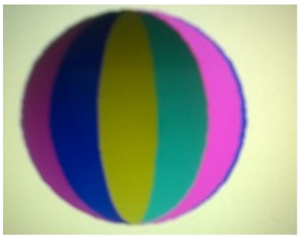
Sfærisk Geometri



Ole Witt-Hansen nov. 2016

Indhold

Forord

Jeg gik i det matematiske gymnasium fra 1961-1964. Her lærte vi foruden den almindelige geometri også sfærisk geometri. Den sfæriske geometri forsvandt imidlertid ud af pensum for matematikerne med reformen fra 1958, som blev implementeret i gymnasiet ved skolestart i 1962. Jeg læste efter Professor JUL. Petersens system, som bestod af 7 bøger. Bøgerne var hverken i fremstillingen eller typografien særlige læsevenlige. De gange jeg før 2005, har forsøgt mig med at give en af bøgerne til elevernes store opgave, har de rystet på hovedet.

Selv om sfærisk geometri har været ude af pensum i mere end 50 år, så har det lige siden 1988 været et tilbagevendende emne for de større opgaver, også - men i langt mindre grad - efter 2005.

En af grundene er, at den sfæriske geometri simpelthen er for svær. Hvilket hænger sammen med, at det kan være overordentligt vanskeligt at aflæse egenskaber for geometriske figurer på en kugle, som er tegnet perspektivisk i to dimensioner.

I nogle af de bøger, der blev skrevet op til reformen i 1963, var der stadigt et kapitel om sfærisk geometri, men denne gang var cosinusrelationen udledt ved vektorregning i rummet, på samme måde som cosinusrelationen for en plan trekant elegant kan udledes ved vektorregning.

Første gang jeg stillede en (ret ambitiøs) opgave i sfærisk geometri, forsøgte jeg med den lærebog, jeg selv havde haft i gymnasiet, men den blev erklæret for ulæselig af eleven.
Siden har jeg anvendt en bog fra det glimrende lærebogssystem, som dog aldrig slog igennem, af A.F. Andersen og Poul Mogensen. Ved anvendelse af de 10 sider i den bog, har alle de elever der har fået stillet en opgave i sfærisk geometri få topkarakterer.
Skulle findes andre ordentlige fremstillinger af den sfæriske geometri, som kan anvendes på gymnasialt niveau, så er jeg i hvert fald ikke stødt på dem.

Efter 2005 er Andersen og Mogensen nok også blevet for svær i forhold til elevernes matematikkundskaber. Derfor faldt det mig ind, at jeg skulle forsøge skrive nogle noter, der var ordentlige – dvs. med konsekvent udledning og bevisførelse for sætninger – men dog mere tilgængelige for elever i gymnasiet nu om dage..
Da jeg skulle vælge mellem den rent geometriske fremstilling og en fremstilling med anvendelse af vektorer, valgte jeg alligevel den rent geometriske fremstilling, ligesom de trigonometriske formler vel stadig udledes uden brug af vektorer og regning med koordinater.

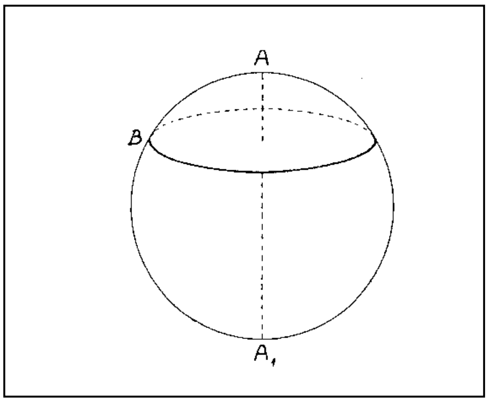
Denne fremstilling af den sfæriske geometri læner sig derfor stærkt op af JUL. Petersens lærebog i Stereometri, som jeg selv havde i gymnasiet, men den er bearbejdet, så den trods alt skulle være mere læsevenlig overfor gymnasieelever, der tør binde an med den sfæriske geometri som SRP opgave.

