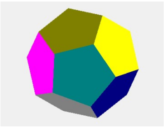
Elementær Matematik

Vektorer i planen

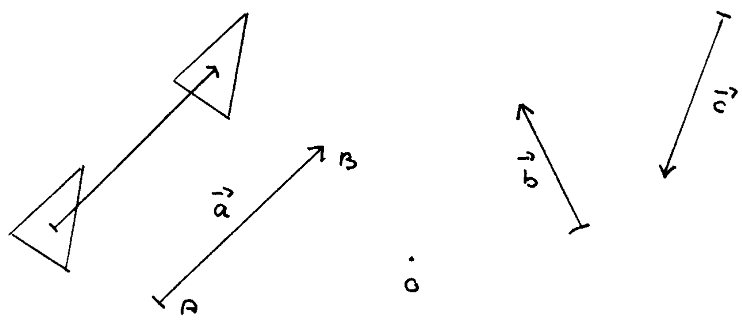


Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. Parallelforskydninger i planen. Vektorer

En parallelforskydning af en figur i planen er en operation, hvor alle figurens punkter flyttes det samme stykke i den samme retning. Parallelforskydningen som fører punktet A over i punktet B kan skrives som $A \to B$. En parallelforskydning kan derfor passende illustreres ved et orienteret liniestykke, tegnet som en pil. Det er indlysende, at to pile med samme længde og samme retning repræsenterer den samme parallelforskydning. Mængden af alle pile med samme længde og retning kaldes for en *vektor*. En enkelt pil kaldes en *repræsentant* for vektoren. Da alle pilene svarer til samme parallelforskydning, vil vi herefter betegne en *pil* som en *vektor* i stedet for det mere omstændelige - men korrekte – en repræsentant for vektoren.



En vektor, der forbinder to punkter A og B i planen, skrives som $\overrightarrow{AB}$, men man kan også skrive en vektor som et enkelt lille fremhævet bogstav eller et lille bogstav med en pil over.
Følgende 3 skrivemåder er således ækvivalente:

$$\boldsymbol{a} = \vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

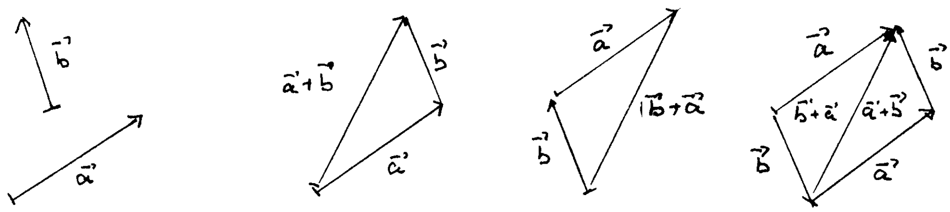
- *Længden* af en vektor skrives med to lodrette streger: $|\boldsymbol{a}| = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.
  (Længdesymbolet må ikke forveksles med det samme symbol for numerisk værdi af et tal).
- Blandt vektorer, findes specielt én som har længden nul. Den betegnes *nulvektoren* og skrives **o.** Nulvektoren tillægges ikke nogen retning.
- En *egentlig vektor* er en vektor, som ikke er nulvektoren.
- En vektor med længden 1 kaldes en *enhedsvektor*. Enhedsvektorer betegnes ofte som **e**, ***i***, ***j*** og **k.**
- To vektorer ***a*** og ***b*** siges at være parallelle, (skrives $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$), hvis der findes en repræsentant for ***a*** og en repræsentant for ***b***, som er parallelle.
- To vektorer siges at være *ensrettede* eller *modsat rettede*, når deres repræsentanter er henholdsvis ensrettede eller modsat rettede.
- To vektorer ***a*** og ***b*** siges at være *ortogonale* eller står vinkelret på hinanden (skrives $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$) , hvis der findes en repræsentant for ***a*** og en repræsentant for ***b***, som er ortogonale.
- Ved en retningsvektor for en linie, forstås en vektor, som er parallel med linien.
- Ved en normalvektor til en linie, forstås en vektor som er vinkelret på linien.

2. Sum og differens af to vektorer

Lad os antage at vi foretager en parallelforskydning, svarende til vektoren ***a***, og dernæst en parallelforskydning, svarende til vektoren ***b***, som vist på figuren nedenfor. Den resulterende parallelforskydning, svarer da til vektoren fra ***a***'*s* begyndelsespunkt til ***b***'*s* endepunkt.
Da dette er resultatet af de to parallelforskydninger, betegnes det med vektoren ***a* + *b***.

Denne vektor kaldes også for sum-vektoren eller summen af vektorerne ***a*** og ***b***.
Bemærk, at |***a*** + ***b***| i almindelighed er side i en trekant med de to andre sider |***a***| og |***b***|.
Ifølge trekantsuligheden gælder der, at en side i en trekant altid er mindre en summen af de to andre sider.

|***a*** + ***b***| < |***a***| + |***b***|, hvor |***a*** + ***b***| = |***a***| + |***b***| gælder *kun*, hvis ***a*** og ***b*** er ensrettede.



Vektoraddition er *kommutativ*. Der gælder sætningen:

(2.1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

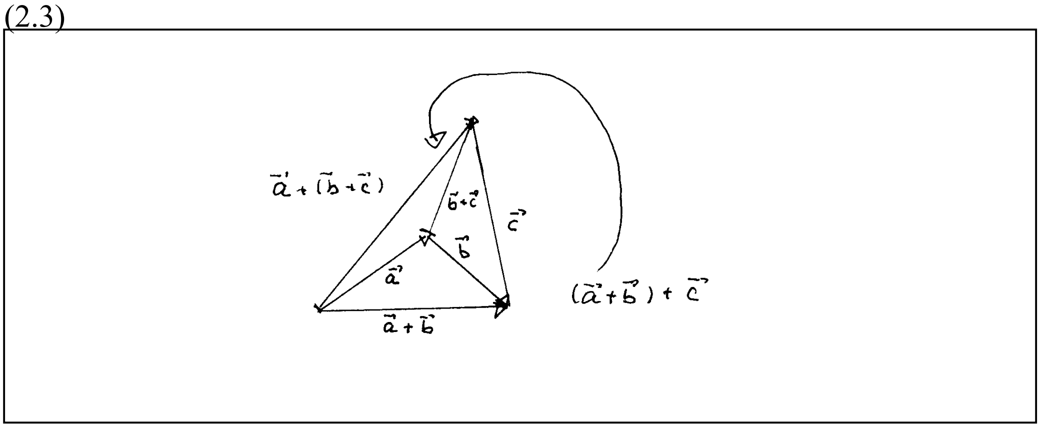
Hvis man på samme figur, som er anvendt til at konstruere ***a*** + ***b*** afsætter ***b*** ud fra ***a****'s* begyndelsespunkt og konstruerer ***b*** + ***a***, vil ***a*** og ***b*** udspænde et parallelogram, da de modstående sider repræsenteret af ***b*** er lige lange og parallelle. ***a*** + ***b*** og ***b*** + ***a*** er begge diagonalen i dette parallelogram og derfor er ***a*** + ***b*** = ***b*** + ***a***.

Denne sætning viser samtidig, at man kan konstruere sumvektoren ***a*** + ***b*** på en anden måde.
Hvis man nemlig afsætter ***a*** og ***b*** ud fra samme punkt og konstruerer det parallelogram, som udspændes af ***a*** og ***b***, vil diagonalen være en repræsentant for ***a*** + ***b***.
Denne konstruktion kaldes ofte for *kræfternes parallelogram.* Vendingen kommer fra fysikken, fordi man finder *resultanten* af to kræfter på denne måde.

Vektoraddition er *associativ*. Der gælder sætningen:

(2.2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$

(2.3)



På figuren ovenfor er konstrueret de to vektorer: ***a*** + (***b*** + ***c***) og (***a*** + ***b***) + ***c***. Det ses at summen i begge tilfælde er den vektor, der forbinder ***a****'s* begyndelsespunkt med endepunktet af ***c***.

For vektorer gælder *indskudsreglen*: Hvis *A*, *B* og *C* er punkter i planen gælder der uindskrænket:

(2.3) $$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

Dette følger af definitionen på sum af to vektorer. Specielt er $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{AB} + \vec{BA}$

Ved den *modsatte* vektor til en vektor ***a*****,** forstår man en vektor med samme længde, men modsat rettet ***a***. Den modsatte vektor til ***a*** skrives –***a***, hvilket ofte læses som "minus ***a*****"**. Den modsatte vektor til nulvektoren er nulvektoren, og der gælder i alle tilfælde at ***a*** + (-***a***) = **o**.

