Matematiske Emner

Kendte og ukendte problemer fra

Variationsregningen

Ole Witt-Hansen

Køge Gymnasium 2009

Indhold

1. *Analytiske metoder til optimering*

I differentialregningen i den elementære klassiske analyse, løses optimeringsproblemer ved at bestemme ekstrema dvs. *maximum* eller *minimum* for en reel funktion af én variabel.
Hvis funktionen, der beskriver problemet kaldes for $f(x)$, så bestemmes de lokale max. Eller min. Ved at løse ligningen:

$$f'(x) = 0$$

Der er lokalt max. i x_0 , hvis $f'(x_0) = 0$ og fortegnsvariationen for $f'(x)$ omkring x_0 er + , 0, - (så f vokser, flader ud og aftager), når x_0 passeres. Dette kan også udtrykkes ved at $f''(x_0) < 0$, idet $f'(x_0)$ da skærer *x-aksen* fra den positive side til den negative.
Vi kan altså konkludere, at for en differentiabel funktion f, så har f lokalt max. i x_0, hvis,

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{og} \quad f''(x_0) < 0$$

I nogle sammenhænge kan det være fordelagtigt, at formulere differentiabilitet på en lidt anden måde: Hvis f er differentiabel i x_0, gælder ifølge definitionen:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \quad for \;\; h \to 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0 \, for \quad h \to 0$$

Indfører man en såkaldt epsilonfunktion $\varepsilon(h)$, som har den ene egenskab, at $\varepsilon(h) \to 0$ *for* $h \to 0$, kan differentiabiliteten igen skrives som:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h) \qquad \text{som kan omformes til:}$$

$$\Delta f(h) = f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

Det sidste led går mod 0 af højere orden end det første, og man kan derfor tillade sig at se bort fra det når h er lille. Man finder da:

$$\Delta f(h) \approx f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h \text{ , når } h \text{ er lille.}$$

Dette udtryk for $\Delta f(h)$ betegnes *variationen* af f omkring x_0.

Hvis f har ekstremum (max/min) i x_0 er $f'(x_0) = 0$ og dermed er variationen af f i x_0 lig med 0.

Denne formulering, vil vi anvende i et følgende.

1.1 *Partielle afledende*

For funktioner af to (eller flere) variable $z = f(x,y)$, kan man udregne de såkaldte *partielle afledede*, idet man blot differentierer efter den ene variabel, som om den anden er en konstant.
Partielle afledede skrives med et "buet *d*" ∂ .
De to partielle afledede af $z = f(x,y)$, skrives:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad og \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Tilsvarende kan man udregne de fire 2. afledede.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad og \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Det er en meget vigtig sætning, (som vi ikke vil bevise), at man kan ombytte rækkefølgen, når man differentiere partielt. Således er:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Eksempel

Hvis $f(x,y) = xy^2$, så finder man direkte: $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$

Differentialet defineres på tilsvarende måde, som for en funktion af én variabel.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Betingelsen for at en funktion har ekstremum (max/min) i et punkt er som hidtil, at variationen er nul i dette punkt:

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Altså, en funktion har ekstremum i et punkt, hvis og kun hvis alle de partielle afledede er nul i dette punkt.

Det er lidt vanskeligere, at afgøre, hvorvidt det er et max. eller et min. Uden bevis vil vi blot anføre, at det er et minimum, hvis Jacobi determinanten er positiv, ellers er det et max.
Jacobi determinanten udregnes ved:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

2. *Variationsregning*

En reel *funktion f* af flere variable $x_1, x_2, x_3, \ldots.\ x_n$ er som bekendt en *afbildning*, hvis der til ethvert $x = x_1, x_2, x_3, \ldots.\ x_n$ lader svare netop ét reelt tal.

En *funktional* er en *afbildning*, der til enhver funktion (af en eller flere variable) lader svare netop ét reelt tal.
Det bestemte integral, defineret for integrable funktioner, er et eksempel på en funktional. Dette kan man f.eks. skrive

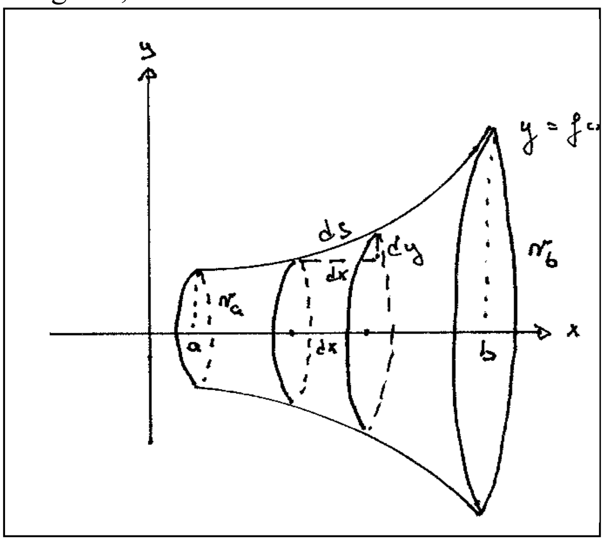
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Den disciplin af matematikken, der omhandler funktionaler, kaldes for *funktional analyse*.

Note:
En afbildning, der til en klasse af funktioner, lader svare en funktion, kalds en operator.
Et eksempel på en operator er differentialkvotienten eller enhver differentialligning. Differentialoperatoren *d/dx*, lader til enhver funktion lader svare dens *differentialkvotient*. $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$.

Variationsregningen beskæftiger sig med at bestemme ekstrema (max/min) for en funktional. Altså at bestemme den *funktion*, hvor funktionalen er størst/mindst.

