Ligning for en storcirkel.
Korteste vej på en kugle

Ole Witt-Hansen 2019

Indhold

1. Kurve på et fladestykke

Lad der være givet et kontinuert og differentiabel fladestykke $z = f(x, y)$.
Lad os antage at $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ er en parameterkurve på fladen, og som derfor opfylder $z(t) = f(x(t), y(t))$. Vi stiller os den opgave, at bestemme den korteste vej mellem to punkter på fladen.
Problemet er løst generelt i differentialgeometrien under anvendelse af den metriske fundamentalform og covariant differentiation, men her vil vi forsøge os med en mere direkte vej.

Problemet er et klassisk variationsproblem: Find minimum for:

(1.1) $$I(y) = \int_a^b F(y', y, x)dx$$

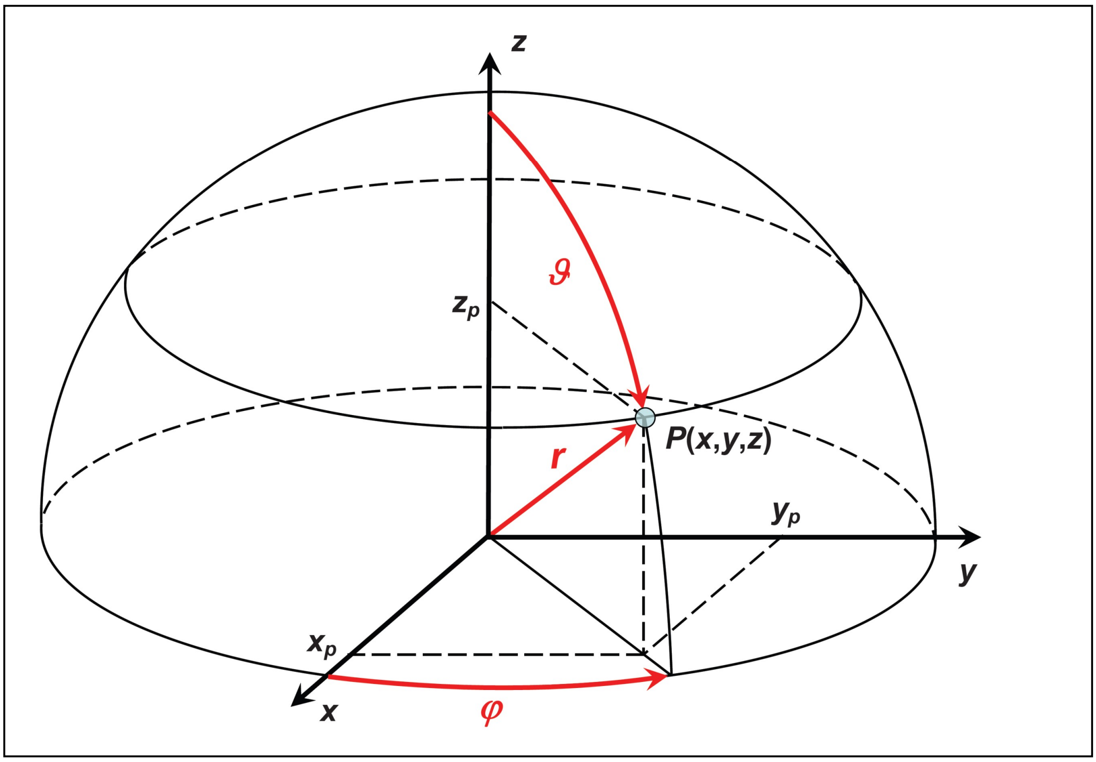
Løsningen til dette er Euler-Lagrange differentialligninger:

(1.2) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Hvis ikke *F* afhænger eksplicit af *x*, kan denne ligning reduceres til:

(1.3) $$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = Const$$

Nogle problemer er givet ved en bibetingelse $g(x,y) = k$, (fx største volumen for en given overflade). Her gælder det så, at $f(x,y)$ har ekstremum i et punkt, under bibetingelsen $g(x,y) = k$, hvis og kun hvis funktionen $f(x,y) + \lambda g(x,y)$ har ekstremum i punktet, hvor konstanten λ er bestemt ud fra problemets randbetingelser.



