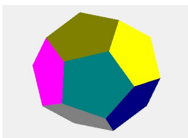
Weierstrass' approximationsformel

Dette er en artikel fra min hjemmeside : www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2021

Indhold

1. Weierstrass' approximationsformel (1885)

Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion i det lukkede interval $[a,b]$, så findes der og for ethvert $\varepsilon > 0$ et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, således at:

$$| f(x) - p(x) | < \varepsilon \ \ for \ \ all \ \ x \in [a,b]$$

Der findes flere beviser for denne sætning. Nedenstående bevis skyldes S. N. Bernstein.
Beviset føres i et antal trin.

1.1 Det er tilstrækkeligt at vise sætningen for intervallet [0,1]

Først viser vi, at hvis sætningen kan vises i intervallet [0,1], så kan det bevises i ethvert andet interval $[a,b]$ på følgende måde.
Hvis *f*(*x*) er kontinuert i intervallet $[a,b]$ så er $g(\xi) = f(a + (b-a)\xi)$ kontinuert i intervallet $[0,1]$, idet $x = a + (b-a)\xi$ er en afbildning af $[0,1]$ på $[a,b]$. Følgelig findes der, ifølge sætningen, et polynomium, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ gælder:

$$| g(\xi) - q(\xi) | < \varepsilon \ \ for \ alle \ \ \xi \in [0,1]$$

Vi har således:

$$| g(\frac{x-a}{b-a}) - q(\frac{x-a}{b-a}) | < \varepsilon \ \ for \ alle \ \ x \in [a,b]$$

Idet:

$$f(x) = g(\frac{x-a}{b-a}) \quad for \ x \in [a,b]$$

$$p(x) = q(\frac{x-a}{b-a}) = b_0 + b_1(\frac{x-a}{b-a}) + b_2(\frac{x-a}{b-a})^2 + ... + b_n(\frac{x-a}{b-a})^n$$

Hvor $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ er et polynomium af *n*'te grad, så har vi

$$| g(\frac{x-a}{b-a}) - q(\frac{x-a}{b-a}) | < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad | f(x) - p(x) | < \varepsilon \quad for \ all \ x \in [a,b]$$

1.2 Anvendelse a binomialformlen til bestemmelse af et polynomium *p(x)*

Fra nu af, skal vi antage at intervallet $[a,b]$ er $[0,1]$. For et vilkårligt positivt helt tal, danner vi ud fra binomialformlen polynomiet:

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\frac{\nu}{n}) \binom{n}{\nu} x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}$$

Vi vil da vise, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes der et n_ε, således at for $n > n_\varepsilon$ gælder:

$$| f(x) - p_n(x) | < \varepsilon \quad for \ alle \ x \in [0,1]$$

Ifølge binomialformlen:

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \quad \text{for } x \in [0,1]$$

Ganger vi denne ligning med $f(x)$, får vi:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(x) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \quad \text{for } x \in [0,1]$$

Så finder idet vi, idet vi anvender udtrykket for $p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\frac{\nu}{n}) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$

$$| f(x) - p_n(x) | = | \sum_{\nu=0}^{n} (f(x) - f(\frac{\nu}{n})) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} |$$

Og følgelig, idet: $\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \geq 0$ *for alle* $\nu = 0,1....,n$ *og for alle* $x \in [0,1]$:

$$| f(x) - p_n(x) | \leq \sum_{\nu=0}^{n} | f(x) - f(\frac{\nu}{n}) | \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

1.3 Vi adskiller nu binomialsummen i to summer

For et givet x og n, vælger vi for et givet $\delta > 0$, i den første sum de led, hvor $| x - \frac{\nu}{n} | < \delta$ og i den anden sum de led, hvor $| x - \frac{\nu}{n} | \geq \delta$. Vi finder således:

$$| f(x) - p_n(x) | \leq \sum_{\substack{\nu=0 \\ | x - \frac{\nu}{n} | < \delta}}^{n} | f(x) - f(\frac{\nu}{n}) | \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} + \sum_{\substack{\nu=0 \\ | x - \frac{\nu}{n} | \geq \delta}}^{n} | f(x) - f(\frac{\nu}{n}) | \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \sum_1 ... + \sum_2 ...$$

Vi sætter $M = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} | f(x) |$ og $\omega(\delta) = \sup\limits_{|x_2 - x_1| < \delta} | f(x_2) - f(x_1) |$