Et klassisk eksempel er at bestemme formen af en "sæbeflade", altså snitkurven for et omdrejningslegeme, således at overfladen er mindst. Se figur



I opgaver af denne type er der altid knyttet nogle såkaldte randbetingelser. I tilfældet på figuren er randbetingelserne: $f(a) = r_a$ og $f(b) = r_b$, hvor $y = f(x)$ er den snitkurve, som vi ønsker at bestemme.
For at opstille et udtryk for overfladearealet, ser vi på en lille (infinitesimal) strimmel med tykkelse dx ved x.
Omkredsen af denne strimmel er $2\pi f(x) = 2\pi y$.
Bredden af strimlen er (se figur).

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

(Hvor vi har flyttet *dx* uden for kvadratrodstegnet)
Bidraget fra den infinitesimale strimmel til overfladen er derfor:

$$dO = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \quad \text{eller} \quad dO = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Hele overfladen findes da ved integration.

$$O(y) = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Det er helt tilsigtet, at vi skriver y i stedet for $f(x)$, idet y er den ubekendte funktion (variabel). Variationsregningens opgave er nu, blandt alle differentiable funktioner, at bestemme den, som gør integralet mindst muligt.

Vi skal senere angive løsningen til dette problem, som er en af de få problemer i variationsregningen, som faktisk kan løses (har en analytisk løsning), men først vil vi se på det lidt mere generelle problem at bestemme ekstrema for en *funktional,* som er givet ved et bestemt integral (af flere variable).
Den generelle løsning til problemet skyldes Leonard Euler og teorien kaldes for *variationsregning*.
Variationsregningen er en af de allerstærkeste og mest anvendelige teorier i matematikken.
Det viser sig nemlig, at alle bevægelsesligninger i fysikken (inklusive den almene relativitetsteori), kan udledes af variationsregningen med passende forudsætninger.
Vi tager udgangspunkt i det, som matematikere lidt frejdigt har kaldt for ”Det simpleste problem”

2.1 *Det simpleste problem*

V betragter en funktion F, som er en funktion af x, y, y', hvor $y = f(x)$ er den funktion, som vi ønsker at bestemme. Vi ønsker, at fastlægge ekstrema (max/min) for funktionalen

$$I(y) = \int_a^b F(y', y, x)dx$$

Begrundelsen for netop dette valg af funktional er, at mange praktiske problemer netop kan reduceres til denne form, hvoraf vi allerede har give et eksempel på den mindste omdrejningsoverflade.

Vi betragter nu en lille variation δy til funktionen y. Som det blev argumenteret for ovenfor, så har $I(y)$ ekstremum, hvis variationen $\delta I = I(y + \delta y) - I(y) = 0$.
Snedigheden i fremgangsmåden er den, at hvis δy er en vilkårlig variation og ε er et lille reelt tal så vil $\varepsilon\cdot\delta y$ være en lille variation. Fordelen ved dette er, at vi kan betragte $\varepsilon\delta y$ som en reel funktion af variablen ε og anvende den almindelige teori for differentialregningen, hvor der er ekstremum for en funktion, hvis $f'(x) = 0$. I dette tilfælde, (altså ekstremum for $I(\varepsilon)$), hvis $I'(\varepsilon) = 0$.
Sagt på en anden måde, hvis $I(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\,\delta y)$ har ekstremum i y, så må $I(\varepsilon)$ have ekstremum i 0, $I'(0) = 0$ for alle variationer y. Helt præcist skrevet:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \textit{uafhængig af} \quad \delta y$$

Vi skal nu se, at dette fører til en differentialligning som y må opfylde. Regningerne er langt fra helt trivielle. Man skal huske på at δy er en (vilkårlig) funktion, og skal behandles som sådan i modsætning til en uafhængig variabel Δx.

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(y' + \varepsilon\delta y', y + \varepsilon\delta y, x)dx$$

Man finder dernæst ved partiel differentiation efter variablen ε.

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y)dx \qquad \text{Betingelsen} \quad \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{giver da:}$$

$$\int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y)dx = 0$$

For at komme videre forudsætter vi følgende rimelige betingelse, at variation δy forsvinder i endepunkterne a og b, altså δy(a) = δy(b) = 0.
På det første led af de to integrander foretager vi da en delvis integration efter formlen:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y dx$$

PÅ grund af betingelsen δy(a) = δy(b) = 0 forsvinder det første led efter lighedstegnet og indsættes det andet led i ligningen ovenfor får man:

$$\int_a^b ((\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\delta y - \frac{\partial F}{\partial y}\delta y)dx = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y})\delta y dx = 0$$

Hvis integralet skal være nul for *alle* variationer δy, så må resten af integranden nødvendigvis være nul. Dette fører til en 2.ordens differentialligning i y.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Dette er åbenbart den betingelse som en kendt funktion F skal opfylde, for at integralet har ekstremum. Ligningen kaldes for *Euler-Lagrange* ligningen
Denne 2. ordens differentialligning, kan ikke løses i almindelighed, men vi skal se på følgende to specialtilfælde, hvor der eksisterer løsninger.

1. F afhænger ikke eksplicit af y. (Dette forekommer sjældent). I dette tilfælde er:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$ og ligningen reduceres til

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=c \quad (const)$$

1. F afhænger ikke eksplicit af x. Forekommer for mange kendte og klassiske problemer.

I dette tilfælde er $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, og i udregningen af $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$ kan man udelade dette led.