1. Geometri på en kugle

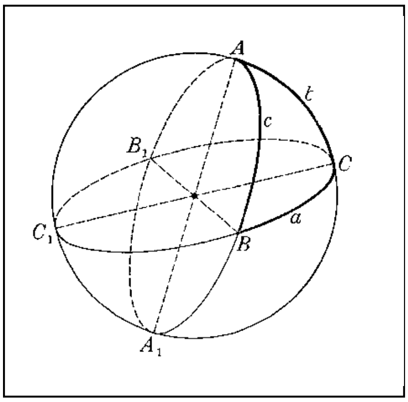
I plangeometrien ved vi at den korteste vej mellem to punkter er et ret liniestykke. På en vilkårlig to dimensional flade, er sagen mere kompliceret. Det område af geometrien, der beskæftiger sig med dette kaldes differentialgeometri, men det er en ganske kompliceret del af matematikken.
Hvis fladen er givet ved en parameterfremstilling i rummet
$P(u_1,u_2)=(x(u_1,u_2),y(u_1,u_2),z(u_1,u_2))$ udleder man i differentialgeometrien en (overordentlig kompliceret) differentialligning for den korteste vej mellem to punkter.
En sådan kurve kaldes for en geodæt. Da "geo" betyder jord, henfører begrebet til den korteste vej mellem to punkter på jorden, eller mere generelt på en kugleflade.
Siden har differentialgeometrien udviklet sig til geometri på en vilkårlig flade, og generaliseret til rum med flere end 3 dimensioner.
I den generelle relativitetsteori har rumtiden 4 dimensioner (ct,x,y,z), hvor t er tiden og c er lysets hastighed. I denne teori er rummet ikke Euklidsk, men krumt og geodæterne er ikke rette linier, men derimod de kurver som lyset følger på deres vej gennem rummet.

Af rumlige flader er kuglen næst efter planen den simpleste geometriske flade.

Figur (1)



Figur (2)



Hvis man skærer en kugleflade med en plan, får man en cirkel, som vist på figuren til venstre. Hvis planen går gennem centrum af kuglefladen, får man en såkaldt storcirkel, som vist på figuren til højre. Hvis planen ikke går gennem centrum af kuglefladen kaldes skæringskurven for en lillecirkel.

I differentialgeometrien kan man vise, (men det er ganske kompliceret) at en storcirkelbue altid er den korteste vej mellem to punkter på kuglen. Således er storcirkelbuen på figuren til højre den korteste vej mellem punkterne A og B samt B og C.

I plangeometrien beskæftiger man sig figurer begrænset af rette linier, og i den sfæriske geometri beskæftiger man sig af samme grund med figurer begrænset af storcirkler.
Storcirklerne er således de "rette linier" i den sfæriske geometri.

En storcirkel er entydigt bestemt af to punkter på kuglefladen, der ikke ligger diametralt modsat.

To storcirkler skærer hinanden i to diametralt modsatte punkter, svarende til skæringslinien (diameteren) mellem de to planer, hvis skæringslinier med kuglefladen er storcirklerne.

Ved vinklen mellem to storcirkler forstår man vinklen mellem deres skæringsplaner. Se figur (1.2). Af figuren til højre fremgår, at buen $A_1B = 180^0 - AB$.
Den diameter (aksen), der står vinkelret på den plan, der hører til storcirklen, skærer kuglefladen i to diametralt modsatte punkter P og P_1, som kaldes for polerne til storcirklen.

Når den ene af to storcirkler går gennem polerne for den anden, står de to storcirkler vinkelret på hinanden, som vist på figuren nedenfor.

Figur (3)

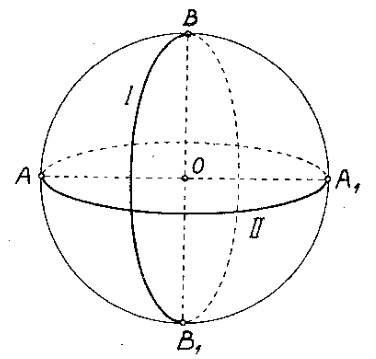


Fig. 49.

Figur (4)

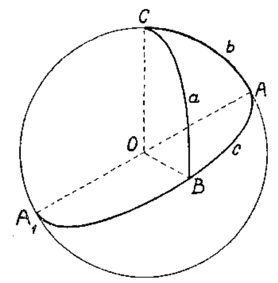


Fig. 52.

2. Sfæriske tokanter og trekanter

En sfærisk trekant er en del af kugleflade, begrænset af tre forskellige storcirkelbuer, som kaldes trekantens sider. Siderne måles ligesom vinklerne i grader eller radian. Længden a af en side fås ved at gange radiantallet α for siden med kuglefladens radius R, så

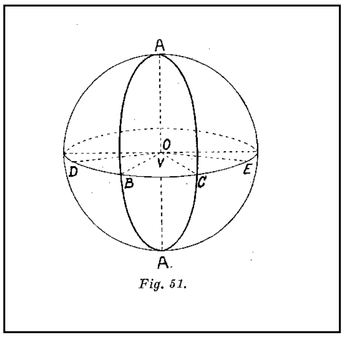
$$a = \alpha R.$$

Bogstaverne *a, b, c* anvendes dog oftest for radiantallet (eller gradtallet) for siden.

