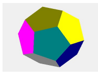
Løsningsformel til Tredjegradsligningen



Ole Witt-Hansen 2018 (1966)

Polynomier af tredje grad

Formålet er at forsøge at finde rødderne i et tredjegradspolynomium:

(1.1) $$P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Hvor koefficienterne er reelle tal og a_3 er forskellig fra 0, mens z godt kan være kompleks.
Vi ved at et tredjegradspolynomium med reelle koefficienter altid har én reel rod, hvilket skyldes, at det er en kontinuert funktion, som både antager positive og negative værdier og derfor også må antage værdien 0

Et tredjegradspolynomium kan have én, to eller tre reelle rødder, men ifølge *algebraens fundamentalsætning*, har det altid netop tre (komplekse) rødder.
Vi skal søge at opstille en generel formel til bestemmelse af de 3 rødder.

Først vil vi foretage en omskrivning, så vi fjerner andengradsleddet, idet vi sætter $z = w + a$.

$$P(w) = a_3(w+a)^3 + a_2(w+a)^2 + a_1(w+a) + a_0$$

(1.2) $$\begin{aligned} P(w) &= a_3(w^3 + 3w^2a + 3wa^2 + a^3) + a_2(w^2 + 2aw + a^2) + a_1(w+a) + a_0 = \\ &= a_3 w^3 + (3aa_3 + a_2)w^2 + (...)w + (...) \end{aligned}$$

Hvis vi vælger $a = -\dfrac{a_2}{3a_3}$, forsvinder 2.gradsleddet, og vi får et tredjegradspolynomium af formen.

(1.3) $$P(w) = a_3(w^3 + pw + q) = a_3 Q(w)$$

Hvor p og q kan udregnes af (1.2). Hvis $Q(w)$ har rødderne w_1, w_2, w_3, kan $Q(w)$ skrives:
$Q(w) = (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)$ og dermed:

$$P(z) = a_3(z - w_1 - a)(z - w_2 - a)(z - w_3 - a)$$

For at bestemme rødderne i et vilkårligt tredjegradspolynomium, kan vi derfor indskrænke os til at betragte polynomier af formen:

(1.4) $$P(z) = z^3 + pz + q$$

Hvor vi antager at p og q begge er forskellige fra nul, da løsningsbestemmelsen ellers er triviel.
Idet vi sætter $z = u + v$, får vi:

(1.5) $$\begin{aligned} P(z) &= (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q \\ P(z) &= u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q \end{aligned}$$

Nu kan vi for ethvert z vælge u og v, således at: $u+v=z \quad \wedge \quad uv=-\frac{p}{3}$, idet disse ligninger blot betyder, at u og v er rødder i andengradsligningen: $x^2-zx-\frac{p}{3}=0$.

For som man husker fra gymnasiet?
(I den ordnede og reducerede andengradsligning er røddernes sum lig med koefficienten til x med modsat fortegn og røddernes produkt er lig med ligningens sidste led).

For dette valg af u og v, finder vi:

(1.6) $$P(z)=u^3+v^3+q$$

Og betingelsen for at $z=u+v$ er rod, er derfor $u^3+v^3=-q$.

To tal, som opfylder betingelserne: $u^3+v^3=-q$ og $uv=-\frac{p}{3}$ er ensbetydende med at de opfylder betingelsen:

(1.7) $$u^3+v^3=-q \quad \text{og} \quad u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

Ifølge sætningen om røddernes sum og produkt i en andengradsligning, betyder det så, at u^3 *og* v^3 er rødder i andengradsligningen.

(1.8) $$x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0 \iff x=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

Hvis $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, skal de to løsninger erstattes af:

(1.9) $$x=-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$$

Vi vil dog fortsætte med at skrive løsningerne som om $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geq 0$, men med ovenstående betydning af løsningerne, hvis $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$.
Vi fortsætter, da med at uddrage den tredje rod, som om det handler om reelle tal.

(1.10) $$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

og dermed finder vi en (eventuelt kompleks) løsning: $z=u+v$

(1.11) $$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

For at bestemme de øvrige komplekse rødder, minder vi om løsningen af den binome ligning:

(1.12) $$z^n = a$$

Hvor $z = |z|(\cos x + i \sin x)$ og $a = |a|(\cos v + i \sin v)$

(1.13) $$z^n = a \iff |z|^n (\cos nx + i \sin nx) = |a|(\cos v + i \sin v)$$

Hvis retningsvinklerne for a er: $v + p2\pi, \quad p = 0, 1, 2...$ Giver dette umiddelbart:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \text{ og } nx = v, v+2\pi, v+4\pi, v+(n-1)2\pi \quad \iff$$

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \text{ og } x = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}, \quad p = 0,1,2...,(n-1)$$

Så den fuldstændige løsning er

(1.14) $$|z| = \sqrt[n]{|a|}(\cos(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n})), \; p = 0,1,2...,(n-1)$$

For ligningen $z^3 = a$, hvor a er et reelt tal finder vi derfor:

(1.15) $$z = \sqrt[3]{a}, \; z = \sqrt[3]{a}(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}), \; z = (\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})$$

eller

$$z = \sqrt[3]{a}, \quad z = \sqrt[3]{a}(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}), \quad z = \sqrt[3]{a}(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Det ses, at $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, så vi sætter $\alpha = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ og $\alpha^2 = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$
De tre rødder i den binome tredjegradsligning er da, idet $\alpha^3 = 1$:

