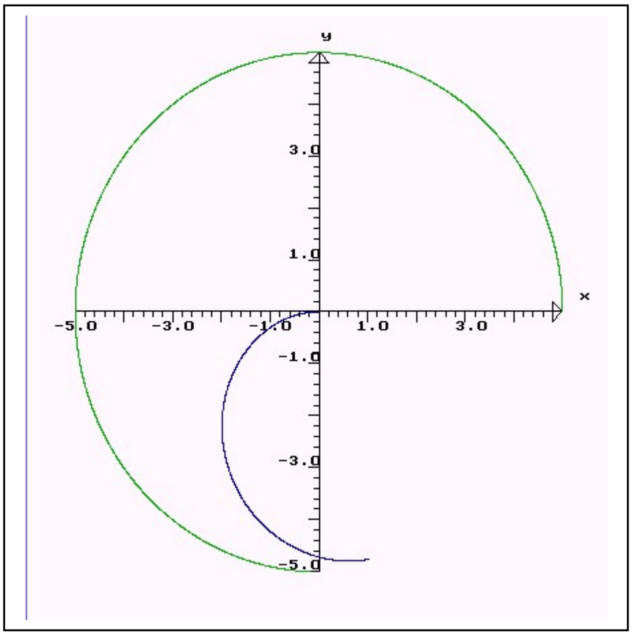
$$\left(\frac{x - r\cos(\frac{v_F}{r}t)}{\sqrt{(x - r\cos(\frac{v_F}{r}t))^2 + (y - r\sin(\frac{v_F}{r}t))^2}}\,,\, \frac{y - r\sin(\frac{v_F}{r}t)}{\sqrt{(x - r\cos(\frac{v_F}{r}t))^2 + (y - r\sin(\frac{v_F}{r}t))^2}}\right)$$

Anden svømmer med hastigheden v_D, og det giver så en differentialligning for flugt kurven

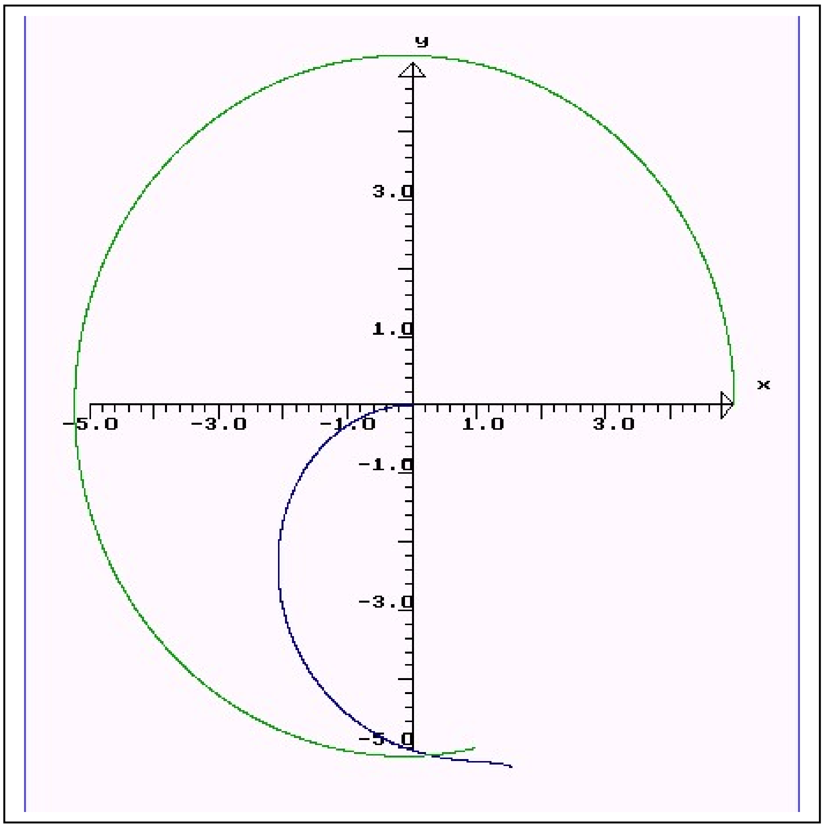
$$(x', y') = v_D\left(\frac{x - r\cos(\frac{v_F}{r}t)}{\sqrt{(x - r\cos(\frac{v_F}{r}t))^2 + (y - r\sin(\frac{v_F}{r}t))^2}}\,,\, \frac{y - r\sin(\frac{v_F}{r}t)}{\sqrt{(x - r\cos(\frac{v_F}{r}t))^2 + (y - r\sin(\frac{v_F}{r}t))^2}}\right)$$