Betragter vi vektorligningen ***x*** + ***b*** = ***a***, er løsningen åbenbart en vektor, som adderet til ***b*** giver ***a*****.** Denne vektor betegnes *differensvektoren* mellem ***a*** og ***b***, og skrives

(2.4) $$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

Konstruktionen af ***a*** – ***b*** er vist ovenfor. Vektorerne ***a*** og ***b*** er afsat ud fra samme punkt.
Det ses, at vektoren, der forbinder endepunktet ***b*** med endepunktet af ***a***, netop er differensvektoren ***a*** – ***b***. Af den anden figur ses imidlertid at differensvektoren også kan opnås ved at tage summen af ***a*** og **(-*b*)**. Dette fordi firkanten med siderne ***b*** og (-***b***) er et parallelogram , så de to andre sider ***a*** – ***b*** og ***a***+(– ***b*****)** er identiske vektorer. Der gælder altså:

(2.5) $$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

På samme måde, som det er tilfældet med reelle tal, kan vi derfor skrive ***a*** – ***b*** i stedet for ***a*** + (– ***b***).

En nyttig konsekvens af dette er, at det ligesom for regning med tal gælder: "at man kan flytte en vektor over på den anden side af lighedstegnet ved at skifte fortegn". Dette følger af nedenstående omskrivninger:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$$

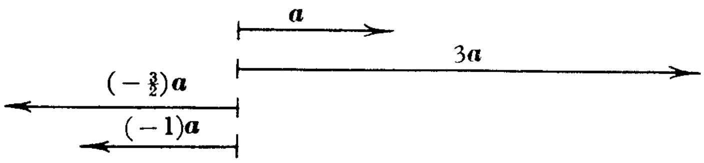
3. Multiplikation af vektor med et tal

Ved vektoren $t\cdot\boldsymbol{a}$, hvor ***a*** er en vilkårlig vektor og *t* er et reelt tal, forstår man følgende:

Hvis $t = 0$, så er $t\cdot\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$ **(**nulvektoren)
Hvis $t > 0$, så er $t\cdot\boldsymbol{a}$ en vektor med længden $t\cdot|\boldsymbol{a}|$, som er ensrettet med ***a*****.**
Hvis $t < 0$, så er $t\cdot\boldsymbol{a}$ en vektor med længden $-t\cdot|\boldsymbol{a}|$, som er modsat rettet med ***a*****.**

I alle tilfælde er længden af $t\cdot\boldsymbol{a}$: $|t\cdot\boldsymbol{a}| = |t||\boldsymbol{a}|$.

3.1 Eksempel
Nedenfor er vist nogle eksempler på multiplikation af vektor med et tal.



For multiplikation af vektor med tal gælder der nogle tilsyneladende simple regneregler.
Hvis s og t betegner reelle tal og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ **er** vilkårlige vektorer gælder.

(3.2) $\quad (s\cdot t)\cdot\boldsymbol{a} = s\cdot(t\cdot\boldsymbol{a}) \qquad (s+t)\cdot\boldsymbol{a} = s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{a} \qquad t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = t\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$

Bevis for den første regneregel: Hvis s=0 eller t=0 er begge vektorer nulvektoren. Hvis hverken s eller t er 0, vil de to vektorer $(s\cdot t)\cdot\boldsymbol{a}$ og $s\cdot(t\cdot\boldsymbol{a})$ have samme retning eller modsat retning af $\boldsymbol{a}$, alt eftersom $s\cdot t$>0 eller $s\cdot t$<0. Endvidere gælder der:

$$|(s\cdot t)\cdot\boldsymbol{a}| = |(s\cdot t)|\cdot|\boldsymbol{a}| = |s|\cdot|t|\cdot|\boldsymbol{a}| = |s|\cdot|t\cdot\boldsymbol{a}| = |s\cdot(t\cdot\boldsymbol{a})|$$

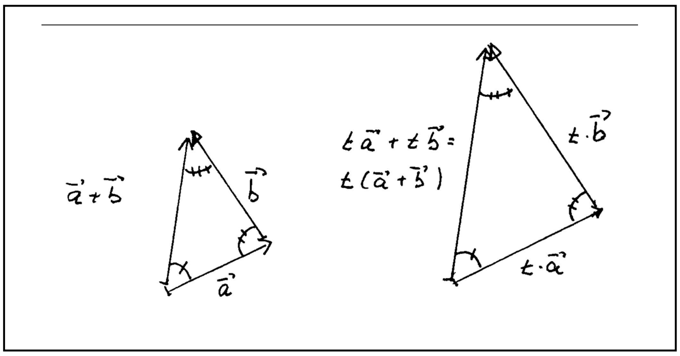
Den anden regneregel er lidt mere kompliceret at vise. Hvis s og t har samme fortegn, har $(s+t)\cdot\boldsymbol{a}$, $s\cdot\boldsymbol{a}$, $t\cdot\boldsymbol{a}$ og $s\cdot\boldsymbol{a}+t\cdot\boldsymbol{a}$ samme retning. Nedenfor ses, at de også har samme længde, så det er samme vektor.

$$|\,s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{a}| = |s\cdot\boldsymbol{a}| + |t\cdot\boldsymbol{a}| = |s|\cdot|\boldsymbol{a}| + |t|\cdot|\boldsymbol{a}| = |s+t|\cdot|\boldsymbol{a}| = |(s+t)\cdot\boldsymbol{a}|$$

Hvis s og t har modsat fortegn, og $s+t \neq 0$, har $s+t$ enten samme fortegn som s eller t. Antager vi, at $s+t$ har samme fortegn som s, har $s+t$ og $-t$ samme fortegn. Vi finder da ifølge ovenstående:

$$s\cdot\boldsymbol{a} = ((s+t)+(-t))\cdot\boldsymbol{a} = (s+t)\cdot\boldsymbol{a} + (-t))\cdot\boldsymbol{a} = (s+t)\cdot\boldsymbol{a} - t\cdot\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad (s+t)\cdot\boldsymbol{a} = s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{a}$$

Hvis $s+t = 0$, så er $t = -s$, og dermed: $\quad s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{a} = s\cdot\boldsymbol{a} + (-s)\cdot\boldsymbol{a} = s\cdot\boldsymbol{a} - s\cdot\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$



Hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er egentlige ikke parallelle vektorer, kan sætningen: $t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = t\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$ vises, hvis vi anvender aksiomet om at ligedannede trekanter er ensvinklede. Nedenfor er vist de to ligedannede trekanter, der dannes af vektorerne $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, samt af vektorerne $t\cdot\boldsymbol{a}$, $t\cdot\boldsymbol{b}$ og $t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.
Da trekanterne er ligedannede er siden, der svarer til $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ lig med $t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Ifølge konstruktionen ses, at denne side også er $t\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$. Altså er

$$t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = t\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$$

Hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er egentlige *parallelle* vektorer, er $t\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ og $t\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$ også parallelle og ensrettede, hvoraf sætningen følger trivielt. Hvis enten $\boldsymbol{a}$ eller $\boldsymbol{b}$ er nulvektoren, så er sætningen også triviel.

Vi beviser endelig følgende lille sætning.

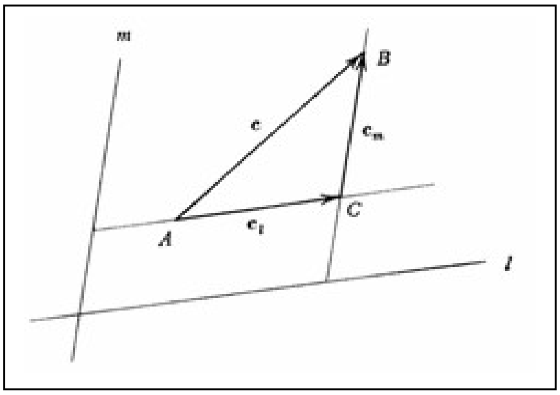
(3.3) Hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er to vektorer, hvor $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{o}$, og $\boldsymbol{b}$ enten er nulvektoren eller parallel med $\boldsymbol{a}$, så findes der netop ét tal t, så $\boldsymbol{b} = t\cdot\boldsymbol{a}$.

Bevis: Hvis $\boldsymbol{b} = t\cdot\boldsymbol{a}$, så er $|\boldsymbol{b}| = |t|\cdot|\boldsymbol{a}|$ og dermed $|t| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Endvidere, hvis $\boldsymbol{b}$ er ensrettet med $\boldsymbol{a}$, er $t > 0$, hvis $\boldsymbol{b}$ er modsat rettet $\boldsymbol{a}$ er $t < 0$, og hvis $\boldsymbol{b} = \mathbf{o}$ er $t = 0$,. I alle tilfælde findes der kun et tal, som opfylder $\boldsymbol{b} = t\cdot\boldsymbol{a}$.
At t bestemt på denne måde faktisk opfylder $\boldsymbol{b} = t\cdot\boldsymbol{a}$ er indlysende, idet de to vektorer har samme retning og længde.

Ud fra (3.3) kan man specielt bestemme en enhedsvektor, som er ensrettet med en given vektor.

