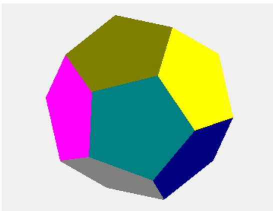
Taylors Formel
og
Rækkeudviklinger



Køge Gymnasium 2003 Ole Witt-Hansen

Indhold

1. Taylors formel

For at udlede Taylors formel skal vi anvende nogle resultater fra analysen. Først definition af differentialet af en funktion $y = f(x)$

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

Formlen for delvis integration

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

eller opskrevet med differentialer.

$$\int f(x)dg(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)df(x)$$

For enhver vilkårlig ofte differentiabel funktion defineret i et interval [a,b] er Taylors formel nu:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(b-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}dx$$

Formlen kan bevises ved successivt at anvende delvis integration på funktionen $f'(x)$, (suppleret med et par enkle trick). Ifølge definitionen på bestemt integral og stamfunktion, gælder der.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

Vi omskriver nu integralet en lille smule, så vi integrere med hensyn til variablen *b-x*.

$$f(b) - f(a) = -\int_a^b f'(x)d(b-x)$$

Dette gøres for at få bidraget fra den øvre grænse til at forsvinde, når vi laver delvis integration

$$f(b) - f(a) = -\int_a^b f'(x)d(b-x) = -\left(\left[f'(x)(b-x)\right]_a^b - \int_a^b (b-x)df'(x)\right) = f'(a)\cdot(b-a) + \int_a^b (b-x)f''(x)dx$$

Bemærk, at bidraget fra øvre grænse forsvinder. Det sidste integral omskriver vi på følgende måde

$$\int_a^b (b-x)f''(x)dx = -\int_a^b f''(x)d\frac{(b-x)^2}{2!}$$

Vi anvender dernæst delvis integration på dette integral. Regningerne forløber helt på samme måde som ovenfor. Vi nøjes derfor med at skrive resultatet.

$$-\int_a^b f''(x)d\frac{(b-x)^2}{2!} = f''(a)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} - \int_a^b f^{(3)}(x)d\frac{(b-x)^3}{3!}$$

Generelt kan man på helt samme måde vise:

$$-\int_a^b f^n(x)d\frac{(b-x)^n}{n!} = f^{(n)}(a)\cdot\frac{(b-a)^n}{n!} - \int_a^b f^{(n+1)}(x)d\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ved at fortsætte med at integrere delvis n gange opnår man Taylors formel.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(b-a)^3}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}dx$$

Ofte ser man Taylors formel anvendt med b = x og a = 0. For at undgå misforståelser, erstatter man da den uafhængige variabel x med t i det sidste integral. Dette giver formlen.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}t^n dt$$

Taylors formel betegnes også som en *Taylor udvikling* af funktionen $f(x)$ ud fra x = 0. Det sidste integral betegnes *restleddet.*
Formlen anvendes især, hvis man lader $n \to \infty$ og restleddet går imod 0.
I dette tilfælde får man en *rækkeudvikling* for funktionen, som betegnes McLaurin-rækken.

Hvis restleddet går imod 0 følger det nemlig af formlen at den uendelige række er *konvergent,* hvilket betyder at summen af de n led har en grænseværdi for $n \to \infty$.

Ved vurderingen af restleddet, vil vi gøre nogle rimelige antagelser.
Vi antager at $f^{(n)}(x)$ er begrænset i intervallet [a, b] for alle n, så der findes et tal M, så $|f^{(n)}(x)| < M$ i intervallet [a, b] for alle n. Restleddet vurderes da på følgende måde:

$$\int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}t^n dt \le \int_0^x \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}\left|t^n\right|dt \le M\cdot\int_0^x \frac{\left|t^n\right|}{n!}dt \le M\cdot\frac{\left|x^{n+1}\right|}{n!} = M\cdot|x|\frac{|x|\cdot|x|\cdots|x|\cdot|x|}{1\cdot 2\cdots(n-1)n}\cdot$$

I det sidste udtryk vil $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$ for et vist $n = k$. Sætter vi de faktorer, der står til venstre for dette k lig med K, får vi vurderingen:

$$M\cdot|x|\frac{|x|\cdot|x|\cdots|x|\cdot|x|}{1\cdot 2\cdots n} = K\cdot\left|\frac{x}{k}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|$$

I dette produkt er enhver af faktorerne $\left|\frac{x}{p}\right| < 1$, hvor p= k, k+1, …n+1. Produktet af dem vil derfor gå imod 0 for $n \to \infty$, idet produktet er mindre end den sidste faktor, som går imod 0 for $n \to \infty$.

Resultatet af disse overvejelser er således, at når blot $f^{(n)}(x)$ er begrænset i intervallet [a, b] for alle n, så vil McLaurin-rækken for $f(x)$ konvergere.

Før vi ser på Maclaurin-rækken for forskellige kendte funktioner, vil vi vise endnu en variant af Taylors formel, hvor vi rækkeudvikler $f(x_0 + h)$ ud fra x_0. vi sætter således $a = x_0$ og $b = x_0 + h$, og dermed $b - a = h$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t)}{n!}t^n\,dt$$

For restleddet har vi vurderingen:

$$\left| \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t)}{n!}t^n\,dt \right| \le M\,\frac{h^n}{n!}h = M\,\frac{h^{n+1}}{n!}$$

Ofte anvender man de første led, som en approksimation til $f(x_0 + h)$, når h er lille. Specielt, hvis man kun medtager de to første led i rækken får man formlen.