En storcirkel er en cirkel, hvis plan går gennem kuglens centrum. Det er almindelig kendt, at den korteste vej mellem to punkter på en kugle er en storcirkel.
Vi vil derfor forsøge at vise dette analytisk ved at anvende Lagranges ligninger.
Hvis vi anvender polære koordinater er betingelsen $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ automatisk opfyldt, så vi undgår en bibetingelse.
Betydningen af de polære koordinater kan ses af figuren ovenfor.
Koordinatsættet for et punkt på en kugle med radius *r* er i polære koordinater givet ved:

(2.1) $$\vec{r} = (r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\sin\theta,\, r\cos\theta)$$

Den infinitesimale forskydning *ds* på kuglen er i polære koordinater givet ved:

(2.2) $$ds^2 = r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Betragter vi en parameter kurve på kuglen $\vec{r} = \vec{r}(t)$, og betegner vi som sædvanlig differentiation med hensyn til *t*, med en prik over variablen får vi:

(2.3) $$\dot{s}^2 = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 .$$

For at bestemme den korteste vej mellem to punkter på kuglen, skal vi derfor bestemme minimum for funktionalen:

(2.4) $$I = \int ds = \int_0^t \dot{s}dt = \int_0^t F dt = \int_0^t \sqrt{r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2}\, dt$$

For at lette regningerne, sætter vi *r* =1, og bestemmer ekstremum for $\int_0^t \sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}\, dt$

Euler-Lagrange ligningen: $y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = Const$, bliver da til de to ligninger:

$$\dot{\theta}\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}} - F = c_1 \qquad\qquad \dot{\varphi}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}} - F = c_2$$

(2.5) $$\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}} \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\sin^2\theta\dot{\varphi}}{\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}},$$

Så de to ligninger bliver:

(2.6) $$\frac{\dot{\theta}^2}{\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}} - \sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2} = c_1$$
$$\frac{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}} - \sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2} = c_2$$

Ganger vi igennem med kvadratroden i begge ligninger får vi:

(2.7) $$\dot{\theta}^2 - (\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) = c_1\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}$$

(2.8) $$\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - (\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) = c_2\sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}$$

Idet $\dot{s} = \sqrt{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}$, når radius = 1, kan vi omskrive de to ligninger:

(2.9) $$\begin{aligned}&\dot{\theta}^2 - \dot{s}^2 = c_1\dot{s}\\ &\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - \dot{s}^2 = c_2\dot{s}\end{aligned}$$

Det bemærkelsesværdige er nu, at hvis vi adderer de to ligninger kan vi eliminere de to angulære parameter.

$$\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{s}^2 = (c_1 + c_2)\dot{s} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{s}^2 - 2\dot{s}^2 = (c_1 + c_2)\dot{s}$$

Som reduceres til

$$-\dot{s}^2 = (c_1 + c_2)\dot{s}$$

og som umiddelbart kan løses til

(2.10) $$\dot{s}(\dot{s} + (c_1 + c_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{s} = 0 \quad \vee \quad \dot{s} = -(c_1 + c_2) = c$$

Altså en meget simpel ligning, som udtrykker at:

(2.11) $$s = ct$$

Vi vender da tilbage til de to ligninger, og indsætter det fundne udtryk for *s*.

(2.12) $$\dot{\theta}^2 - \dot{s}^2 = c_1\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 - c^2 = c_1 c \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \pm c_\theta \quad \Rightarrow$$
$$\theta = \pm c_\theta t + \theta_0$$

Og på samme måde for den anden ligning

$$\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - \dot{s}^2 = c_2\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = c^2 + c_2 c \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \pm\frac{c_\varphi}{\sin\theta}$$

(2.13) $$\dot{\varphi} = \pm\frac{c_\varphi}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \pm\frac{c_\varphi}{\sin(c_\theta t + \theta_0)}$$

Vi skal derfor udregne et integral

$$\int\frac{1}{\sin x}dx = \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$
$$\tfrac{1}{2}\int(\cot\tfrac{x}{2} + \tan\tfrac{x}{2})dx = \ln(|\sin\tfrac{x}{2}|) - \ln(|\cos\tfrac{x}{2}|) = \ln(|\tan\tfrac{x}{2}|) + x_0$$

Dette anvender vi så i det oprindelige integral, idet vi anvender substitutionen $x = c_\theta t + \theta_0$

$$\varphi = \pm\int \frac{c_\varphi}{\sin(c_\theta t + \theta_0)} dt = \pm\frac{c_\varphi}{c_\theta}\int \frac{1}{\sin x} dx = \pm\frac{c_\varphi}{c_\theta}\ln(|\tan\frac{c_\theta t + \theta_0}{2}|) + \varphi_0$$

Parameterfremstillingen for storcirklen bliver derfor:

(2.14) $\theta = \pm c_\theta t + \theta_0$ og $\varphi = \pm\frac{c_\varphi}{c_\theta}\ln(|\tan\frac{c_\theta t + \theta_0}{2}|) + \varphi_0$

Hvad vi mangler er egentlig "kun" at bestemme de indgående konstanter.