Det er svært at forestille sig, at der skulle kunne findes en analytisk løsning til dennedifferentialligning.

Vi vil derfor nøjes med en grafisk computerløsning, (som er skrevet i TurboPascal 7 fra 1995).
Vi sætter $r = 5$, $v_D = 0.30$ og $v_F < \pi v_D$, hvilket er betingelsen for at anden undslipper med den simple strategi. Anden skulle derfor kunne undslippe, hvis $v_F < 0.942$, men det viser sig ikke at være tilfældet. Selv hvis $v_F = 0.90$ undslipper anden ikke, som vist nedenfor, idet anden ikke når ud til randen før ræven når den.



Hvis vi sætter $v_D = 0.31$ og $v_F = 0.90$, så undslipper anden lige præcis at komme ind til bredden før ræven når til den samme position. Hvorfor at denne flugt kurven viser sig ringere end den simple strategi, er der næppe nogen simpel forklaring på.



4. Løven og byttet

Dette er et andet klassisk problem om hvilket (så vidt jeg ved) aldrig er fundet en generel analytisk løsning).
Et bytte (eventuelt et menneske) befinder sig ved randen af en cirkulær arena. En løve bliver lukket ind i arenaen, i almindelighed (men ikke nødvendigvis) diametralt modsat byttet, og løven begynder straks at jage byttet. Byttet flygter nu langs randen af arenaen. Løven bevæger sig med hastigheden v_L og byttet bevæger sig med hastigheden v_P. Hvis $v_P < v_L$ vil løven altid fange byttet, hvis løven bevæger sig langs med den forfølgelseskurve som er beskrevet i indledningen.
Det interessante er imidlertid formen af forfølgelseskurven, som fremkommer ved en numerisk grafisk computer beregning. Radius i arenaen betegnes r.
Stedvektoren til byttet, som bevæger sig med farten v_P er:

$$\vec{OP} = (u(t), v(t)) = r(\cos(\tfrac{v_P}{r}t + \alpha), \sin(\tfrac{v_P}{r}t + \alpha)),$$

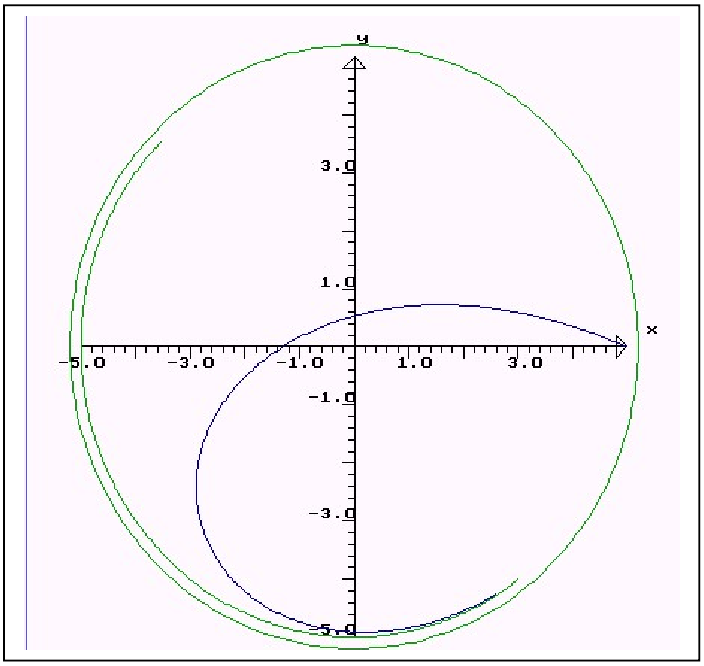
mens løven, der bevæger sig med farten v_L, har koordinaterne $\vec{OL} = (x(t), y(t))$.
Løven bevæger sig til ethvert tidspunkt med en retning fra løven til byttet.