$\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ Det ses umiddelbart at $|\mathbf{e}| = 1$ og at $\mathbf{e}$ er ensrettet med $\boldsymbol{b}$

4. Opløsning af en vektor efter givne retninger



Lad der være givet to ikke parallelle linier l og m samt en vilkårlig vektor $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$.
Vi tegner to linier parallelle med l og m, gennem henholdsvis A og B. Linierne skærer hinanden i punktet C. Ifølge Indskudssætningen gælder:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Idet vi sætter $\boldsymbol{c}_l = \overrightarrow{AC}$ og $\boldsymbol{c}_m = \overrightarrow{CB}$, gælder åbenbart

(4.1) $$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_l + \boldsymbol{c}_m$$

Vi har altså fået skrevet $\boldsymbol{c}$, som en sum af to vektorer, som er parallelle med henholdsvis l og m. Denne opløsning er entydig. Antag nemlig, at $\boldsymbol{c}$ også kan skrives som en sum af to vektorer $\boldsymbol{b}_l$ og $\boldsymbol{b}_m$, parallelle med henholdsvis l og m, så gælder der:

$$\boldsymbol{c}_l + \boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{b}_l + \boldsymbol{b}_m \quad <=> \quad \boldsymbol{c}_l - \boldsymbol{b}_l = \boldsymbol{b}_m - \boldsymbol{c}_m$$

På venstre side af den sidste ligning står en vektor, der er parallel med l og på højre side en vektor der er parallel med m. Da l og m er ikke parallelle, må de begge være nulvektoren og dermed: $\boldsymbol{c}_l = \boldsymbol{b}_l$ og $\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}_m$. Formlen (4.1) kaldes opløsning af en vektor efter to givne retninger.

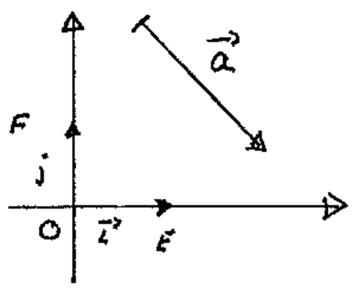
Hvis $\boldsymbol{c} = \mathbf{c}_l + \mathbf{c}_m$ og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er to vektorer parallelle med henholdsvis l og m, kan vi ifølge (3.3) bestemme tal s og t, således at:

$$\boldsymbol{c}_l = s\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c}_m = t\cdot\boldsymbol{b}$$

For to ikke parallelle retninger l og m og to egentlige vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, kan $\boldsymbol{c}$ altså kun på en måde skrives som en *linearkombination* af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Dette kaldes også for opløsningen af $\boldsymbol{c}$ efter $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

(4.2) $$\boldsymbol{c} = s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$$

5. Vektorers koordinater



Vi indfører nu et almindeligt retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Enhedspunkterne på x og y-aksen (1,0) og (0,1), betegner vi E og F.
Vi lader $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ betegne de to ortogonale enhedsvektorer

(5.1) $$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OE} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{j} = \overrightarrow{OF}$$

Disse to vektorer, kaldes for koordinatsystemets *basisvektorer*.
Da koordinatsystemet er fuldstændig fastlagt ved O og de to basisvektorer, betegner vi det med $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.

Ifølge (4.2) kan enhver vektor $\boldsymbol{a}$, skrives som en entydigt bestemt linearkombination af de to basisvektorer.

(5.2) $$\boldsymbol{a} = x\cdot\boldsymbol{i} + y\cdot\boldsymbol{j}$$

(x,y) kaldes for *koordinaterne* til vektor $\boldsymbol{a}$. Man har tradition for at navngive koordinaterne med det samme bogstav som vektoren, forsynet med indeks $_1$ og $_2$, og i øvrigt skriver man ofte koordinaterne på "højkant" og anvender lighedstegn mellem koordinaterne og vektoren, som vist med eksemplerne nedenfor.

(5.3) $$\boldsymbol{a} = a_1\cdot\boldsymbol{i} + a_2\cdot\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hvis $\boldsymbol{a} = a_1\cdot\boldsymbol{i} + a_2\cdot\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{b} = b_1\cdot\boldsymbol{i} + b_2\cdot\boldsymbol{j}$, følger det af regnereglerne for addition af vektorer og multiplikation af vektor med tal:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = a_1\cdot\boldsymbol{i} + a_2\cdot\boldsymbol{j} + b_1\cdot\boldsymbol{i} + b_2\cdot\boldsymbol{j} = (a_1 + b_1)\cdot\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\cdot\boldsymbol{j}$$

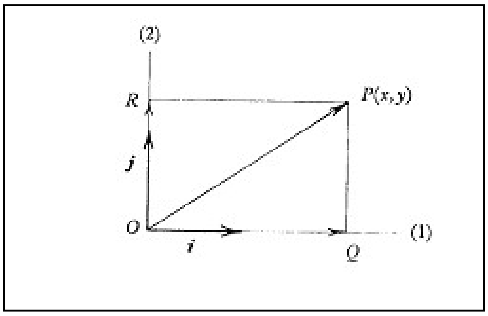
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = a_1\cdot\boldsymbol{i} + a_2\cdot\boldsymbol{j} - (b_1\cdot\boldsymbol{i} + b_2\cdot\boldsymbol{j}) = (a_1 - b_1)\cdot\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\cdot\boldsymbol{j}$$

$$k\cdot\boldsymbol{a} = k\cdot(a_1\cdot\boldsymbol{i} + a_2\cdot\boldsymbol{j}) = (k\cdot a_1)\cdot\boldsymbol{i} + (k\cdot a_2)\cdot\boldsymbol{j}$$

Heraf følger - ikke særlig overraskende - regneregler for koordinater til vektorer.

(5.4) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

6. Stedvektor. Længden af en vektor



Lad der i planen være givet et koordinatsystem (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$).
For et vilkårligt punkt $P = (x, y)$ i planen kaldes vektoren

$\overrightarrow{OP}$ for *stedvektoren* til P.

Projektionen af P på 1. og 2. aksen er Q $(x,0)$ og R $(0, y)$.
Ifølge sætning (3.3) gælder der:

$\overrightarrow{OQ} = x \cdot \boldsymbol{i}$ og $\overrightarrow{OR} = y \cdot \boldsymbol{j}$ **,** og dermed

(6.1) $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

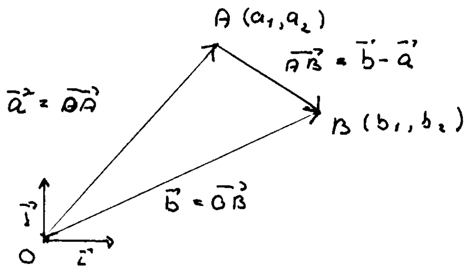
Vi har hermed vist, at koordinaterne til et punkt er lig med koordinaterne til punktets stedvektor.

En vilkårlig vektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ er stedvektor for punktet A (a_1, a_2), så $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$. Ifølge afstandsformlen gælder der:

(6.2) $$|\,\boldsymbol{a}\,| = |\overrightarrow{OA}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Længden af en vilkårlig *vektor* er kvadratroden af kvadratsummen af dens koordinater.
Hvis A og B er to vilkårlige punkter i planen gælder ifølge indskudssætningen:

(6.3) $$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \qquad \text{og dermed} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



Hvis A (a_1, a_2) og B (b_1, b_2) gælder der

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Indsættes dette i (6.3) får man

(6.4) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

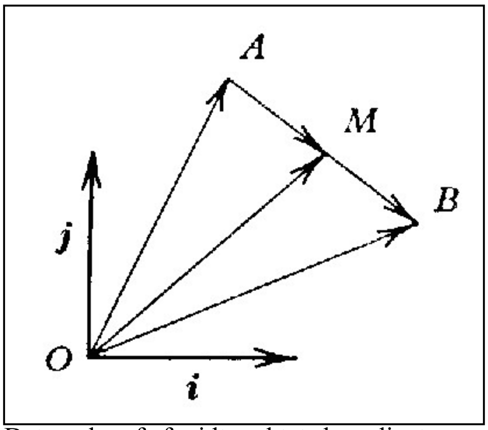
Vi har således vist den vigtige sætning.

Koordinaterne til den vektor der forbinder to vilkårlige punkter A og B er endepunktets koordinater minus begyndelsespunktets koordinater.

For længden af $\overrightarrow{AB}$, finder man ifølge (6.2) en formel, som er identisk med afstandsformlen.