Skæringspunkterne mellem storcirklerne er vinkelspidserne i den sfæriske trekant. Vinklerne der ligger overfor siderne *a, b, c* betegnes ligesom i plangeometrien med *A,B,C.*

Tegner man halvlinier fra kuglefladens centrum og ud til vinkelspidserne, fremkommer der et tresidet hjørne. Sider og vinkler i den sfæriske trekant er parvis lig med sider og vinkler i det tresidede hjørne.
Begreberne ligebenet og ligesidet trekant er de samme, som i plangeometrien.
En højde i trekanten er en storcirkelbue fra en vinkelspids, som står vinkelret på den modstående side. Vinkelhalveringslinie og midtnormal har samme betydning, som i plangeometrien.

Figur (5)



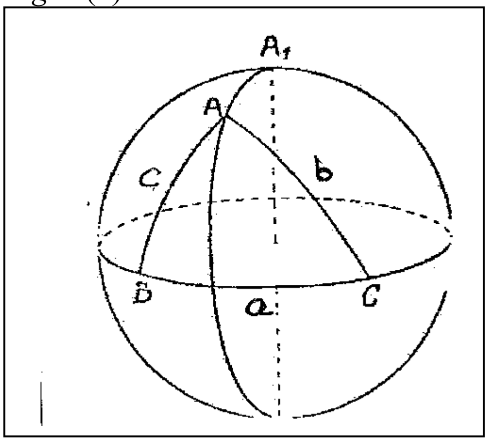
En retvinklet sfærisk trekant er en sfærisk trekant, som har en ret vinkel. Kateter og hypotenuse har samme betydning, som i plangeometrien, hvis trekanten kun har én ret vinkel.
Figuren ABA_1C på figur (5) kaldes en sfærisk tokant.
I en sfærisk *trekant* er summen af vinklerne altid større end 180^0.
På figuren til venstre er vist en to-retvinklet trekant, hvis A også er 90^0, får man en tre-retvinklet trekant med vinkelsum 270^0.

Da en vinkel i en sfærisk trekant ikke kan blive større end 180^0, er vinkelsummen i en sfærisk trekant større end 180^0 og mindre end $3 \cdot 180^0 = 540^0$.

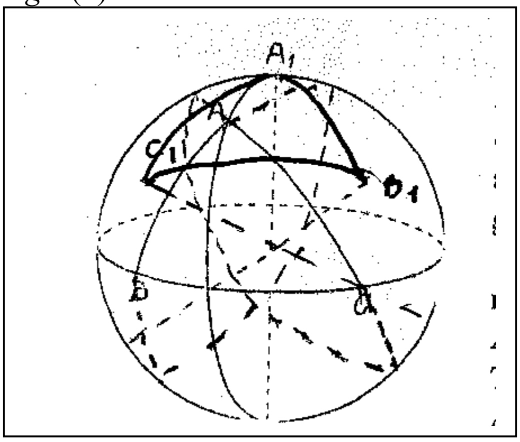
2.1 Polartrekanter

Ved polartrekanten til en sfærisk trekant forstår man den trekant, hvis vinkelspidser er poler for siderne i den givne trekant. For eksempel er A_1 polen for den storcirkel, som indeholder siden a.

Figur (*6*)



Figur(*7*)



På figuren til venstre er konstrueret polen A_1 til siden a. På figuren til højre er hele polartrekanten $A_1\ B_1\ C_1$ konstrueret, men som det fremgår, er det vanskeligt at overskue en rumlig tegning. F.eks. ligger både B_1 og C_1 på bagsiden af kuglen, mens A_1 ligger i papirets plan.

Der gælder den simple, men ret uigennemskuelige sætning:

Polartrekanten til en given trekants polartrekant er den oprindelige trekant.