(1.16) $$z = \sqrt[3]{a}, \; z = \alpha \cdot \sqrt[3]{a}, \; z = \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{a}$$

Vender vi tilbage til ligningen: $x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, som er ensbetydende med de to binome ligninger:

(1.17) $$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{og} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Hvis begge højresider er reelle, finder man ifølge ovenstående løsningerne:

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \;\vee\; u_1 = \alpha \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \;\vee\; u_2 = \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(1.18) $$v_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ \vee\ v_1=\alpha\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ \vee\ v_2=\alpha^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Umiddelbart kunne man tro, at der er 6 løsninger til ligningen $z = u + v$, men vi erindrer om, at der også skal gælde: $uv=-\frac{p}{3}$. At det gælder for u_0v_0 ses af:

(1.19) $$u_0v_0=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)=$$
$$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}=\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3}$$

En udregning viser, at de eneste tre løsninger, der opfylder kravet $uv=-\frac{p}{3}$ er:

(1.20) $$u_0+v_0\ ,\alpha u_0+\alpha^2v_0\ \ og\ \ \alpha^2u_0+\alpha v_0 \quad \text{hvor } \alpha=(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Hvilket følger af, at $\alpha^2=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\ \ og\ \ \alpha^3=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.

Løsningerne til ligningen:

$$z^3+pz+q=0$$

Er således givet ved:

(1.21) $$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\vee$$
$$z=\alpha\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\alpha^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\vee$$
$$z=\alpha^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\alpha\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Da enhver tredjegradsligning: $a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ kan omskrives til ligningen $z^3+pz+q=0$ ved substitutionen $z\to z+a$ med $a=-\dfrac{a_2}{3a_3}$, har vi hermed vist, at enhver tredjegradsligning har løsningerne som angivet ovenfor.

Bemærk, at vi har anvendt kvadratrodstegnet på en måde, som hvis det drejede sig om kvadratroden af positive tal, men det behøver ikke at være tilfældet, og det vil vi se på nu.

De tre tilfælde:

1) $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$:

Der må gælde $p<0$: Som u_0 og v_0 kan vi derfor anvende den reelle værdi af $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, og vi finder da ifølge den ovenstående løsningsformel enkeltroden:

(1.22) $z_1=u_0+v_0=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, samt dobbeltroden: $z_2=z_3=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

2) $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$.

Tallene $-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ er da reelle, og vi kan derfor anvende de reelle kubikrødder, som u_0 og v_0. Vi finder da den ene reelle rod $z_1=u_0+v_0$ og de to konjugeret komplekse rødder:

$$\left.\begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix} \alpha u_0+\alpha^2 v_0 \\ \alpha^2 u_0+\alpha v_0 \end{matrix}\right\}=-\frac{u_0+v_0}{2}\pm i\sqrt{3}\,\frac{u_0-v_0}{2} \tag{1.23}$$

3) $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$.

Der må gælde at $p<0$. For u og v gælder:

$$\left.\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right\}=-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\,.$$

Det ses, at de to rødder er kompleks konjugerede, og at de derfor har samme modulus :

$$\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^2}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\,. \tag{1.24}$$

vi får derefter løsningerne til u og v, idet vi bemærker, at

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}=|u|=|v|\,.$$

Sætter vi:

$$-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),\qquad hvor\qquad \cos\varphi=\frac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}}$$

Er de brugbare løsninger til ligningerne:

(1.25)
$$\left.\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right\} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

Lig med:

(1.26)
$$\left.\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\cos\tfrac{\varphi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi}{3})$$
$$\left.\begin{matrix} \alpha u_0 \\ \alpha^2 v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi+2\pi}{3})$$
$$\left.\begin{matrix} \alpha^2 u_0 \\ \alpha v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\cos\tfrac{\varphi+4\pi}{3} \pm i\sin\tfrac{\varphi+4\pi}{3})$$

Og vi finder i dette tilfælde de 3 *reelle* rødder:

(1.27)
$$z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\ ,\quad z_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}\ ,\quad z_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

Bestemmelse løsningerne i et konkret eksempel, f.eks. $z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = 0$, som ses at have de reelle rødder {-2,1, 3} er sjældent muligt analytisk, mest på grund af faktoren $\cos\frac{\varphi}{3}$.

For at udtrykke $\cos\frac{\varphi}{3}$ ved $\cos\varphi$ skal man nemlig løse en 3.gradsligning i $\cos\frac{\varphi}{3}$.

For ligningen: $z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = 0$ finder man i øvrigt:

$$p = 3(\tfrac{2}{3})^2 - 4(\tfrac{2}{3}) - 5 = \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{3} - 5 = -\tfrac{19}{3}$$
$$q = (\tfrac{2}{3})^3 - 2(\tfrac{2}{3})^2 - 5(\tfrac{2}{3}) + 6 = \tfrac{8}{27} - \tfrac{8}{9} - \tfrac{10}{3} + 6 = \tfrac{8-24-90}{27} + 6 = \tfrac{-106}{27} + 6 = \tfrac{56}{27}$$
$$\cos\varphi = \frac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}} = \frac{-\frac{56}{54}}{\sqrt{\dfrac{(\frac{19}{3})^3}{27}}}\ .$$

Der synes derfor kun en vej til løsningerne, nemlig at bestemme rødderne ved numeriske regninger.

Henvisning: Børge Jessen. Forelæsninger over komplekse tal. Mat 2. 1965 -1966. Håndskrevne noter.