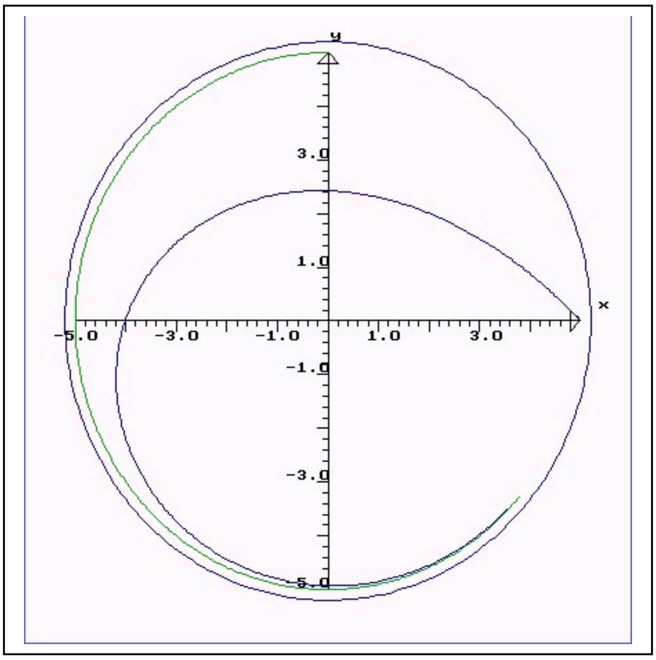
$$\vec{LP} = (u - x, v - y)$$

Differentialligningen for løvens bevægelse er derfor:

$$(x'(t), y'(t)) = v_L\left(\frac{(u-x)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}, \frac{(v-y)}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}\right)$$

Dette er illustreret nedenfor, hvor løven bevæger sig med farten 0,55 og byttet forsøger at undslippe med hastigheden 0,5. De to figurer, svarer til to forskellige begyndelsespositioner af byttet.
Den grønne kurve er den kurve som byttet følger og den blå kurve er den kurve som løven følger.





5. Piraten og handelsskibet

Dette er muligvis den mest hyppige variant af forfølgelse og flugt problemet, og som omtalt i indledningen har det faktisk en analytisk løsning i et simpelt tilfælde.
Handelsskibet sejler i samme retning med konstant fart v_S , for eksempel langs med y-aksen.
Piraten begynder jagten et sted på x-aksen, hvor den sejler med fart v_P, hvor $v_P > v_S$.
Piraten manøvrerer efter den forfølgelseskurve, som er beskrevet i indledningen. Som nævnt vil handelsskibet altid blive indhentet, hvis piraten sejler langs den teoretiske kurve.

Differentialligningen, for den kurve, som piraten følger er:

$$(x'(t), y'(t)) = v_P\left(\frac{u(t)-x(t)}{\sqrt{(u(t)-x(t))^2+(v(t)-y(t))^2}}, \frac{v(t)-y(t)}{\sqrt{(u(t)-x(t))^2+(v(t)-y(t))^2}}\right)$$

Alt andet end lineær kurve $(u,v) = (v_S \cos\theta\, t, v_S \sin\theta\, t)$ for handelsskibet er ikke meningsfuld.
Idet 1. tilfælde er $(u,v) = (0, v_S t)$ i det andet, $(u,v) = (v_S \cos 120^0\, t, v_S \sin 120^0 t)$