Lad den givne trekant være ABC og polartrekanten $A_1\ B_1\ C_1$. Vi søger da polerne for $B_1\ C_1$.
Da $B_1\ C_1$ går gennem en pol for hver af storcirklerne AB og AC og der ifølge sætningen på side 3 gælder:
Når den ene af to storcirkler går gennem polerne for den anden, står de to storcirkler vinkelret på hinanden, som vist på figuren ovenfor,
Kan vi derfor slutte at AB og AC går gennem polerne for $B_1\ C_1$. *H*ermed er et af skæringspunkterne A. Da endvidere $AA_1 < 90^0$ ligger A på samme side af $B_1\ C_1$ som A_1 , så er A den pol, der skal

benyttes ved konstruktionen af polartrekanten til $A_1\ B_1\ C_1$. Et analogt ræsonnement kan anvendes for konstruktion af polerne *C og B* til $A_1\ B_1$ og $A_1\ C_1$.

Endvidere gælder der den lidt overraskende sætning:

Sider og vinkler i polartrekanten til en sfærisk trekant er supplementvinkler (*vinkelsum lig med* 180^0) *til henholdsvis vinkler og sider i den oprindelige sfæriske trekant.*

Da B_1 og C_1 ligger på normalerne til fladerne svarende til siderne *AC* og *AB* og da vinklen mellem normalerne til to flader, der skærer hinanden med vinklen *v*, er lig med $180 - v$, og da *A* er vinklen mellem fladerne svarende til siderne *AC* og *AB*, er $B_1\ C_1 = 180 - A$. Tilsvarende for de to øvrige vinkler.

Idet vi anvender sætningen ovenfor, at polartrekanten til en polartrekant er den oprindelige trekant finder man: $AB = c = 180^0 - C_1$, eller $C_1 = 180^0 - c$ og tilsvarende for de to øvrige sider, hvormed at sætningen er bevist.

Ved hjælp af sætningen om sider og vinkler i polartrekanten til en trekant, kan vi nu bevise, at summen af vinklerne i en sfærisk trekant er større end 180^0 og mindre end 540^0.

Vi tænker os at konstruere polartrekanten til en sfærisk trekant *ABC*. Ifølge sætningen ovenfor er siderne i polartrekanten $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$. Da summen af siderne er mindre end 360^0, må der gælde:

(2.1) $$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C < 360^0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B + C > 180^0$$

Endvidere er summen af siderne i polartrekanten større end 0:

(2.2) $$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B + C < 540^0$$

Forskellen mellem vinkelsummen i en sfærisk trekant og 180^0 kaldes den sfæriske exces.

3. Den retvinklede sfæriske trekant

Figur(*8*)

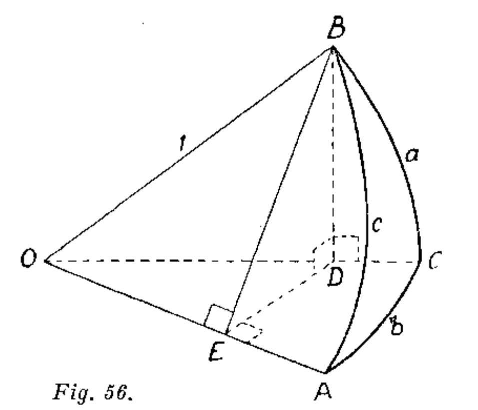


Fig. 56.

Lad trekanten være *ABC*, hvor $C = 90^0$. O er centrum for kuglefladen, og radius i kuglen er 1, så liniestykkerne *OA, OB* og *OC* alle har længden 1. *D* er projektionen af *B* på *OC* og *E* er projektionen af *B* på *OA*. Vi antager først at kateterne *a* og *b* er spidse, så *D* ligger mellem *O* og *C,* og *E* ligger mellem *O* og *A*. *DE* er vinkelret på *OA*, da *ED* er projektionen af *BE* på planet *OAC*.
Da *BE* og *ED* begge er vinkelrette på *OA* er $\angle BED$ en vinkel mellem planerne *AOB* og *AOC*, og hermed $\angle BED = \angle A$. Samtidig er hypotenusen $c = \angle BOE$.

Vi skal i det følgende anvende formlerne for den *plane retvinklede* trekant, som derfor er repeteret nedenfor.

(3.1) $\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad \tan A = \frac{a}{b}$

Sinus til en vinkel er lig med modstående katete divideret med hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er lig med den hosliggende katete divideret med hypotenusen.

Tangens til en vinkel er lig med den modstående katete divideret med hosliggende.