Vi ganger nu Euler-Lagrange ligningen $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$ med y' og derefter adderer og subtraherer vi leddet $y''\frac{\partial F}{\partial y'}$. Man får da:

$$(y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+y''\frac{\partial F}{\partial y'})-(y'\frac{\partial F}{\partial y}+y''\frac{\partial F}{\partial y'})=0$$

Idet $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ ses leddene i den sidste parentes at være lig med $\frac{dF}{dx}$, og leddene i den første parentes ses, at være lig med: $\frac{d}{dx}y'\frac{\partial F}{\partial y'}$. Hermed kan Euler-Lagrange ligningen omskrives til:

$$\frac{d}{dx}(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=Const$$

Bemærk, at vi har fået reduceret en 2.ordens differentialligning til en første ordens ligning. Ligningen kan løses analytisk i nogle enkelte tilfælde.
Da det næsten altid er denne omskrivning af Euler Lagrange ligningen, man anvender, og da den har haft så stor betydning, den også omtales også som Euler Lagrange ligningen.

3. *Anvendelser*

Vi skal nu se på nogle anvendelser af teorien, og vi indleder med nogle kendte klassiske eksempler.

3.1 *Sæbeflader. Mindste omdrejningsflade.*

Vi viste ovenfor, at overfladen af et omdrejningslegeme, hvor funktionen $y = f(x)$ roteres om 1. aksen er givet ved.

$$O(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Vi har altså i dette tilfælde: $F(y', y'x) = y\sqrt{1+y'^2}$, hvor F ikke afhænger eksplicit af x. Vi kan derfor anvende den sidste variant af Euler-Lagrange ligningen.

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = C$$

C er en konstant, der er bestemt ved randbetingelserne. Ved at indsætte udtrykket for F og udføre diffrentiationerne, får man:

$$y'\frac{2yy'}{2\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{1+y'^2}$ og reducere finder man ligningen:

$$yy'^2 - y(1+y'^2) = C\sqrt{1+y'^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -C\sqrt{1+y'^2}$$

Den sidste ligning er en differentialligning af 1.orden, som i princippet kan løses ved separation af de variable. Med kendskab til de såkaldte hyperbolske funktioner *cosh*(x) og *sinh*(x) er det dog ret let at "gætte" en løsning.

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{og} \qquad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Det er meget let at verificere, at $(\cosh x)' = \sinh x$ og $(\sinh x)' = \cosh x$

Endvidere viser en simpel udregning, at: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

For at slippe af med kvadratrodstegnet i ligningen $y = -C\sqrt{1+y'^2}$ sætter vi $y' = \sinh(\frac{x-x_0}{y_0})$

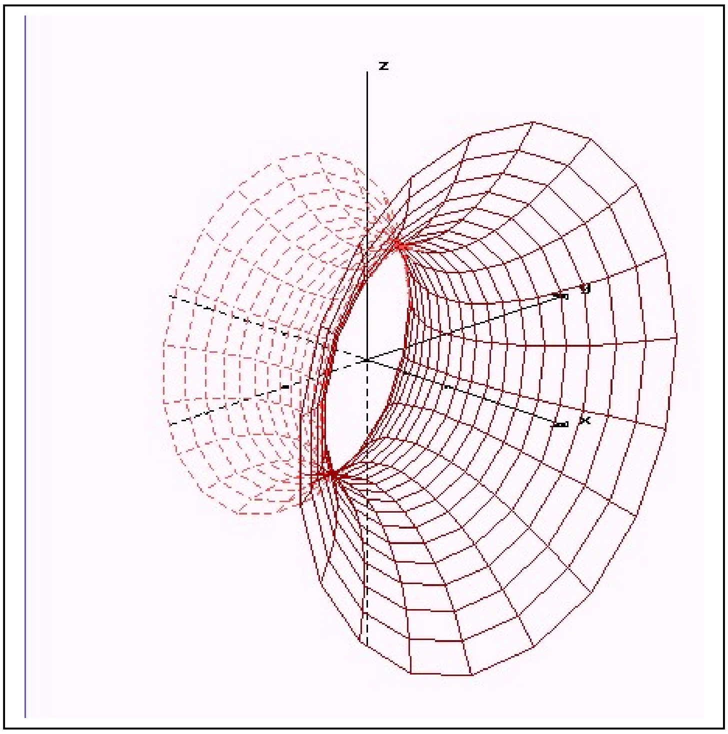
Heraf følger, at $y = y_0\cosh(\frac{x-x_0}{y_0}) + k$. Indsætter vi da i ligningen får man:

$$y_0\cosh(\frac{x-x_0}{y_0}) + k = -C\sqrt{1+\sinh^2(\frac{x-x_0}{y_0})} \quad \Leftrightarrow$$

$$y_0\cosh(\frac{x-x_0}{y_0}) + k = -C\sqrt{\cosh^2(\frac{x-x_0}{y_0})} \quad \Leftrightarrow$$

$$y_0\cosh(\frac{x-x_0}{y_0}) + k = -C\cosh(\frac{x-x_0}{y_0})$$

Det ses heraf, at $y = y_0 \cosh(\frac{x - x_0}{y_0}) + k$ er løsning, hvis og kun hvis: k =0 og C = -b.



Løsningen til differentialligningen er derfor

$$y = y_0 \cosh(\frac{x - x_0}{y_0})$$

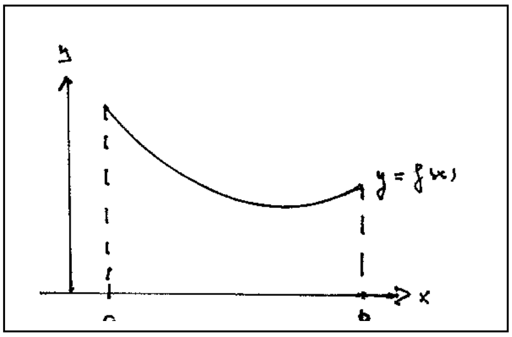
Snitkurven i x-y planen for sæbefladen, vil altså være en hyperbolsk cosinus.

x_0 og y_0 er bestemt af randbetingelserne, f.eks. radierne i sæbefladens endeflader.

$$f(a) = r_a \;\text{ og }\; f(b) = r_b$$

Til venstre er vist en computertegning af en hyperbolsk sæbeflade.