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \quad \text{, når } h \text{ er lille i forhold til } x_0$$

Denne formel betegnes det approksimerende 1. grads polynomium og er kendt fra gymnasieundervisningen.

Hvis $-1 < h < 1$ er et lille tal, f.eks. $h = 0{,}01$, så betragtes $h^2 = 0{,}0001$ som forsvindende lille i forhold til h, og man bortkaster da led af "størrelsesorden" h^2. Dette følger af at leddene vil forsvinde ved division med h og grænseovergang $h \to 0$.
Tilsvarende med h^2 og h^3 . Anvender man derfor formlen som n'te ordens approksimationsformel for en funktion, så er det vigtigt at vide, at restleddet er af størrelsesorden h^{n+1}, og derfor forsvindende når h er lille.

2. Rækkeudviklinger for e^x

Nedenfor er vist rækkeudviklingerne for funktionerne e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ og $(1+x)^\alpha$.

$f(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$, så $f^{(n)}(x)$ er begrænset i ethvert begrænset interval. Endvidere er $f^{(n)}(0)=1$. Restleddet vil gå imod 0 for $n \to \propto$ for alle x. Mclaurin-rækken bliver.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Eller skrevet med summationstegn

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3. Rækkeudviklinger for *sin x* og *cos x*

For sinus og cosinus gælder det, at $|f^{(n)}(x)| < 1$ for alle x, så rækkerne vil konvergere.
Endvidere er for *cos x*:

f(0)= cos(0)=1, f'(0) = -sin(0) = 0, f''(0) = -cos(0) = -1, $f^{(3)}(0)$ = sin(0) = 0, $f^{(4)}(0)$ = cos(0) = 1 , og sådan fremdeles.

For sin *x* gælder tilsvarende:

f(0)= sin(0) = 0, f'(0) = cos(0) = 1, f''(0) = -sin 0 = 0 , $f^{(3)}(0)$ = -cos 0 = -1, $f^{(4)}(0)$ = sin(0) = 0, og sådan fremdeles.

Dette fører til de to rækkeudviklinger:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4. Rækkeudviklinger for *ln x*

Vi vil herefter rækkeudvikle $f(x) = ln(1+x)$ ud fra $x = 0$. Vi finder:

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3\frac{1}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -2\cdot 3$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\frac{1}{(1+x)^n} \qquad \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Vi vil vise, at Mclaurin rækken for ln(1+x) er konvergent for $|x| < 1$.
Vurderingen af restleddet er kun lidt mere kompliceret end i de foregående tilfælde:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} t^n dt \le \left| \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1} n!} t^n dt \right| \le \int_0^x \frac{|t|^n}{|1+t|^{n+1}} dt$$

Bestemmer vi nu $k = min(|1+t|)$, hvor $t \in [0, x]$, får vi vurderingen:

$$R_n(x) \le \int_0^x \frac{|t|^n}{|1+t|^{n+1}} dt \le \frac{1}{k^{n+1}} \int_0^x |t|^n \ dt = \frac{1}{k^{n+1}} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Som det ses, vil det sidste udtryk gå imod 0 for $n \to \infty$, når $-1 < x \le 1$, hvilket skulle vises.
Vi finder derfor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{5} + ...$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Rækken

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Kaldes for den harmoniske række.
Den er ikke konvergent, dvs. den har ikke en grænseværdi for $n \to \infty$.
Den går mod uendelig. (Dette kan indses, idet den harmoniske række er en over sum for $f(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet [1,n] og følgelig er større end ln(n).
Den alternerende harmoniske række, finder man ved at sætte $x = 1$ i rækkeudviklingen for ln(x), heraf ses:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ...$$

5. Rækkeudviklinger for $(1+x)^{\alpha}$

Vi ser dernæst på rækkeudviklingen for $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, hvor $x > -1$ og α er et reelt tal forskelligt fra 0. Der gælder at,

$$f(0) = 1$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f'(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

Vi indfører nu symbolet

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \quad \text{for } n > 0 \quad \text{og hvor} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

På næsten samme måde, som det var tilfældet med rækkeudviklingen for ln(1+x), kan man vise, at restleddet går imod nul, når $|x| < 1$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{2}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

6. Rækkeudviklinger for *sin*$^{-1}$*x* og *tan*$^{-1}$*x*

Denne række er i sig selv ikke så interessant, men erstatter man x med henholdsvis x^2 eller - x^2 og sætter $\alpha = -1$ *eller* $\alpha = -\frac{1}{2}$, finder man differentialkvotienterne af *tan*$^{-1}$(x) og *sin*$^{-1}$(x).
Der gælder mere præcist:

$$\sin^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad \text{for } |x| < 1$$

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Anvender man udtrykket for $(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{2}x^3 +$

Med $x = -t^2$ og $\alpha = -½$, får man: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 +$, og således:

$$\sin^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \int_0^x (1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{8}t^4 + \ldots)dt = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots$$

Som giver

$$\sin^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots \qquad \text{for } |x| < 1$$

Med $x = t^2$ og $\alpha = -1$, får man: $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 +$, og således:

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + \ldots)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Som giver

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad \text{for } |x| < 1$$

Disse to rækker kan blandt andet anvendes til at beregne π , idet der gælder $\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ og $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{6} = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + ... \quad \text{og} \quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ...$$

Den sidste række konvergerer dog alt for langsom til praktisk beregning af π