Vi kan uden indskrænkning sætte $c_\theta = 1$. Hvis storcirklen går gennem (1, 0, 0), og hvis $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$,

finder vi: $\varphi = \pm c_\varphi \ln(|\tan\frac{\pi}{4}|) + \varphi_0 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \varphi_0$, men φ_0 i øvrigt vælges vilkårligt. Hvis kurven begynder i (1,0,0), vælger vi $\varphi_0 = 0$. Konstanten c_φ må da bestemmes af ligningen:

$$\dot{\varphi} = \pm\tfrac{1}{2}\frac{c_\varphi}{\sin(c_\theta t + \theta_0)},$$

for $t = 0$, og $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ finder vi $\dot{\varphi}_0 = c_\varphi$.
Da begge vinkler gennemløber storcirkelbuer, men θ gennemløber intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
når φ gennemløber intervallet $[0, 2\pi]$, sætter vi $\dot{\varphi}_0 = 2\dot{\theta}_0 = 2c_\theta = c_\varphi \quad\Rightarrow\quad c_\varphi = 2$.

Vi finder da parameterfremstillingen :

(2.15) $\theta = \pm t + \theta_0 \qquad \varphi = \pm 2\ln(|\tan\frac{t + \theta_0}{2}|)$

Et punkt på cirklen har da parameterfremstillingen

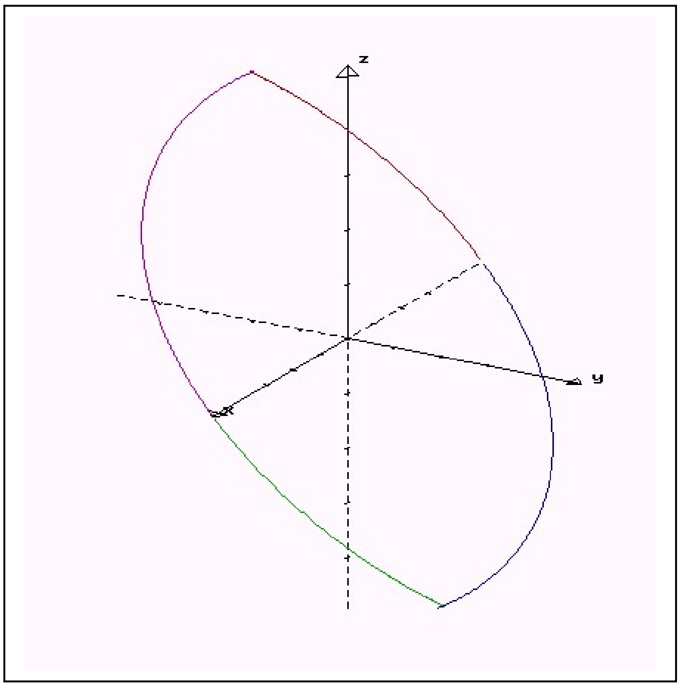
(2.16)
$$(x, y, z) = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$
$$(x, y, z) = r(\sin(t + \theta_0)\cos(\ln(2|\tan\frac{t + \theta_0}{2}|)), \sin(t + \theta_0)\sin(\pm\ln(|2\tan\frac{t + \theta_0}{2}|)), \cos(t + \theta_0))$$

Antager vi, at vi har en storcirkelplan, som danner en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ med z-aksen, så vil θ gennemløbes intervallet $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, mens φ vil gennemløbe intervallet $[0, 2\pi]$
Det kan være praktisk at indføre en ny parameter $t + \theta_0 \to t$, og parameterfremstillingen bliver da:

$$(x, y, z) = r(\sin(\pm t)\cos(\ln(|2\tan\frac{t}{2}|)), \sin(\pm t)\sin(\ln(|2\tan\frac{t}{2}|)), \cos(t))$$

Når $\theta = t + \theta_0 = t + \frac{\pi}{2} = t_1$, gennemløber intervallet $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, så vil den nye parameter gennemløbe samme interval.

Vi skal da forsøge os med en grafisk 3D fremstilling af banekurven, hvor vi inddeler kurven i 4 intervaller
At afgøre hvilke parameterintervaller, der vil svare til cirklen i de 4 kvadranter er ikke så simpelt.
To af parameterkurverne ses tydeligt at
To af parameterkurverne ser ud til at have en større radius, selv om de forbinder de andre kurver korrekt. Jeg ingen rigtig forklaring på dette, idet kurverne er tegnet ud fra samme parameterfremstilling, bortset fra et fortegnsskifte i to af intervallerne. De er tegnet ud fra samme parameterfremstilling.