For den sfæriske trekant på figuren, ses da at:

$$OD = OB\cos a = \cos a \quad \text{og} \quad OE = OD\cos b = \cos a \cos b$$

Af den retvinklede trekant *OEB* fås endvidere: $OE = OB\cos c = \cos c$, altså

(3.2) $\cos c = \cos a \cos b$

Af den retvinklede trekant *OEB* fås*:* $OE = OB\cos c$ og af *ΔBED* fås:

$$\sin A = \frac{BD}{BE} \qquad \text{men} \quad BD = \sin a \quad \text{og} \quad BE = \sin c\text{, så}$$

(3.3) $$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

og analogt med dette: $\sin B = \frac{ED}{BE} = \frac{\sin b}{\sin c}$, så

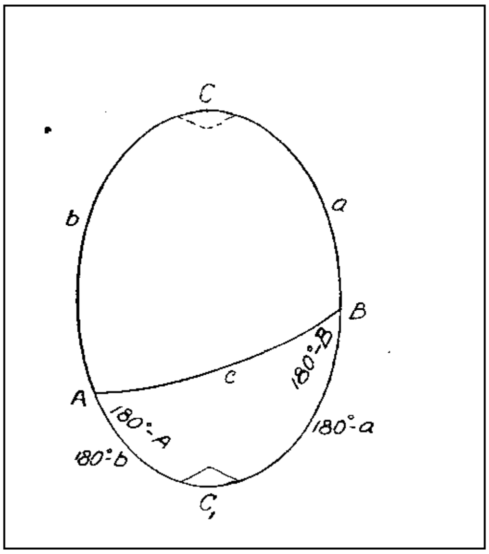
(3.4) $$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$$

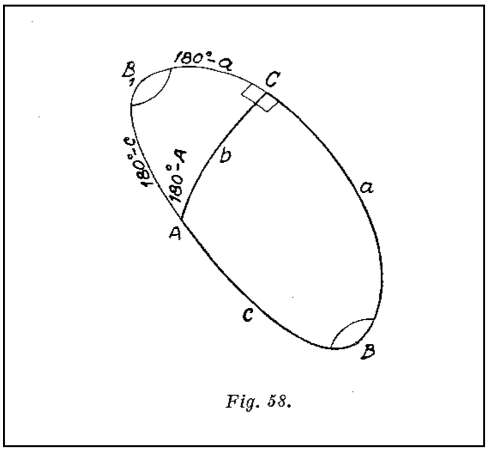
Endvidere finder man af ΔBDE , at $\cos A = \frac{DE}{BE}$ og da $DE = OD\sin b = \cos a \sin b$, fås

(3.5) $\cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$ og tilsvarende $\cos B = \frac{\cos b \sin a}{\sin c}$

Vi har udledt formlerne under den antagelse, at begge vinklerne *A* og *B* er spidse.
Hvis $C = 90^0$, og en katete f.eks. $a = 90^0$, er også $A = 90^0$, hvilket også fremgår af formlerne:

Figur (9) *Figur* (10)





En sfærisk trekant kan tænkes fremkommet ved at en tokant, der forbinder polerne C og C_1, og hvor vinklerne $C = C_1$ skæres med en storcirkel, hvor skæringspunkterne er A og B. Sorcirklen deler tokanten i to sfæriske trekanter, som kaldes nabotrekanter, og hvor $\angle C_1AB = 180 - CAB$ $\angle C_1BA = 180 - CBA$. En sfærisk trekant har tre nabotrekanter, en for hver af siderne *a, b, c.*

Hvis begge kateter i *ABC* er stumpe (større end 90^0), som det ses på figuren til venstre, betragter vi nabotrekanten ABC_1.
I nabotrekanten $A_1\ B_1\ C_1$, hvor punkterne $A_1 = A$ og $B_1 = B$, er $C_1 = C$ og $c_1 = c$, mens de øvrige vinkler og sider i $A_1\ B_1\ C_1$ komplementer til vinkler og sider i *ABC*.

$$A_1 = 180 - B,\ \ B_1 = 180 - B,\ \ C_1 = C = C,\ \ a_1 = 180 - a,\ \ b_1 = 180 - b, c_1 = \ c.$$

Så hvis begge kateter i *ABC* er stumpe, så er begge kateter i trekant $A_1\ B_1\ C_1$ spidse, så derfor gælder formlerne (3.2) til (3.5)

$$\sin A_1 = \frac{\sin a_1}{\sin c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(180 - A) = \frac{\sin(180 - a)}{\sin(180 - c)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

Idet $\sin(180 - v) = \sin v$, ses det, at vi får de samme formler som vi havde for trekant *ABC*

$$\cos A_1 = \frac{\cos a_1 \sin b_1}{\sin c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(180 - A) = \frac{\cos(180 - a)\sin(180 - b)}{\sin(180 - c)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$$

Endvidere er

$$\cos c_1 = \cos c = \cos(180 - a)\cos(180 - b) = \cos a \cos b$$

Men idet $\cos(180 - v) = -\cos v$, ses at vi får de samme formler som for den spidsvinklede trekant.