3.2 *Kædelinien*



Problemet er i alt sin enkelhed at bestemme den kurve, som en kæde, der er ophængt mellem to punkter vil danne. Formuleringen af problemet kræver et minimalt kendskab til teoretisk fysik.
For et mekanisk system med frihedsgrader, dvs. mulighed for at kunne bevæge sig i en eller flere retninger (friheds-grader), vil systemet altid søge at indtage en position, *hvor den potentielle energi er mindst*.
Hvis systemet ikke er gnidningsfrit, vil det finde hvile i denne position.
Fra bevægelse i tyngde feltet ved man at alt vil trille eller falde så langt ned som muligt.
Vi opstiller derfor et udtryk for den potentielle energi af den ophængte kæde. Kædens form tænkes givet ved funktionen:

$$y = f(x)$$

og kæden er ophængt i punkterne $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$. Massen pr længdeenhed af kæden betegnes med μ.
Som beskrevet tidligere er længen af det infinitesimale kurvestykke ds, svarende til forskydningen dx givet ved: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ så $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

Den potentielle energi dE af massen placeret på stykket ds er da efter formlen $E_{pot} = mgh$ er derfor:

$$dE = \mu g y ds = \mu g y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Den samlede potentielle energi findes da ved integration.

$$E = \mu g\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Problemet med at bestemme formen af kædelinien er derfor et variationsproblem med

$$F(y',y,x) = y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

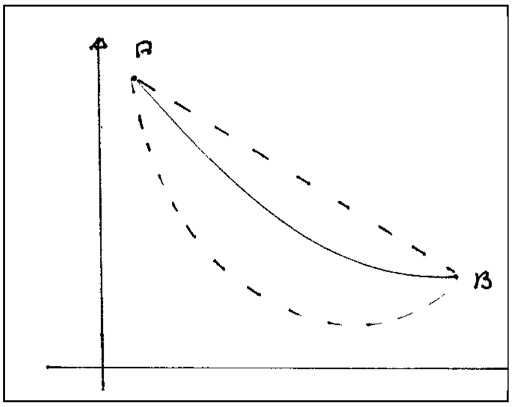
Integranden er imidlertid nøjagtig den samme, (bortset fra en konstant faktor), som i problemet med den mindste omdrejningsflade, og løsningen kan direkte kopieres:

$$y = y_0\cosh\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)$$

Kædelinien er en hyperbolsk cosinus.

3.3 *Brachistocronen*

Dette er nok det mest kendte eksempel på et problem, der (kun) kan løses ved variationsregning. Problemet er først formuleret af den berømte matematiker Johan Bernoulli.



Problemet er i alt sin enkelhed det at bestemme den kurve som et legeme gnidningsfrit vil bevæge sig langs med fra et punkt A til et punkt B, i den kortest mulige tid. Umiddelbart kunne man tro, at den korteste vej (som er en ret linie, der forbinder de to punkter) også ville være banekurven for den korteste tid, men det er ikke nødvendigvis tilfældet. Er kurven nemlig stejlere i begyndelsen, vil legemet opnå større fart til at gennemløbe den sidste og længere del af kurven. Løsningen er ret overraskende.

Fra kinematikken ved vi, at $ds = vdt$ (Strækning = hastighed x tid).

Samtidig er $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad\Rightarrow\quad dt = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx$

Energibevarelse for et frit fald i tyngdefeltet giver: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad\Leftrightarrow\quad v = \sqrt{2gy}$ indsættes dette i udtrykket for dt, finder man: $dt = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$. Opgaven er således at bestemme minimum for funktionalen:

$$t_{AB} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

Dette vil svare til et variationsproblem med $F(y', y'x) = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$. Da F ikke eksplicit afhænger af x, skal vi forsøge at løse ligningen, idet vi ser bort fra faktoren $\sqrt{2g}$

Euler Lagrange ligningen er i dette tilfælde $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} - F = C$, hvor vi indsætter udtrykket for F.

$$y'\frac{2y'}{2\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = C$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{y(1+y'^2)}$ får man efter reduktion og kvadrering af ligningen:

$y(1+y'^2) = c$, hvor c er en ny konstant

Ligningen løses lettest ved substitutionen $y' = \tan\theta$, så $1+ y'^2 = 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

$$y(1+y'^2) = c \quad \Rightarrow \; y = \frac{c}{1+y'^2} = c\cdot\cos^2\theta = \frac{c}{2}(1+\cos 2\theta)$$

For at bestemme x foretager vi omskrivningen:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = -\frac{c}{y'}\sin 2\theta = -c\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta} = -c2\cos^2\theta = -c(1+\cos 2\theta)$$

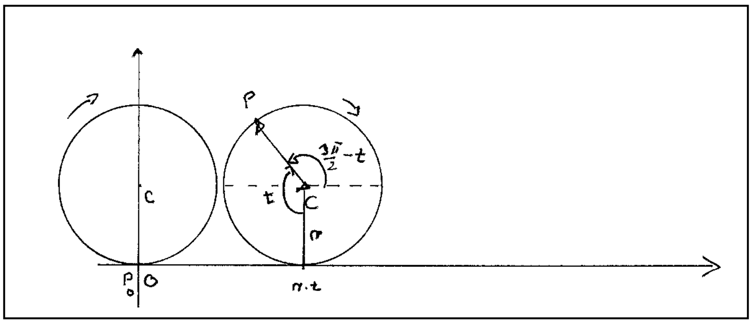
Heraf finder man $x = -\dfrac{c}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + x_0 \quad og \quad y = \dfrac{c}{2}(1+\cos 2\theta)$

Indfører vi nu $A = -\frac{1}{2}c$ og $t = 2\theta$, finder man det mere almindelige udtryk:

$$x = A(t + \sin t) + x_0 \qquad y = -A(1+\cos t)$$

Ved at vælge $x_0 = A(\frac{1}{2}\pi + 1)$ En partikel, der for $t = \frac{1}{2}\pi$ bevæger sig indtil $t = \pi$ vil bevæge sig fra positionen $(x,y) = (0, -A)$ til $(x,y) = (A(\pi - 1), 0)$.