(6.5) $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

6.6 Eksempel.



Mange små geometriske sætninger kan bevises elegant ved vektorregning. Vi viser først sætningen:
Koordinaterne til midtpunktet *M* af liniestykket, der forbinder *A* og *B* er middeltallet mellem endepunkternes koordinater. Lad *A* (a_1 ,a_2) og *B* (b_1 ,b_2) være vilkårlige punkter i planen. Ifølge Indskudssætningen gælder:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \tfrac{1}{2}\vec{AB} = \vec{OA} + \tfrac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA})$$

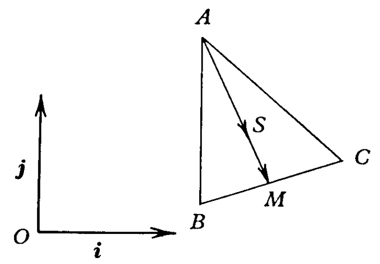
(6.7) $$\vec{OM} = \tfrac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$$

Skrevet ud i koordinater:

(6.7) $$\vec{OM} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Det ses heraf af midtpunktets koordinater er middeltallet mellem endepunkternes koordinater.

6.8 Eksempel.
Vi vil bestemme koordinaterne til medianernes skæringspunkt *S* i en trekant *A, B* og *C*.



Lad $A = (a_1 ,a_2)$ og $B = (b_1 ,b_2)$ og $C = (c_1 ,c_2)$. Vi ved fra geometrien, at medianen forbinder en vinkelspids med midtpunktet af den modstående side, og at medianernes skæringspunkt *S* deler medianen i forholdet 2:1, således at: $\vec{AS} = \tfrac{2}{3}\vec{AM}$

Ifølge indskudssætningen gælder:

$\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{OA} + \tfrac{2}{3}\vec{AM} = \vec{OA} + \tfrac{2}{3}(\vec{OM} - \vec{OA})$ Ifølge sætning (6.7) er $\vec{OM} = \tfrac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$ så vi får

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \tfrac{2}{3}(\vec{OM} - \vec{OA}) = \vec{OA} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB}) - \vec{OA})$$

som kan reduceres til

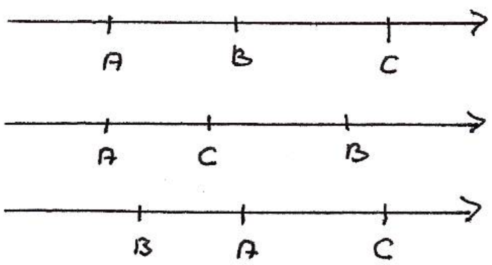
(6.9) $$\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB})$$ Skrevet ud i koordinater $$\vec{OS} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Koordinaterne til medianernes skæringspunkt er middeltallet mellem koordinaterne til trekantens hjørner.
Da udtrykket er symmetrisk i *A*, *B* og *C*, er det underordnet, hvilken af trekantens hjørner vi var gået ud fra. Vi kan herefter – ud fra vektorregning – slutte, at medianerne går gennem samme punkt.

7. Projektion af liniestykke på linie. Drejningsvinkel

For at indføre skalarproduktet af to vektorer, er det nødvendigt at præcisere nogle små sætninger fra geometrien.

7.1 eksempel. Liniestykker regnet med fortegn.



På en orienteret tallinie (en koordinatakse), kan man med fordel regne liniestykker med fortegn. Et liniestykke, der forbinder punkterne *A* og *B*, skrives *AB*. Længden af liniestykket skrives som bekendt |*AB*|.
AB regnes for positivt, hvis *B* ligger i den positive retning i forhold til *A* ellers negativ.
Helt præcist gælder der: Hvis *AB* = |*AB*|, så er *BA* = –|*AB*|.
Om 3 punkter *A*, *B* og *C* på en tallinie gælder der uafhængig af deres indbyrdes placering indskudssætningen:

(7.1) $$AB = AC + CB$$

Hvis B ligger til højre for A og C ligger mellem A og B, følger det umiddelbart ata $|AB| = |AC| + |CB|$.
Hvis B ligger til højre for A og C ligger til højre for B gælder der:

$$|AC| = |AB| + |BC| \quad \Leftrightarrow \quad |AB| = |AC| - |BC| \quad \Leftrightarrow \quad AB = AC + CB$$

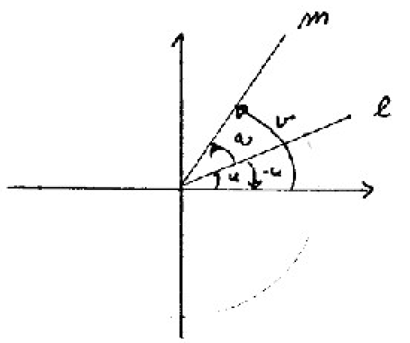
Hvis $AB = -|AB|$, altså B ligger til venstre for A, og C ligger mellem B og A, gælder der.

$$|BA| = |BC| + |CA| \quad \Leftrightarrow \quad -AB = -CB - AC \quad \Leftrightarrow \quad AB = AC + CB$$

De øvrige tilfælde af indskudssætningen kan vises helt på samme måde.

Hvis A og B har koordinaterne a og b, gælder der i alle tilfælde: $AB = b - a$. Dette kunne også være anvendt til at bevise indskudssætningen.

7.2 Eksempel. Drejningsvinkel.
Hvis man har to vektorer eller to orienterede liniestykker, definerer man vinklen mellem vektorerne, som den numerisk mindste drejning, der fører den ene vektor (eller orienterede liniestykke) over i en vektor (eller orienterede liniestykke), der har samme retning som den anden. Med denne definition er vinklen mellem to vektorer (eller orienterede liniestykker) altid mellem 0 og 180^0.



Man har tidligere indført begrebet retningsvinkel for en linie, som en drejningsvinkel, der fører 1.aksens positive retning over i en retning ensrettet med en halvlinie l. Hvis v er en retningsvinkel for l, kan samtlige retningsvinkler for linien skrives som:

$$v + p\cdot 360^0 \text{ og } v + 180^0 + p\cdot 360^0 \text{, samlet } v + p\cdot 180^0,$$

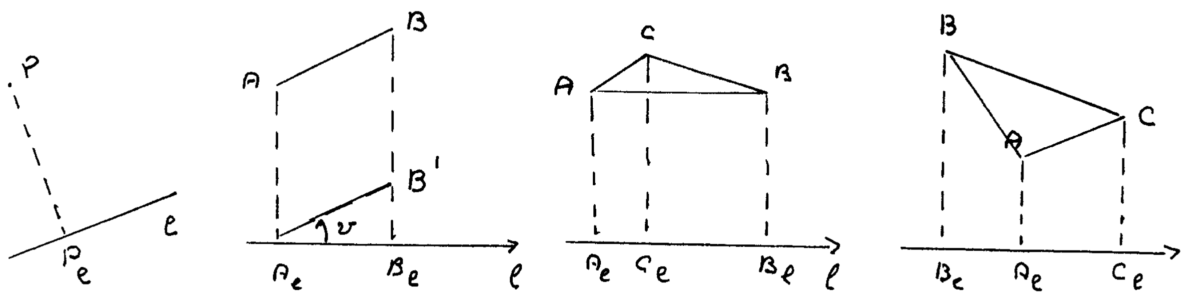
hvor p er et helt tal.
På figuren er indført et koordinatsystem med to linier l og m med retningsvinkler u og v. Vi ønsker at finde vinklen w mellem l og m.
På helt samme måde som for punkter på en linie gælder der en indskudssætning for retningsvinkler (som også regnes med fortegn).
Af figuren ses umiddelbart med placeringen af l og m:

$$v = u + w \;\Rightarrow\; w = v - u$$

Med brug af indskudssætningen, gælder dette imidlertid uafhængigt af placeringen af l og m, og uafhængigt af fortegnet og størrelsen af u og v.
Man kan nemlig sige, at den drejning, der fører l over i m, består af to drejninger: En på $-u$ som fører l over i x-aksen plus en drejning v, som fører x-aksen over i m. I alt en drejning på $w = -u + v = v - u$

Vi kan altid finde en vinkel mellem to vektorer (eller orienterede liniestykker) med retningsvinkler u og v, som $v - u$.
For at finde vinklen mellem de to vektorer (som defineret) ovenfor, kan det være nødvendigt at skifte fortegn eller addere et multiplum af 360^0. Det er dog vigtigt for det følgende at notere sig, at $cos(v\text{-}u)$ er uforandret ved sådanne operationer.

7.3 Eksempel. Projektion af liniestykke på en orienteret linie.
Ved projektionen af et punkt på en linie, forstår man nedfældning af den vinkelrette. Man tegner (konstruerer) en (stiplet) linie, gennem punktet P vinkelret på linien l. Projektionen P_l af P på linien l er skæringspunktet mellem de to linier.



Projektionen af et liniestykke *AB* på en linie *l* er liniestykket A_lB_l, som forbinder projektionen af *A* og *B* på *l*. Hvis *AB* er vinkelret på *l* kan projektionen udarte til et punkt.
Hvis man indfører en orientering på linien *l*, og lader *v*, være drejningsvinklen mellem liniernes positive orienteringer, fra *l* til *AB*, så gælder der, idet liniestykkerne regnes med fortegn: $A_lB_l = AB \cos v$.