Idet $f(x)$ er kontinuert i det lukkede interval $[0,1]$, så er $f(x)$ begrænset og uniform konvergent. Vi har derfor: $M < \infty$ *og* $\omega(\delta) \to 0$ *for* $\delta \to 0$. Vi har således:

$$\sum_1 ... \leq \omega(\delta) \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x - \frac{\nu}{n}| < \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leq \omega(\delta) \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \omega(\delta)$$

$$\sum_2 ... \leq 2M \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x - \frac{\nu}{n}| \geq \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

Det afgørende punkt i beviset er vurderingen af højre side i den sidste ulighed. Vi tager udgangspunkt i binomialformlen.

$$(x + y)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu}$$

Differentierer vi ligningen efter x og derefter ganger med x, får vi:

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^{\nu} y^{n-\nu}$$

Og gentager vi processen:

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^{\nu} y^{n-\nu}$$

Sætter vi $y = 1 - x$, får vi de tre ligninger

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} = 1 \quad , \quad nx = \sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \quad , \quad nx + n(n-1)x^2 = \sum_{\nu=0}^{n} \nu^2 \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

Vender vi tilbage til $\sum_{\nu=0}^{n} (x - \frac{\nu}{n})^2 \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$ så er $(x - \frac{\nu}{n})^2 = x^2 - 2\frac{x}{n}\nu + \frac{1}{n^2}\nu^2$ i

Vi opnår det samme, hvis vi ganger de tre udtryk med henholdsvis: $x^2, -2\frac{x}{n}$ *og* $\frac{1}{n^2}$ og adderer de tre udtryk. Venstresiden bliver:

$$x^2 - 2\frac{\nu}{n}x + \frac{1}{n^2}(nx + n(n-1)x^2) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Så vi har ligningen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x - \frac{\nu}{n})^2 \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Udtrykket $x(1-x)$ har i intervallet $[0,1]$ sit max $\frac{1}{4}$ for $x = \frac{1}{2}$ og anvendes dette får vi:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x - \frac{\nu}{n})^2 \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \le \frac{1}{4n}$$

Vi bemærker at alle led i udtrykket er ikke negative i intervallet $[0,1]$. Vi kaster de led bort, hvor $|x - \frac{\nu}{n}| < \delta$ og erstatter i de øvrige led $(x - \frac{\nu}{n})^2$ med δ^2. Herved opnår vi Chebychevs ulighed.

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x - \frac{\nu}{n}| \ge \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \le \frac{1}{4n\delta^2} \qquad \textit{for alle} \;\; x \in [0,1]$$

Vi sammenfatter dette:

$$|f(x) - p_n(x)| \le \omega(\delta) + \frac{M}{2n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2} \qquad \textit{for alle} \;\; x \in [0,1]$$

Til et $\varepsilon > 0$ vælger vi først et $\delta(\varepsilon)$, sådan at $\omega(\delta) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Dernæst bestemmer vi et $n_0 = n_0(\varepsilon)$,

Således at: $\frac{M}{2n_0\delta(\varepsilon)^2} \le \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{M}{\varepsilon\delta(\varepsilon)^2} \le n_0$

Vi har derfor, for $n \ge n_0$:

$$|f(x) - p_n(x)| \le \varepsilon$$

Hermed er Weierstrass approximationsformel bevist.

1.4 Bemærkninger til Chebychevs ulighed

Af Chebychevs ulighed følger specielt, at for et fast $x \in [0,1]$ og for et fast $\delta > 0$ gælder det:

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}| \ge \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \to 0 \quad for \quad n \to \infty$$

Hvis vi betragter et spil med et stokastisk udfald, hvor sandsynligheden for at vinde er *x*, og hvis spillet spilles *n* gange, så er udtrykket $\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$ sandsynligheden for at vinde netop ν spil,

Og venstresiden af

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}| \ge \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

Er derfor sandsynligheden for at have vundet højest ν spil divideret med *n*.
Denne sandsynlighed afviger mindst δ fra sandsynligheden *x*. Grænseudtrykket ovenfor viser at denne sandsynlighed går imod 0 for $n \to \infty$.

Denne formodning blev først bevist af Jacob Bernoulli i 1713, og er sener blevet kendt som

De store tals lov

Reference: Håndskrevne forlæsningsnoter af professor Børge Jessen. Københavns universitet 1965