Den kurve, hvor parameterfremstillingen er udledt nedenfor, kaldes for en cykloide. Det er den kurve, som et punkt af en cirkel vil følge, når cirklen triller på x-aksen.

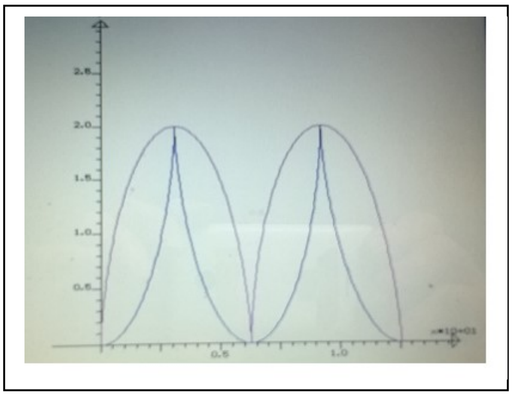


(3.25) **Parameterfremstilling for en cykloide**

af figuren ovenfor, ser man : $\vec{OP} = \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{OC} + \vec{CP} = \begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(\frac{3}{2}\pi - t) \\ r\sin(\frac{3}{2}\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix}$

Og parameterfremstillingen bliver: $\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix}$

Nedenfor er vist grafen for den matematiske cykloide sammen men den kurve, som er løsning til differentialligningen



4. *Ekstremum med bibetingelse*

Et klassisk variationsproblem er at bestemme det største rumfang for en given overflade eller det største areal omsluttet af en given omkreds. Vi ved fra erfaringen, at løsningerne er en kugle og en cirkel.
For at bestemme det største rumfang for en given overflade, opskriver vi først udtrykket for rumfang V og overflade O for et omdrejningslegeme, der fremkommer når funktionen $y = f(x)$ roteres 360^0 om 1.aksen.

$$V = \int_a^b y^2 dx \qquad O = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Opgaven er da at bestemme ekstremum for V under betingelsen O = Const.

Dette er ikke "Det simpleste problem", men derimod det man kalder optimering med *bibetingelse*. I dette tilfælde er bibetingelsen at overfladen er konstant.

Før vi går i gang med at variationsregning med **bibetingelse**, vil vi se på det problem, at bestemme minimum for en funktion af 2 eller flere variable under en bibetingelse.

Helt præcist, vil vi bestemme ekstremum for funktionen $z = f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = k$. Hvis $g(x,y) = k$ kan løses mht. y til at give: $y = h(x)$, så kan dette blot indsættes i $z = f(x,y)$ til at give: $z=f(x,h(x))$ og derefter bestemme minimum for f ved sædvanlige metoder.

I langt de fleste tilfælde, kan man ikke løse ligningen $g(x,y) = k$ mht. y, og man er henvist til analytiske metoder.

Hvis f har ekstremum er differentialet af f lig med 0 for alle variationer af *dx og dy*.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Hvis dx og dy er uafhængige af hinanden kan man slutte, at $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;\; og \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Hvis ekstremum skal findes under en bibetingelse $g(x,y) = k$, så er dx og dy ikke uafhængige, men bundet af sammenhængen:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0$$

I almindelighed gælder der for to ligninger med to ubekendte:

$$a_1 x + b_1 y = 0$$
$$a_2 x + b_2 y = 0$$

Skal ligningerne være opfyldt for alle x og y, så er ligningssystemet determinant lig med 0 og talsættene (a_2,b_2) *og* (a_1,b_1) er proportionale, hvilket kan skrives: $(a_2,b_2) = \lambda(a_1,b_1)$, hvor λ er en konstant.

Hvis man erstatter koefficienterne (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med de partielle afledede af f og g, samt x med dx og y og dy fra ligningerne ovenfor finder man, (idet man har tradition for at skrive $-\lambda$ i stedet for λ) får man ligningerne, hvis $f(x,y)$ har ekstremum i et punkt, under bibetingelsen $g(x,y) = k$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

Eller skrevet ud:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad og \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Men dette er præcis betingelsen for at funktionen $f(x,y) + \lambda g(x,y)$ har ekstremum i punktet.

Vi rekapitulerer: $f(x,y)$ har ekstremum i et punkt, under bibetingelsen $g(x,y) = k$, hvis og kun hvis funktionen $f(x,y) + \lambda g(x,y)$ har ekstremum i punktet.

Konstanten λ er bestemt ud fra problemets randbetingelser.

λ kaldes for en *Lagrange multiplikator*. Teorien for Lagrange multiplikatorer kan let udvides til at gælde for funktioner af flere en to variable, idet der altid er det samme antal Lagrange multiplikatorer, som der er bibetingelser.

4.1 *Største rumfang for en given overflade*

Vi vender nu tilbage til problemet med at finde det største rumfang for en given konstant overflade.