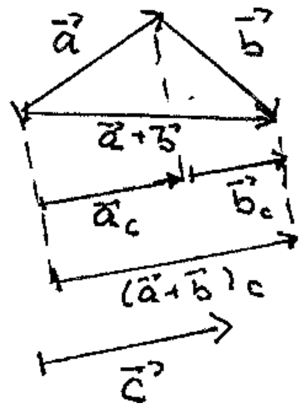
Bevis. Hvis vi parallelforskyder *AB* vinkelret på linien *l*, så *A* ligger på *l*, er projektionen af *AB* uforandret. Se figuren ovenfor.
Hvis $v < 90^0$, ses det ud fra den retvinklede trekant $A_lB'B_l$, at $|A_lB_l| = |AB'| \cos v$ og dermed $A_lB_l = AB \cos v$.
Hvis $90^0 < v < 180^0$, vil der gælde: $|A_lB_l| = |AB| \cos(180^0 - v)$. Idet $A_lB_l = -|A_lB_l|$, gælder som før: $A_lB_l = AB \cos v$.

For et brudt liniestykke, *AC* og *CB*, som vist på figuren, vil der gælde, at summen af den med fortegn regnede projektion af *AC* og *CB* vil være lig med projektionen af *AB*. Hvis drejningsvinklerne til *AC* og *CB* begge er mindre end 90^0, (eller begge er mellem 90^0 og 180^0), følger dette umiddelbart af figuren. I andre tilfælde, følger sætningen ved at anvende indskudssætningen for A_l, C_l og B_l, som er projektionen af *A*, *C* og *B* på *l*.

Dette kan generaliseres til følgende sætning:

(7.4) Projektionen af en brudt linie på en linie er lig med projektionen af den linie, som forbinder den brudte linies endepunkter.

8. Skalarprodukt



Resultaterne fra eksempel 7.2 og 7.3, kan direkte overtages til at gælde for vektorer. Et orienteret liniestykke, kan nemlig opfattes som en repræsentant for en vektor, så vinklen mellem to vektorer og for projektion af vektor på vektor har samme betydning som for deres repræsentanter. Dette fører umiddelbart til sætningen:

(8.1) *Summen af projektionerne af to vektorer* ***a*** *og* ***b*** *på en vektor* ***c****, er lig med projektionen af sumvektoren* ***a + b****. Betegner vi projektionen af en vektor* ***a*** *på* ***c*** *med* $\boldsymbol{a}_c$*, gælder der altså.*

$$\boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{b}_c = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_c$$

Vi vil nu indføre *skalarproduktet* af to vektorer. En skalar betyder et tal – i modsætning til en vektor. Vi indfører skalarproduktet geometrisk, dvs. uafhængigt af et valgt koordinatsystem.

Ved *skalarproduktet* mellem to egentlige vektorer forstår man produktet af deres længder gange cosinus til vinklen imellem dem. Skalarproduktet med en nulvektor er nul. Skarlarproduktet skrives med en prik "**·**" og det betegnes også som prikproduktet.

(8.2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos v$, hvor $v = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ er vinklen mellem ***a*** og ***b***.

Det er vigtigt at notere sig, at $|\boldsymbol{b}| \cdot \cos v$ er den med fortegn regnede projektion af en repræsentant for ***b*** på et liniestykke med samme orientering som ***a***.
Tilsvarende er $|\boldsymbol{a}| \cdot \cos v$ er den med fortegn regnede projektion af en repræsentant for ***a*** på et liniestykke med samme orientering som ***b***.

For regning med skalarproduktet gælder der nogle vigtige sætninger.

(8.3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (Kommutative lov)

(8.4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

(8.5) $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$ (Distributive lov)

(8.6) $\vec{a}\cdot(k\,\vec{b}) = \vec{b}\cdot(k\,\vec{a}) = k(\vec{b}\cdot\vec{a})$

(8.7) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{o} \;\vee\; \vec{b} = \vec{o} \;\vee\; \vec{a}\perp\vec{b}$

(8.3) følger umiddelbart af definitionen, idet: $\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ og $\cos(v) = \cos(-v)$.
(8.4) følger af : $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$
Hvis vi sætter $u = \angle(\vec{a},\vec{c})$, $v = \angle(\vec{b},\vec{c})$ og $w = \angle(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})$, så kan (8.5) vises ved følgende omskrivning:

$$\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos u + |\vec{c}||\vec{b}|\cos v = |\vec{c}|(|\vec{a}|\cos u + |\vec{b}|\cos v)$$
$$|\vec{c}|(a_c + b_c) = |\vec{c}|(a+b)_c = |\vec{c}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|\cos w = \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

Vi har her som tidligere med a_c **,** b_c and $(a + b)_c$ betegnet de med fortegn regnede projektioner af en repræsentant for ***a*** , ***b*** og ***a*+*b*** på et liniestykke orienteret på samme måde som ***c***, og anvendt sætning (7.4).
Sætning (8.6) følger af, at hvert af de 3 udtryk kan opfattes som længden af ***a*** gange *k* gange projektionen af ***b*** på ***a***.
(8.7) følger umiddelbart af definitionen af skalarproduktet samt *nul-reglen* for et produkt af tal, idet

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; |\vec{a}||\vec{b}|\cos v = 0 \;\Leftrightarrow\; |\vec{a}| = 0 \;\vee\; |\vec{b}| = 0 \;\vee\; \cos v = 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{o} \;\vee\; \vec{b} = \vec{o} \;\vee\; v = 90^0$$

Heraf følger den vigtige *sætning*:

To egentlige vektorer, er ortogonale, hvis og kun hvis deres skalarprodukt er 0.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{o} \;\vee\; \vec{b} = \vec{o} \;\vee\; \vec{a}\perp\vec{b}$$

Med regnereglerne for skalarproduktet, gælder mange af de regneregler vi kender for regning med reelle tal, men hvor addition er erstattet af vektorsum og multiplikation af skalarprodukt.
For det første har man tradition for at sætte: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$. (Men det kan ikke anvendes på højere potenser – naturligvis). Vi vil herefter vise ”kvadratsætningerne” ved anvendelse af regnereglerne (8.2) - (8.7)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

Og på samme måde:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

Helt tilsvarende får man

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

Endelig bemærker vi at

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| = ||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos v| \le |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$, da cosinus til en vinkel altid er numerisk mindre end 1.

8.9 Eksempel.

Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder : $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ og $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 3$
Bestem gradtallet mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

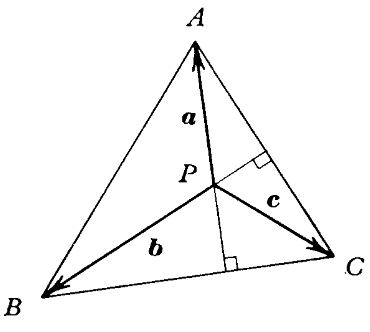
Vi finder først skalarproduktet ud fra oplysningerne.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 3 \;\Rightarrow\; |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = 9 \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 9 \;\Leftrightarrow$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 9 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -2$$

$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = -\frac{2}{6} \Rightarrow v = 109{,}47^0$$

8.10 Eksempel
Vi vil bevise sætningen, at i en vilkårlig trekant skærer højderne hinanden i samme punkt.



På figuren er vist en trekant ABC. Der er tegnet højderne fra A og B, som skærer hinanden i punktet P.

Endvidere er tegnet vektoren $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{PC}$. Vi vil vise, at $\boldsymbol{c} \perp \overrightarrow{AB}$.

Idet $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PA}$ og $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PB}$ gælder der

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

Tilsvarende er

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$

Ifølge konstruktionen gælder: $\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$ og $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$, hvoraf følger

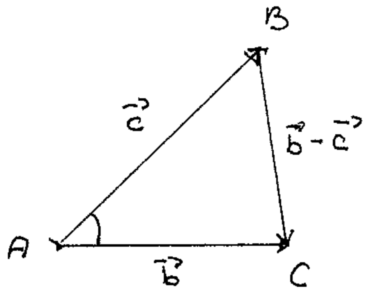
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}) = 0 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{c} \perp (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{c} \perp \overrightarrow{AB}$$

Vi har derfor, at CP er højden fra C på AB gennem P, så i en trekant går højderne gennem samme punkt.

Bemærk, at vi har regnet eksempel 8.10 rent geometrisk uden anvendelse af koordinatsystem. Vi vil nu vise, hvorledes man simpelt kan udlede cosinus-relationen uden anvendelse af koordinatsystem.

8.11 Eksempel. Cosinus-relationen.



På figuren er vist en trekant ABC.

Vi sætter $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ og hermed

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$

Det er klart at trekantens sider har længderne

$c = |\boldsymbol{c}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$ and $a = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|$. Vi udregner da $\boldsymbol{a}^2$.