3. Geometrisk udledning af en ligning for en vilkårlig storcirkel

Alle storcirkler på en kugle krydser ækvator i to punkter, og vælger vi koordinatsystemet, så det ene skæringspunkt er $(r,0,0)$, eller $(1,0,0)$ hvis vi vælger $r = 1$. Den plan, som storcirklen udspænder, og som går gennem $\vec{r}_0 = (1,0,0)$ og $\vec{r} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$ har en normalvektor som er: $\vec{n} = \vec{r}_0 \times \vec{r}$.

(3.1) $$\vec{n} = \vec{r}_0 \times \vec{r} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\varphi_0 \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta_0 & \cos\varphi_0 \sin\theta_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\varphi_0 \sin\theta_0 & \sin\varphi_0 \sin\theta_0 \end{vmatrix} \right)$$

(3.2) $$\vec{n} = (0, -\cos\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0)$$

Det ses umiddelbart, at $\vec{n} \perp \vec{r}_0 \quad \wedge \quad \vec{n} \perp \vec{r}$, som det skulle være tilfældet.
Hvis $\vec{n} = (a,b,c)$ og (x_0, y_0, z_0) er et fast punkt i planen, så er en ligning for planen:

(3.3) $$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Alle storcirkelplaner går gennem (0,0,0), og ligningen for en plan, som går gennem (0,0,0) og med normalvektoren: $\vec{n}=(0,-\cos\theta_0,\sin\varphi_0\sin\theta_0)$ og $\vec{r}=(x,y,z)=(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$, har derfor ligningen:

(3.4) $$-\cos\theta_0\sin\varphi\sin\theta+\sin\varphi_0\sin\theta_0\cos\theta=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin\varphi_0\sin\theta_0}{\cos\theta_0\tan\theta}=\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0\tan\theta}\sin\varphi_0=\frac{\tan\theta_0}{\tan\theta}\sin\varphi_0$$

(3.5) $$\sin\varphi=\frac{\tan\theta_0}{\tan\theta}\sin\varphi_0$$

Som kan betragtes som en ligning for cirklen.

Sætter vi $c=\tan\theta_0\sin\varphi_0$ og erstatter θ med *t*, bliver ligningen:

(3.5) $$\sin\varphi=\frac{c}{\tan t}$$

Hvoraf følger:

$$\cos\varphi=\pm\sqrt{1-(\frac{c}{\tan t})^2}$$

Vælger vi f.eks. $\theta_0=\frac{\pi}{4}$ og $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ (Der er ingen begrænsning på valget af φ_0) så bliver ligningerne simple:

(3.7) $$\sin\varphi=\frac{\tan\theta_0}{\tan\theta}\sin\varphi_0=\frac{1}{2\tan\theta} \qquad \cos\varphi=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4\tan^2\theta}}$$

Med disse valg er betingelsen for at disse ligninger har løsninger:

$$|\frac{1}{2\tan\theta}|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |\tan\theta|>\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tan^2\theta>\tfrac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\theta>\tfrac{1}{2} \;\vee\; \tan\theta<-\tfrac{1}{2}$$

Som har løsningerne:

(3.6) $$0.4636+p\pi<\theta<\tfrac{\pi}{2}+p\pi \qquad\vee\qquad -\tfrac{\pi}{2}+p\pi<\theta<-0.4636+p\pi$$

Dette vil resultere i 4 forskellige intervaller:

$$0.4636<\theta<\tfrac{\pi}{2} \qquad\vee\qquad -\tfrac{\pi}{2}<\theta<-0.4636$$

$$0.4636+\pi<\theta<\tfrac{\pi}{2}+\pi \qquad\vee\qquad -\tfrac{\pi}{2}+\pi<\theta<-0.4636+\pi$$

Angående fortegnet for $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4\tan^2\theta}}$, så er det lidt problematisk, idet det afhænger af vinklen φ, men vi kender kun $\sin\varphi$, ikke selve vinklen φ. Ligningen $\sin\varphi = a$, har som bekendt to løsninger i intervallet $[0,2\pi]$, hvor den ene har en negativ cosinus og den anden en positiv cosinus.

For at lave en grafisk 3D fremstilling af cirklen, er det derfor simpelthen nødvendigt at prøve sig lidt frem.

Nedenfor er tegnet cirklen, At de 4 kurver ikke hænger helt sammen er noget teknisk.

Normalvektoren til storcirkelplanen er også tegnet.