Rumfang og overflade er givet ved udtrykkene: $V(y)=\pi\int_a^b y^2 dx \qquad O(y)=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=k$

Ved anvendelse af teorien for Lagrange multiplikatorer, svarer dette til at bestemme ekstremum for funktionen $I(y) = V(y)+\lambda O(y)$.

$$I(y)=\pi\int_a^b y^2dx+\lambda 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\pi\int_a^b (y^2+2\lambda y\sqrt{1+y'^2})dx=\pi\int_a^b F(y',y,x)dx$$

hvor $F(y',y,x)=y^2+2\lambda y\sqrt{1+y'^2}$

$F(y',y,x)$ afhænger ikke af x, så vi kan anvende det tidligere resultat, at der er ekstremum for

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C$$

Ved at indsætte udtrykket for F og differentiere, får man:

$$y'\frac{2\lambda y' y}{\sqrt{1+y'^2}}-(y^2+2\lambda y\sqrt{1+y'^2})=C$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{1+y'^2}$ og reducere finder man:

$$(y^2-C)\sqrt{1+y'^2}+2\lambda y=0$$

Denne differentialligning er ikke umiddelbar at løse, selvom den i princippet kan løses ved separation af de variable og integration.
Da vores formodning imidlertid går i retning af at omdrejningslegemet er en kugle, forsøger vi om $x^2+y^2=r^2 \iff y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ er løsning. Man finder ved indsætning:

$$(r^2-x^2-C)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}+2\lambda\sqrt{r^2-x^2}=0$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{r^2-x^2}$ og reducere finder man da:

$$(r^2-x^2-C)\sqrt{r^2}+2\lambda(r^2-x^2)=0$$

Det ses, at $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ er løsning, hvis og kun hvis C=0 og $\lambda=-\frac{1}{2}r$

Kuglen er således den flade, som har det største rumfang for en given overflade.

4.2 *Om formen af vintønder*

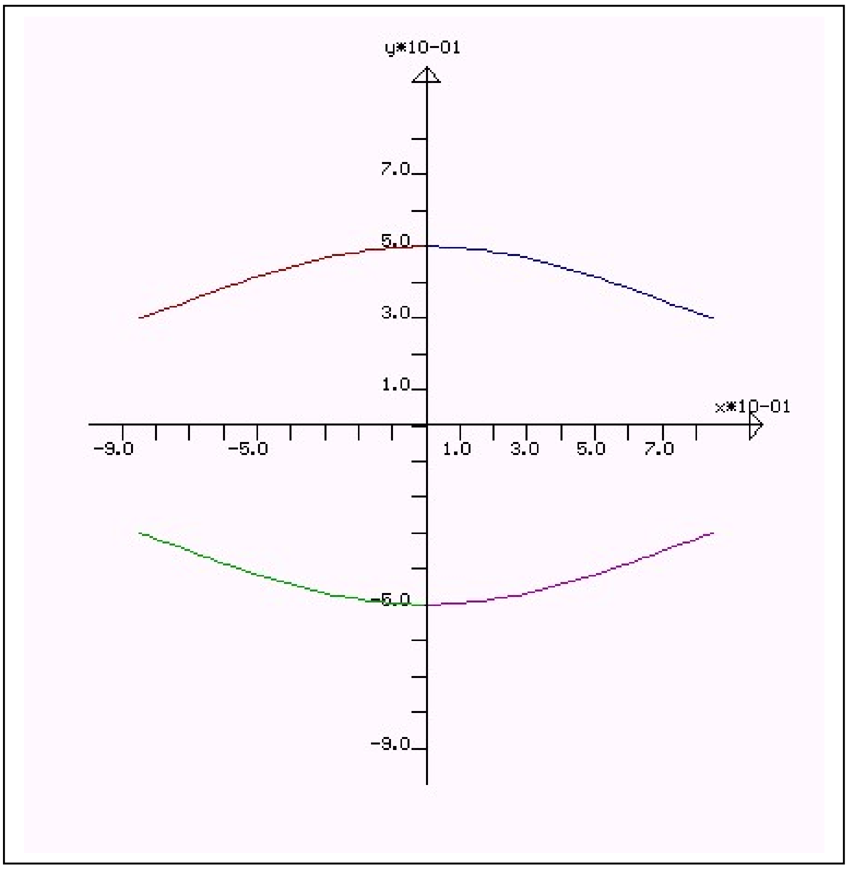
Hvis man ikke kræver, at $f(a) = f(b) = 0$, er omdrejningslegemet en tønde med radius i endefladerne $f(a) = f(b) = r$. Dette vil svare til at vi skal se på tilfældet $C \neq 0$.

Differentialligningen $(y^2 - C)\sqrt{1+y'^2} + 2\lambda y = 0$ har ikke nogen løsning, der kan udtrykkes ved almindelige funktionstegn. Løser man differentialligningen numerisk, finder man imidlertid en helt tydelig (vin)tøndeform. For at opnå forskellige former, kan man lave nogle passende betingelser:

Vi antager at løsningen er symmetrisk om y-aksen. $y'(0)=0$, $y(0)=R$, $y'(a)=\alpha$, $y(a)=r$.
Indsættes dissse ranbetingelser i differentialligningen, får man to ligninger, som fastlægger λ og C.

$$R^2 - C + 2\lambda R = 0 \quad \text{og} \quad (r^2 - C)\sqrt{1+\alpha^2} + 2\lambda R = 0$$

Nedenfor er vist en computerberegning af snitkurven til en løsning.



4.3 Om vanddråber og kviksølvkugler

Sæbebobler, vandråber i luft og kviksølvdråber er holdt sammen af *overfladespændingen.* Overfladespændingen for en bestemt væske, som vand sæbevand, kviksølv er defineret som den kraft, der virker langs længden af et snit, divideret med længden af snittet. I modsætning til hvad der gælder for elastiske stoffer afhænger størrelsen af overfladespændingen ikke af overfladens størrelse.