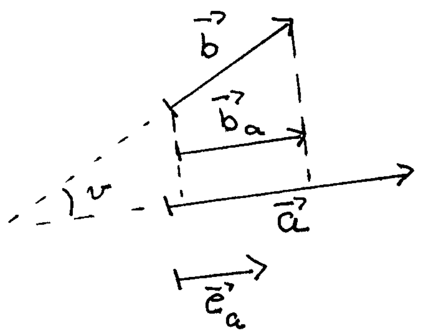
$\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|^2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - 2\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 - 2\,|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos A$

(8.12) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c \cos A$$

Som er den velkendte cosinus relation for siden a.

9. Projektion af vektor på vektor

Vi har tidligere vist, at skalarproduktet $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos v$, hvor $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, kan fortolkes som $|\boldsymbol{a}|$ gange b_a, hvor b_a er den med fortegn regnede projektion af en repræsentant for $\boldsymbol{b}$ på en linie som er ensrettet med $\boldsymbol{a}$. Ganger vi denne projektion med en enhedsvektor, som er ensrettet med $\boldsymbol{a}$, så finder vi projektionen $\boldsymbol{b_a}$ af $\boldsymbol{b}$ på $\boldsymbol{a}$.



$$\vec{b}_a = (|\vec{b}|\cos v)\vec{e}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Heraf finder man formlen for projektionen af en vektor $\boldsymbol{b}$ på en vektor $\boldsymbol{a}$.

(9.1) $$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{e}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$$

For *længden* af projektionen $|\vec{b}_a|$, får man ved at tage længden på højre side af det første udtryk

(9.2) $$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

10. Skalarproduktet udtrykt i koordinater

Vi indfører nu et koordinatsystem (O, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$) i planen. Da $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er ortogonale enhedsvektorer gælder der

(10.1) $$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1 \;,\; \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1 \text{ og } \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

Lad ***a*** og ***b*** have koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Der gælder således:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$$

Vi udregner nu skalarproduktet ***a·b*** ved hjælp af regnereglerne for skalarprodukt og (10.1)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = a_1b_1\boldsymbol{i}^2 + a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j}^2 = a_1b_1 + a_2b_2$$

Vi har da fundet følgende vigtige udtryk for skalarproduktet udtrykt i koordinater

(10.2) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

10.3 Eksempel

Vi vil bestemme et koordinatudtryk for projektionen af $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ på $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, samt vinklen mellem de to vektorer.

Ifølge (9.1) gælder:

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{2\cdot4+5\cdot(-3)}{(\sqrt{4^2+(-3)^2})^2}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{7}{25}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{25} \\ \frac{21}{25} \end{pmatrix}$$

For vinklen har vi ifølge definitionen af skalarproduktet:

$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = -\frac{2\cdot4-3\cdot5}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{-7}{5\sqrt{29}} \Rightarrow v = 105{,}07^0$$

10.4 Eksempel. Additionsformlerne.

Additionsformlerne er fællesnavnet for nogle formler til beregning af cos(u-v), sin(u-v), cos(u+v) og sin(u+v).
Lad $\mathbf{e}_u$ = (cos u, sin u) og $\mathbf{e}_v$ = (cos v, sin v) være to enhedsvektorer, svarende til retningsvinklerne u og v. Vinklen imellem dem er (på nær fortegn og et multiplum af 360^0 som lader cosinus uforandret) er u-v. Tager vi skalarproduktet af de to enhedsvektorer, får vi ifølge definitionen:

$$\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{e}_v = |\mathbf{e}_u|\cdot|\mathbf{e}_v|\cos(u-v) = 1\cdot1\cdot\cos(u-v) = \cos(u-v)$$

Udregner vi derimod skalarproduktet i koordinater får man

$$\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{e}_v = \cos u\cdot\cos v + \sin u\cdot\sin v$$

Heraf fås den første af additionsformlerne

(10.5) $$\cos(u-v) = \cos u\cdot\cos v + \sin u\cdot\sin v$$

Erstatter vi v med $-v$ finder man

$$\cos(u+v) = \cos u\cdot\cos(-v) + \sin u\cdot\sin(-v) = \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v$$

(10.6) $$\cos(u+v) = \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v$$

Erstatter vi i (10.6) u med 90-u, finder man

$$\cos(90-(u-v)) = \cos(90-u)\cdot\cos v - \sin(90-u)\cdot\sin v$$

som giver

(10.7) $\sin(u\text{-}v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$

Og endelig, hvis man erstatter v med $-v$ i (10.7) får man

(10.8) $\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$

Det skal bemærkes, at additionsformlerne ligesom cosinusrelationen følger meget elegant af vektoregning. Den geometriske udledning af additionsformlerne er meget tungere.

10.9 Eksempel. Cosinus og sinus til den dobbelte og halve vinkel.

Hvis vi i (10.6) og (10.8) sætter $u = v = x$, får man relationerne,

$$\cos(x+x) = \cos(2x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x+x) = \sin(2x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos x$$

Anvender man grundrelationen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ med omskrivningerne $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ på formlen for cos(2x), får man følgende formler:

(10.10) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

(10.11) $\sin(2x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos x$

Erstatter man x med ½x i (10.10) får man formler for cos(½x) og sin(½x).

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos x = 2\cos^2(½x) - 1$$

Løses denne ligning med hensyn til cos(½x) får man:

(10.12) $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ (Anvend plus, når ½x ligger i 1. eller 4. kvadrant, ellers minus)

Tilsvarende får man fra $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (Anvend plus, når ½x ligger i 1. eller 2. kvadrant, ellers minus)

10.13 **Eksempel**

De logaritmiske formler for addition af sinus og cosinus.

Ved at addere de to additionsformler (10.5) og (10.6) får man

$\cos(u\text{-}v) + \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v + \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v = 2\cos u \cdot \cos v$.

Indfører vi nu $x = u\text{-}v$ og $y = u+v$ og løser med hensyn til u og v, får man: u =½(x + y) og v = ½ (x - y)
Indsættes dette ovenfor får man den første af de logaritmiske formler

(10.14) $\cos x + \cos y = -2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Formlerne kaldes for logaritmiske fordi man erstatter en addition med en multiplikation. På helt tilsvarende vis, får man de øvrige logaritmiske formler.

(10.15) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(10.16) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(10.17) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

11. Tværvektor

For en vilkårlig vektor $\vec{a}$, definerer man *tværvektoren* $\hat{a}$ til $\vec{a}$, som den vektor der fremkommer ved at dreje $\vec{a}$ en vinkel 90^0 i positiv omløbsretning. Af definitionen følger, at

$$|\hat{a}| = |\vec{a}| \qquad \text{og} \qquad \hat{\hat{a}} = -\vec{a}$$

Endvidere ses det, at

$$\hat{0} = \vec{0}\,, \quad \hat{i} = \vec{j}\,, \quad \hat{j} = -\vec{i}$$

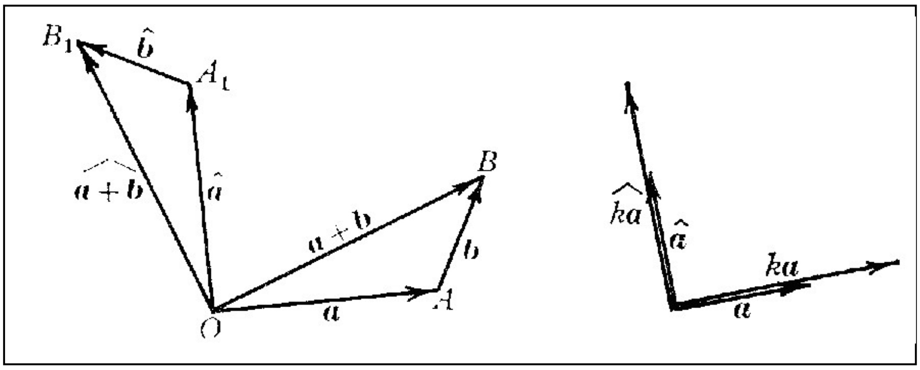
Der gælder nogle små sætninger for regning med tværvektorer

(11.1) $\widehat{ka} = k\hat{a}$ og $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$

Af figuren nedenfor fremgår det, at vektorerne $\widehat{ka}$ og $\hat{a}$ vil være ensrettede eller modsat rettede eftersom $k \cdot \vec{a}$ og $\vec{a}$ er det. Endvidere har $\widehat{ka}$ og $k\hat{a}$ samme længde, idet

$$|\widehat{ka}| = |\vec{ka}| = |k|\,|\vec{a}| = |k|\,|\hat{a}| = |k\hat{a}|$$

Hvoraf følger $\widehat{ka} = k\hat{a}$.



