Antal terninger i en kvadratisk pyramide.

Antal kugler i en tresidet pyramide

Ole Witt-Hansen Januar 2017

1. Antallet af terninger i en kvadratisk pyramide

En matematiklærer i folkeskolen henvendte sig til mig, fordi eleverne i en 9. klasse havde fået den opgave at finde antallet af centicubes (dvs. $(1\ cm)^3$ terninger), der er i en pyramide, hvor der øverst er 1, dernæst 3^2, så 5^2, osv. Altså at bestemme en formel for summen af kvadraterne på de ulige tal:

$$1^2 + 3^2 + ... + (2n+1)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dette er naturligvis helt udelukket for elever i folkeskolen (med mindre, at de blot skulle finde en formel på nettet), og lærerne kunne naturligvis heller ikke løse problemet, fordi en formel for potenssummer er universitetsmatematik.

Jeg var selv lidt i tvivl. På min hjemmeside Matematik: Artikler til LMFK-bladet findes ganske vidst en rekursionsformel for potenssummerne:

$$S_q(n) = 1^q + 2^q + ... + n^q$$

Anvendt på summen af kvadrattal giver det resultatet:

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Heraf får man

$S_2(1) = 1,\ S_2(2) = 5,\ S_2(3) = 14,\ S_2(4) = 30,\ S_2(5) = 55,\ S_2(6) = 91,\ S_2(7) = 140,$
$S_2(8) = 204, S_2(9) = 285$

Men hvis man kun ønsker en formel for kvadratet på de ulige U tal:

$$U_2(2n+1) = 1^2 + 3^2 + ... + (2n+1)^2,$$

så kan man gå systematik frem på og reducere lidt på udtrykkene:

$n = 1$: $U_2(3) = S_2(3) - 2^2 = S_2(3) - 2^2(1) = S_2(3) - 2^2 S_2(1)$
$n = 2$: $U_2(5) = S_2(5) - (2^2 + 4^2) = S_2(5) - 2^2(1^2 + 2^2) = S_2(5) - 2^2 S_2(2)$
$n = 3$: $U_2(7) = S_2(7) - 2^2 - 4^2 - 6^2 = S_2(7) - 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2) = S_2(7) - 2^2 S_2(3)$

Hvilket ses at føre frem til den generelle formel

$$\begin{aligned} U_2(2n+1) &= S_2(2n+1) - 2^2 S_2(n) \\ &= \tfrac{1}{6}((2n+1)(2n+2)(4n+3) - 4n(n+1)(2n+1)) \\ &= \tfrac{1}{6}((2n+1)(n+1)(2(4n+3) - 4n)) \\ &= \tfrac{1}{6}((2n+1)(n+1)(4n+6)) \\ &= \tfrac{1}{3}(2n+1)(n+1)(2n+3) \end{aligned}$$

Vi udregner summerne for n = 1, 2, 3, 5

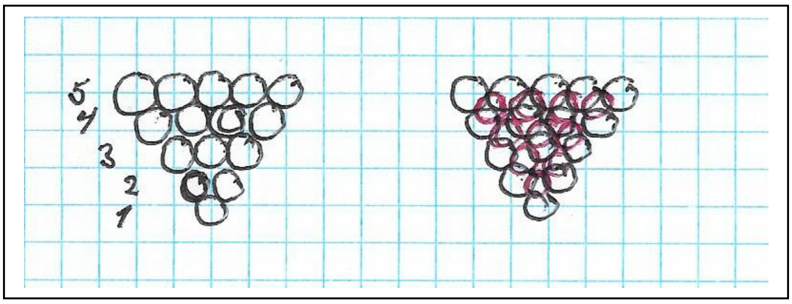
$$n=1:\ U_2(3)=S_2(3)-2^2S_2(1)=14-4=10$$
$$n=2:\ U_2(5)=S_2(5)-2^2S_2(2)=55-4\cdot 5=35$$
$$n=3:\ U_2(7)=S_2(7)-2^2S_2(3)=140-4\cdot 14=84$$
$$n=4:\ U_2(9)=S_2(9)-2^2S_2(4)=285-4\cdot 30=165$$

2. Antal kugler i en tresidet pyramide

Nedenfor er vist kugler/kegler samlet i en trekant. Det ses, at antallet i rækkerne er 1, 2, 3, 4,…, Så antallet i en trekant med n i den sidste række er:

$$S_n=1+2+3+...(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Dette ifølge formlen for en differensrække: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$, hvor n er antallet af led, og a_1 og a_n er første og sidste led. Anvendes formlen for n =5 finder man 15, som det ses at passe.



Bygger man en pyramide (af fx appelsiner), vil man få en række lag. Hvis det nederste lag har n kugler ved grundlinien af trekanten, så vil det næste have n-1 kugler ved grundlinien, og derfor:

$$S_{n-1}=1+2+3+...(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

En tresidet pyramide slutter med 1 kugle øverst, så vi skal altså finde en formel for

$$\begin{aligned}S_{pyramide}&=S_n+S_{n-1}+S_{n-2}+...+S_1\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+...\frac{(1)(2)}{2}=\\&=\frac{1}{2}(n(n+1)+n(n-1)+(n-1)(n-2)+...+2)\end{aligned}$$

Det ser lidt uoverskueligt ud, men vi laver omskrivningen: $n(n+1)=n^2+n$

$$S_{pyramide} = \frac{1}{2}(n(n+1) + n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2)$$
$$S_{pyramide} = \tfrac{1}{2}((n^2+n) + ((n-1)^2 + n - 1) + ((n-2)^2 + n - 2) + \ldots + (1+1))$$

Og her bliver vi nødt til at anvende summationstegn:

$$2S_{pyramide} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

Den første sum er summen af kvadrattallene fra 1 til n +1. Formlen for dette er anført ovenfor

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Og den sidste sum er antallet af hele tal fra 1 til n

$$S_{pyramide} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \tfrac{1}{2}n(n+1))$$
$$= \tfrac{1}{12}(n(n+1)(2n+1+3)$$

$$S_{pyramide} = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$