Heraf følger næsten umiddelbart, at den potentielle energi af en overflade, der skyldes overfladespændingen er ligefrem proportional med overfladen.
Da et fysisk system altid vil finde ligevægt ved minimum for den potentielle energi, vil vandråber i frit fald i luften være kugleformede, idet det giver den mindste overflade for et givet rumfang.

Anderledes forholder det sig med en vanddråbe, der "hænger" eller en kviksølv "kugle" der ligger-på et plant underlag. Her består den potentielle energi af systemet nemlig af to bidrag.

1. Den potentielle energi fra overfladespændingen, der er mindst for kugleformen.
2. Den potentielle energi fra tyngden: $E_{pot} = mgh$, som er mindst, hvis væsken er udbredt over et så stort areal som muligt.

Hvis massen bliver for stor, vil overfladespændingen ikke kunne holde sammen på væsken længere i overensstemmelse med at man aldrig ser dugdråber på mere en et par mm, ligesom det er erfaringen at når kviksølvdråber samler sig, danner de ikke større og større kugler, men plasker ud.
Den potentielle energi en væskedråbe med overflade S har som følge af overfladespændingen er $E_{pot}= \gamma S$, hvor γ er en materialkonstant. $\gamma_{vand} = 76\ mN/m$, $\gamma_{Hg} = 465\ mN/m$, mens $\gamma_{sprit} = 22\ mN/m$.
Dette forklarer, hvorfor man sjældent iagttager spritdråber.

Hvorledes formen er af dugdråber er et oplagt problem for variationsregningen, idet man skal bestemme minimum for summen af E_{pot}(Overflade) + E_{pot}(Tyngde).
Desværre finder man ikke nogen analytisk løsning, men en numerisk løsning viser, hvorledes dugdråber formodentlig ser ud, og man kan bestemme en omtrentlig maksimal størrelse for dråberne.

Først vil vi opstille nogle formler for overfladen S af et legeme, der roteres om y-aksen, og for den potentielle energi E af en rotationssymmetrisk skive med tykkelsen dy i højden y.

$$dS = 2\pi x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$dE_{pot}(S) = \gamma dS = 2\pi\gamma x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi x^2 \frac{dy}{dx}dx = \pi x^2 y'\,dx$$

$$dE_{pot}(V) = (\rho dV)gy = \rho g\pi x^2 yy'\,dx$$

Herefter er opgaven at søge minimum for den potentielle energi:

$$2\pi\gamma\int_{-r}^{r} x\sqrt{1+y'^2}\,dx + \pi\rho g\int_{-r}^{r} x^2 yy'\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(2\gamma x\sqrt{1+y'^2} + \rho g x^2 yy')\,dx$$

Under bibetingelsen

$$\pi\int_{-r}^{r} x^2 y'\,dx = V_0$$

Vi dropper den fælles faktor π, og vores $F(y',y,x)$ er herefter udtrykt med Lagrange multiplikatoren λ.

$$F(y',y,x)=2\gamma x\sqrt{1+y'^2}+\rho g x^2 y y'+\lambda x^2 y'$$

I dette tilfælde afhænger F eksplicit af x, så vi skal anvende den generelle form af Euler – Lagrange ligningerne, som er en 2. ordens differentialligning i y.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Vi udregner først de to partielle afledede.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\rho g x^2 y'$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{2\gamma x y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\rho g x^2 y+\lambda x^2$$

Og dernæst

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=2\gamma\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+x\left(\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y'2y'y''}{2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)+\rho g(2xy+x^2y')+2\lambda x$$

Indsætter man i Eulers-Lagrange ligningerne og efter reduktion finder man.

$$\frac{2\gamma}{\sqrt{1+y'^2}}\left(y'+\frac{xy''}{1+y'^2}\right)+\rho g 2xy+2\lambda x=0$$

Endelig isolerer man y''.

$$y''=-(1+y'^2)\left(\sqrt{1+y'^2}\left(\frac{\rho g}{\gamma}y+\frac{\lambda}{\gamma}\right)+\frac{y'}{x}\right)$$

Umiddelbart er mulighederne for at finde en analytisk løsning til denne differentialligning uhyre ringe, og man er derfor henvist til numeriske løsningsmetoder.

Dette er imidlertid heller ikke problemløst, da formen vil have to lodrette tangenter, og udtrykket er ikke defineret for $x = 0$. Man er derfor henvist til at dele løsningen op i 4 forskellige stykker.

Ønsker vi en løsning med begyndelse i (0,0), må vi fjerne minustegnet i ligningen. Ellers vil løsningen bevæge sig ned i den negative halvplan, men er i øvrigt spejlsymmetrisk.

Det er svært at udtale sig om værdien af λ. Nedenfor er vist løsninger for $\lambda = 50$, $\lambda = 100$ og $\lambda = 500$. Hvor den største dråbe, svarer til $\lambda = 50$.
Umiddelbart er mulighederne for at finde en analytisk løsning til denne differentialligning uhyre ringe, og man er derfor henvist til numeriske løsningsmetoder.