Idet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vilkårlige vektorer betragter vi trekant *OAB*, hvor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ og $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Ved en drejning på 90^0 omkring *O* føres *A* over i A_1, *B* føres over i B_1. der gælder derfor:

$\overrightarrow{OA_1} = \hat{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \hat{b}$ og $\overrightarrow{OB_1} = \widehat{a+b}$. Idet $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$, ses, at der gælder

$$\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$$

Tværvektoren til en sum af vektorer er lig med summen af tværvektorerne til de enkelte vektorer

Lad en vilkårlig vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ i et koordinatsystem (O, $\vec{i}, \vec{j}$). $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$.

Ved anvendelse af regnereglerne for tværvektor, finder man

$$\hat{a} = \widehat{a_1 \cdot i + a_2 \cdot j} = \widehat{a_1 \cdot i} + \widehat{a_2 \cdot j} = a_1 \cdot \hat{i} + a_2 \cdot \hat{j} = a_1 \cdot \vec{j} - a_2 \cdot \vec{i}$$

Heraf ses, at tværvektoren til $\vec{a}$ har koordinaterne

(11.2) $$\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

11.3 Eksempel

I et koordinatsystem er givet vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Om en vektor ***b*** oplyses, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \quad \text{and} \quad \vec{a} \cdot \hat{b} = -19$$

Bestem koordinat sættet for $\vec{b}$.

Vi sætter $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ som giver $\hat{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$ og opskriver derefter de to skalarprodukter i koordinater

$2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2 = 4$ og $2 \cdot (-b_2) - 3 \cdot b_1 = 19$ <=>

$2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2 = 4$ og $3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = -19$

Ved at løse disse to ligninger mht. b_1 og b_2 får man $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

12. Determinant for et vektorpar

For to vilkårlige vektorer ***a*** og ***b***, definerer man *determinanten* $det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ for vektorparret som

(12.1) $$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \hat{a} \cdot \vec{b}$$

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og udregnes determinanten i koordinater finder man

$$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \hat{a} \cdot \vec{b} = (-a_2) \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

(12.2) $$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Ud fra koordinatudtrykket, ses at $det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\,det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, idet

$$det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (-b_2)\cdot a_1 + b_1\cdot a_2 = -(a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1) = -det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Determinanten skrives ofte ved hjælp af et *determinantsymbol*, som er to lodrette streger, hvor koordinaterne oftest skrives på "højkant".

(12.3) $$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Som en udregning viser, kan koordinaterne også skrives "rækkevis".

$$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1$$

For egentlige vektorer ***a*** og ***b*** gælder at ***a*** er parallel med ***b*,** hvis og kun hvis determinanten af vektorparret **(*a*, *b*)** er nul.

(12.3) $$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \quad <=> \quad det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

Dette følger af

$$det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \hat{a}\cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \hat{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Der gælder følgende geometriske sætning:

*For egentlige vektorer **a** og **b** gælder, at |det(**a**, **b**)| er arealet af det parallelogram som udspændes af **a** og **b**.*

Lad der være givet to egentlige vektorer ***a*** og ***b***, samt punkter *O, A* og *B* således at $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Vi minder om formlen for *længden* af projektionen af vektor på vektor.

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}_a|$$

Formlen udtrykker, at den numeriske værdi af *skalarproduktet* er lig med længden af den ene vektor gange længden af projektionen af den anden vektor på den første.
Anvender vi dette på determinanten af vektorparret (***a***, ***b***) får man:

(12.4) $$|\det(\vec{a}\cdot\vec{b})| = |\hat{a}\cdot\vec{b}| = |\hat{a}||\vec{b}_{\hat{a}}| = |\vec{a}||\vec{b}_{\hat{a}}|$$

$|\vec{a}|$ er længden af $\vec{a}$, og $|\vec{b}_{\hat{a}}|$ er længden af $\vec{b}$ '*s* projektion på $\hat{a}$. Som det fremgår af figuren ovenfor, er $|\vec{b}_{\hat{a}}|$ netop højden i det parallelogram, som har $\vec{a}$, som det ene sæt parallelle sider og $\vec{b}$ som det andet. Dette gælder, hvad enten $\vec{b}_{\hat{a}}$ er ensrettet med $\hat{a}$ eller modsat rettet $\hat{a}$. Heraf følger:

(12.4) $$|\det(\vec{a},\vec{b})| = |\hat{a}\cdot\vec{b}|$$ = Arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

12.5 Eksempel: Arealet af en trekant, udspændt af to vektorer.

Lad en trekant være givet ved punkterne A(-3,2), B(4,5) og C(7,0). Arealet af trekanten er halvdelen af arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

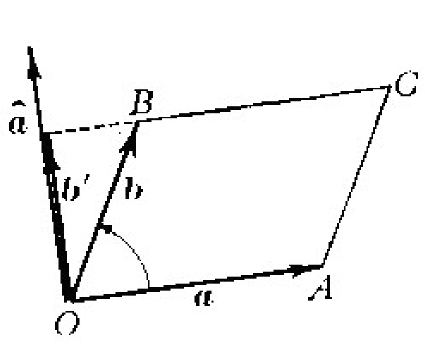
Arealet af trekanten er derfor: $T = ½\,|\det(\vec{AB},\vec{AC})| = ½\,|\begin{vmatrix}7 & 10\\3 & -2\end{vmatrix}| = ½\,|7\cdot(-2) - 3\cdot 10| = 22$

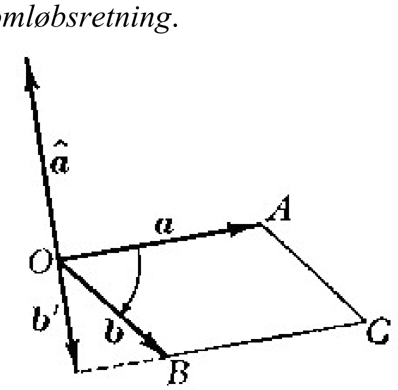
12.6 Eksempel: Arealet af en trekant udtrykt ved koordinaterne til *A, B* og *C*..

Hvis: $A(a_1a_2), B(b_1b_2), C(c_1c_2)$ er koordinaterne til vinkelspidserne, så er: $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, $\vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$, og dermed:

$$T = \tfrac{1}{2}\,|\det(\vec{AB},\vec{AB})'| = \begin{vmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\ b_2-a_2 & c_2-a_2\end{vmatrix}$$

Man definerer *omløbsretningen* for vektorparret $(\vec{a},\vec{b})$, som *positiv*, hvis den mindste drejning, der fører $\vec{a}$ over i $\vec{b}$ er i den *positive omløbsretning*.





Det ses endvidere på figuren, at $\vec{b}'$ er ensrettet med $\hat{a}$, når omløbsretningen for vektorparret $(\vec{a}, \vec{b})$ er positiv, og $\vec{b}'$ er modsat rettet $\hat{a}$, når omløbsretningen for vektorparret $(\vec{a}, \vec{b})$ er negativ. Heraf ses, at fortegnet for omløbsretningen er den samme, som fortegnet for determinanten $\det(\vec{a}, \vec{b})$ udtrykt ved skalarproduktet $\hat{a} \cdot \vec{b}$.

Ved *retningsvinklen* for en vektor ***a***, forstår man retningsvinklen for en halvlinie, som er ensrettet med ***a***. Hvis *P* er retningspunkt på enhedscirklen for en vinkel *v*, så gælder der: $\vec{e} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$.

En vektor ***a*** med retningsvinkel *v* kan derfor skrives $\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$

Det er herefter muligt, at opskrive et udtryk for |*det*(***a, b***)|, svarende til det vi kender for skalarproduktet.

Skalarproduktet er uafhængig af valget af koordinatsystem, så ved udregning af et skalarprodukt, kan vi vælge koordinatsystemet som vi ønsker. Vi vælger da 1. aksen, så den er ensrettet med ***a***. Hvis vinklen mellem ***a*** og ***b*** er *v*, er denne vinkel retningsvinkel for ***b***. Heraf følger:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = |\vec{b}| \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

og hermed

(12.6)
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} |\vec{a}| & |\vec{b}|\cos v \\ 0 & |\vec{b}|\sin v \end{vmatrix} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v \quad \Rightarrow \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$

12.7 Eksempel. Sinusrelationerne.

Lad os tænke os en trekant ABC udspændt af to vektorer $\vec{a} = \vec{CB}$ og $\vec{b} = \vec{CA}$, så svarer |***a***| til siden *a*, |***b***| til siden *b* og den mellemliggende vinkel er *C*. Ifølge formlen ovenfor kan man finde arealet af trekanten som

$$T = ½ \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ½ \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

Helt tilsvarende får man formlerne $T = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ og $T = ½ \cdot a \cdot c \cdot \sin B$. Ved at sætte

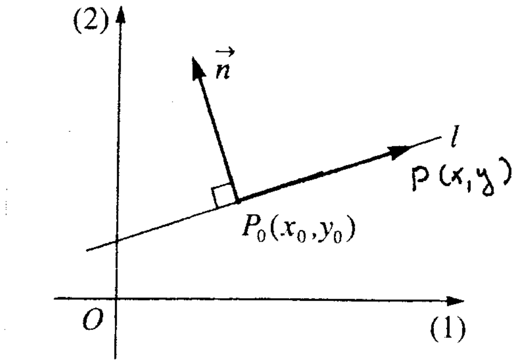
$$½ \cdot b \cdot c \cdot \sin A = ½ \cdot a \cdot c \cdot \sin B = ½ \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

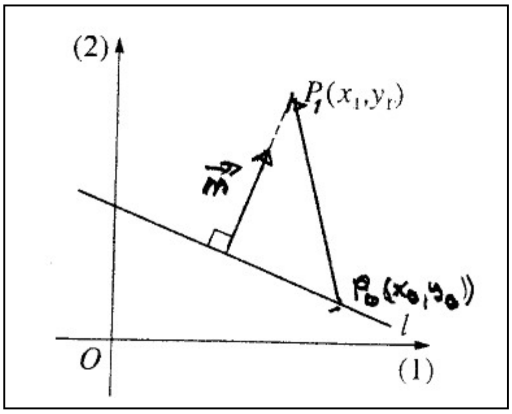
og dividere igennem med $½ \cdot a \cdot b \cdot c$ genfinder man sinusrelationerne:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

13. Liniens ligning. Afstand fra punkt til linie

Lad en linie l i *planen* være fastlagt ved et punkt $P_0\,(x_0,y_0)$ og en normalvektor til linien $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.





Vi kan da udtrykke følgende:

Punktet $P(x,y)$ ligger på linien, hvis og kun hvis vektorerne $\vec{n}$ og $\overrightarrow{P_0P}$ er ortogonale, altså hvis

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

(13.1) $$ax + by + c = 0$$

hvor vi har sat $c = -ax_0 - by_0$.

Det bemærkes, at ligningen også er opfyldt, når $P = P_0$, idet $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{o}$.
Afstanden $d = dist(P_1,l)$ fra punktet P_1 til linien l , kan på samme måde findes ved at udtrykke, at d er lig med *længden af projektionen* af vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ på $\vec{n}$ **.** For projektionen af $\vec{a}_b$ af en vektor $\vec{a}$ på en vektor $\vec{b}$, og for længden af denne projektion, har vi tidligere fundet de to udtryk.

(13.2) $$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \qquad \text{og} \qquad |\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Heraf fås:

(4.3) $$d = dist(l,P) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Det sidste udtryk svarer til det, vi tidligere har udledt i den analytiske geometri uden brug af vektorer.

4.4 Eksempel:

1) En linie l har normalvektoren $\boldsymbol{n}$ = (3,4) og linien går gennem P(-2,2). Bestem en ligning for linien.

   Vi indsætter i $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ og får:

   $3(x + 2) + 4(y – 2) = 0 \iff 3x + 4y – 2 = 0$

   Bestem afstanden fra linien til punktet A(4, -5).

   Ved indsættelse i (4,3) fås: $d = \dfrac{|3\cdot4-4\cdot5-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$

2) En linie har retningsvektor $\boldsymbol{r}$ = (1,-2) og går gennem (-4, 2). Bestem en ligning for linien.
   Tværvektoren til $\boldsymbol{r}$, vil være en normalvektor til linien. $\boldsymbol{n}$ = (2, 1). Heraf bestemmes linien ligning som før

   $$2(x + 4) +1(y – 2) = 0 \iff 2x + y + 6 = 0$$

14. Liniers skæring. To lineære ligninger med to ubekendte.

Når man skal løse to lineære ligninger med to ubekendte, skrives det i almindelighed op på følgende måde:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Dette kan opfattes som ligningen for to linier, (hvor C er flyttet over på den anden side af lighedstegnet). En løsning (x, y) svarer til et koordinatsæt, der tilfredsstiller begge ligninger, og som dermed er liniernes skæringspunkt.

Ligningssystemet kan imidlertid også opfattes som en vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, der er skrevet som en linearkombination af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Opfattet på denne måde får ligningssystemet udseendet:

(13.1) $$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$$

Pointen er nu den, at opfattet som en vektorligning, kan ligningssystemet løses ved ren vektorregning. Multiplicerer vi nemlig ligningen skalært med tværvektoren $\vec{a}$, finder man

$$x\hat{a}\cdot\vec{a} + y\hat{a}\cdot\vec{b} = \hat{a}\cdot\vec{c}$$

$\hat{a}\cdot\vec{a} = 0$, da de er ortogonale ifølge definitionen på tværvektor. Hvis $\hat{a}\cdot\vec{b} \neq 0 \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b}) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, så har ligningssystemet, netop en løsning y.

(13.2) $$y = \frac{\hat{a}\cdot\vec{c}}{\hat{a}\cdot\vec{b}} = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}$$

På helt tilsvarende måde, ved at multiplicerer ligningen skalært med tværvektoren til $\vec{b}$.

$$x\hat{b}\cdot\vec{a} + y\hat{b}\cdot\vec{b} = \hat{b}\cdot\vec{c}$$

$$x = \frac{\hat{b}\cdot\vec{c}}{\hat{b}\cdot\vec{a}} = \frac{\det(\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{b},\vec{a})} = \frac{-\det(\vec{c},\vec{b})}{-\det(\vec{a},\vec{b})} = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})}$$

det(***a***, ***b***) kaldes for ligningssystemets determinant. Hvis determinanten er forskellig fra 0, har ligningssystemet netop 1 løsning, givet ved udtrykkene ovenfor.

Opskrives løsningen ved hjælp af koordinater giver det

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ligningssystemets determinant betegnes *D*.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Hvis D $\neq$ 0, har ligningssystemet netop en løsning:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \wedge \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

At løse to lineære ligninger med to ubekendte på denne måde betegnes som determinantmetoden.

Eksempel. To lineære ligninger med to ubekendte

Lad der være givet de to ligninger

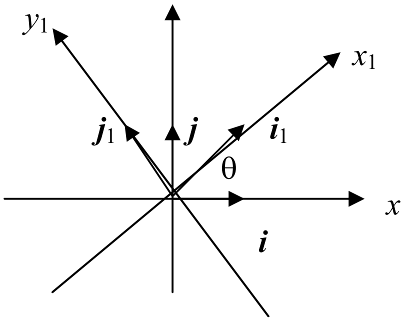
$$2x - 3y = -4$$
$$-x + 5y = 7$$

Determinanten er $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, så ligningssystemet har netop en løsning: $x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \quad \wedge \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}}{7} = \frac{10}{7}$

15. Koordinattransformationer

Vi vil se på koordinattransformationer ved rotationer i planen. Nedenfor er vist to koordinatsystemer med samme begyndelsespunkt, men hvor det ene koordinatsystem er drejet en vinkel θ i forhold til det andet. Basisvektorerne i de to koordinatsystemer fremgår af figuren.

y



Da $\boldsymbol{i}_1$ er en enhedsvektor med retningsvinkel θ, har den koordinaterne $\boldsymbol{i}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$.
$\boldsymbol{j}_1$ er tværvektoren til $\boldsymbol{i}_1$, så $\boldsymbol{j}_1 = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Der gælder altså:

$$\vec{i_1} = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$$
$$\vec{j_1} = -\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}$$

I det almindelige koordinatsystem har punktet P og dermed stedvektoren $\vec{OP}$ koordinaterne (x,y), mens P i det roterede koordinatsystem har koordinaterne (x_1,y_1).

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad og \quad \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{i_1} + y_1 \cdot \vec{j_1}$$

Indsættes udtrykkene for $\vec{i_1}$ og $\vec{j_1}$ i den sidste af ligningerne, og samles leddene med hensyn til $\vec{i}$ og $\vec{j}$ finder man:

$$\vec{OP} = (x, y) = (x_1 \cdot \cos\theta - y_1 \cdot \sin\theta) \cdot \vec{i} + (x_1 \cdot \sin\theta + y_1 \cdot \cos\theta) \cdot \vec{j}$$

Hvor vi samler x-koordinaten og y koordinaten.

$$x = x_1 \cdot \cos\theta - y_1 \cdot \sin\theta \quad og \quad y = x_1 \cdot \sin\theta + y_1 \cdot \cos\theta$$

Hvis ligningerne løses på sædvanligvis med hensyn til x_1 og y_1 får man til slut de ønskede transformationsformler

(14.1) $$x_1 = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta \quad og \quad y_1 = -x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

Man har tradition for at skrive transformationsformlerne på "matrixform". Førstekoordinaten i søjlen til venstre får ved at gange (som ved et skalarprodukt) første række i matricen med søjlen til højre, og sådan fremdeles.

(14.2) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Indeks