Dette er imidlertid heller ikke problemløst, da formen vil have to lodrette tangenter, og udtrykket er ikke defineret for $x = 0$. Man er derfor henvist til at dele løsningen op i 4 forskellige stykker. Nedenfor er vist et tværsnit af en dråbe, svarende til en bredde på 0,35 mm, 1,5 mm og 2,3 mm. Den største dråbe har en længde på 8 mm.
Forsøger man sig med større dråber, finder man ingen løsning for den øverste del af dråben

Ud fra differentialligningen, kan man godt forstå, hvorfor der er en øvre grænse for størrelsen af dråben. Betegner vi det punkt, hvor snitkurven går fra at være konveks til konkav med (a,b) , så skal $y'' < 0$ for $y > b$. Dette giver uligheden:

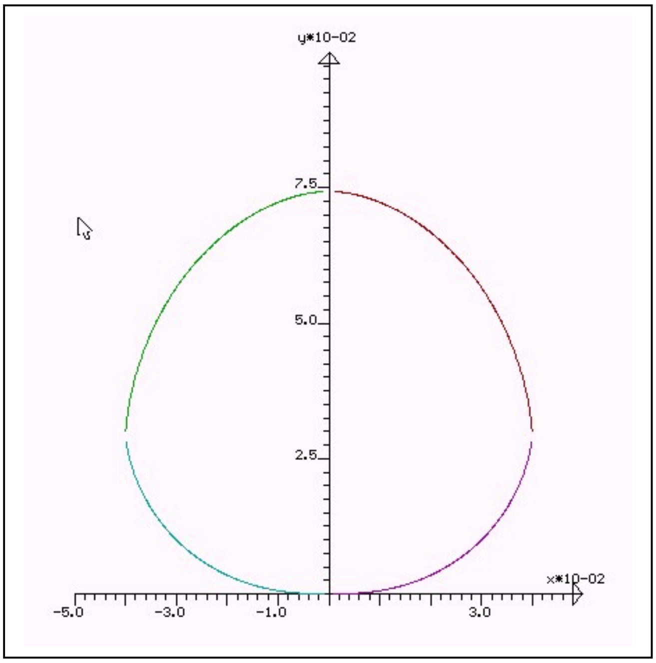
$$\sqrt{1+y'^2}\left(\frac{\rho g}{\gamma}b+\frac{\lambda}{\gamma}\right)+\frac{y'}{a}<0 \quad \Leftrightarrow a\left(\frac{\rho g}{\gamma}b+\frac{\lambda}{\gamma}\right)<-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

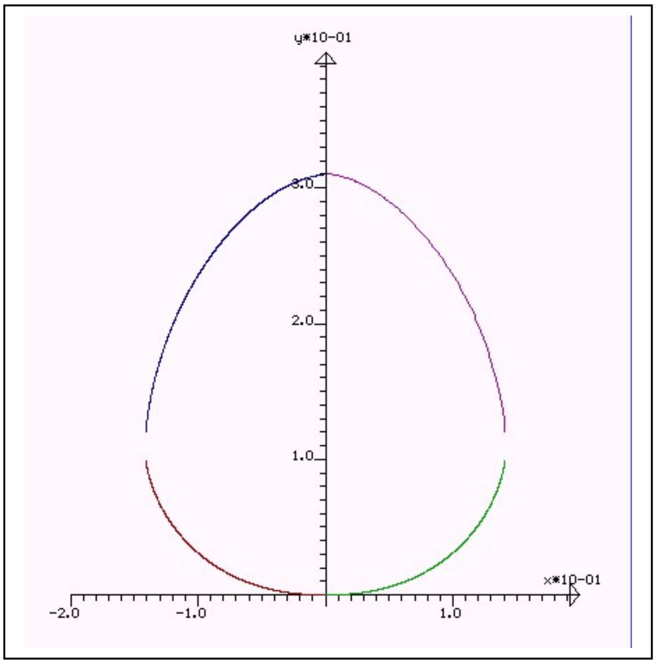
Funktionen $f(y')=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ har værdimængde]-1, 1[så betingelsen, kan skrives derhen, at:

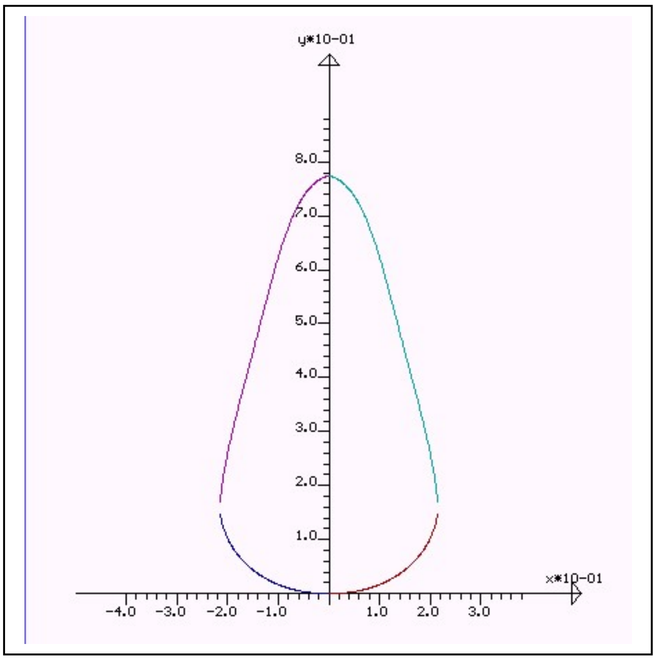
$a\left(\frac{\rho g}{\gamma}b+\frac{\lambda}{\gamma}\right)<1 \;\Leftrightarrow\; \lambda<\frac{\gamma}{a}-\rho g b$ Indsætter man $\gamma = 76$ dyn/cm og $\rho g = 982$ dyn/cm^3, får man

uligheden: $\lambda<\frac{76}{a}-982b$ Skønner vi, at $b = ½a$, så kan vi undersøge, hvornår størrel-

sen $\frac{76}{a}-491a>0$ Finder man at a <0,4 *cm*. Vi skønner altså, at bredden af en dråbe højst kan være omkring 4 mm. Dette er fuldstændig i overensstemmelse med den eksperimentelle undersøgelse af løsningerne til differentialligningen. Skønner vi, at $b = 1/3a$, finder vi en maximal dråbestørrelse på omkring 0,5 cm.






y*10-01
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
x*10-01
-4.0 -3.0 -2.0 -1.0
1.0 2.0 3.0