Hvis $a > 90^0$ og $b < 90^0$, betragter vi nabotrekanten til siden *b*, (figuren til højre) $A_1\ B_1\ C_1$, som har en vinkel på 90^0 og en spids vinkel, og der vil, ifølge det foregående, for denne trekant gælde.

$$\cos c_1 = \cos(180 - c) = \cos(180 - a)\cos b \quad \Leftrightarrow \quad \cos c = \cos a \cos b$$

$$\sin A_1 = \frac{\sin a_1}{\sin c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(180 - A) = \frac{\sin(180 - a)}{\sin(180 - c)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\cos A_1 = \frac{\cos a_1 \sin b_1}{\sin c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(180 - A) = \frac{\cos(180 - a)\sin b}{\sin(180 - c)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$$

Formlerne for den retvinklede sfæriske trekant er derfor almengyldige

4. Beregning af sider og vinkler i den retvinklede sfæriske trekant

Af formlerne (3.2) til (3.5) kan yderlige udledes nogle formler, som kan anvendes til beregning af ukendte sider og vinkler i den retvinklede sfæriske trekant, når to sider er kendte. Af

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \Leftrightarrow \quad \cos a = \frac{\cos c}{\cos b} \quad \text{og} \quad \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c} = \frac{\cos c \sin b}{\cos b \sin c} = \frac{\tan b}{\tan c}$$

(4.1) $$\cos A = \frac{\tan b}{\tan c}$$

Ved at dividere $\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$ med $\cos A = \dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}$, får man, $\tan A = \dfrac{\dfrac{\sin a}{\sin c}}{\dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}} = \dfrac{\tan a}{\sin b}$

(4.2) $$\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$$

og den analoge formel

$$\tan B = \frac{\tan b}{\sin a}$$

Ved multiplikation af disse to ligninger fås:

$$\tan A \tan B = \frac{\tan a}{\sin b}\frac{\tan b}{\sin a} = \frac{\sin a \sin b}{\cos a \sin b \cos b \sin a} = \frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\cos c}$$

(4.3) $$\tan A \tan B = \frac{1}{\cos c} \quad \Leftrightarrow \quad \cos c = \frac{1}{\tan A \tan B}$$

Nedenfor er samlet alle formlerne hørende til den retvinklede sfæriske trekant:

(4.4)	$\cos c = \cos a \cos b$			
(4.5)	$\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$	og	$\sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c}$	
(4.6)	$\cos A = \dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}$	og	$\cos B = \dfrac{\cos b \sin a}{\sin c}$	
(4.7)	$\cos A = \dfrac{\tan b}{\tan c}$	og	$\cos B = \dfrac{\tan a}{\tan c}$	
(4.8)	$\tan A \tan B = \dfrac{1}{\cos c}$	$\Leftrightarrow$	$\cos c = \dfrac{1}{\tan A \tan B}$	

4.9 Eksempel: $a = 35^0$, $b = 60^0$.

$\cos c = \cos a \cos b = \cos 35 \cos 60 = 0{,}4095 \Rightarrow c = 66^0{,}82$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin 35}{\sin 65{,}82} = 0{,}6287 \Rightarrow A = 38^0{,}96$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin 60}{\sin 65{,}82} = 0{,}9493 \Rightarrow B = 71^0{,}68$$

4.10 Eksempel: $a = 40^0{,}25$, $c = 100^0{,}56$

$$\cos c = \cos a \cos b \Rightarrow \cos b = \frac{\cos c}{\cos a} = -0{,}2401 \Rightarrow b = 103^0{,}89$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} = 0{,}6372 \Rightarrow A = 41^0{,}09$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = 0{,}9875 \Rightarrow B = 80^0{,}93$$

4.11 Eksempel: $a = 36^0{,}70$, $A = 50^0{,}83$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \Rightarrow \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = 0{,}77^0{,}64 \Rightarrow c = 50^0{,}93$$

$$\cos c = \cos a \cos b \Rightarrow \cos b = \frac{\cos c}{\cos a} = 0{,}7861 \Rightarrow b = 38^0{,}18$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = 0{,}7962 \Rightarrow B = 52^0{,}77$$

4.12 Eksempel: $A = 43^0{,}28$, $B = 80^0{,}59$

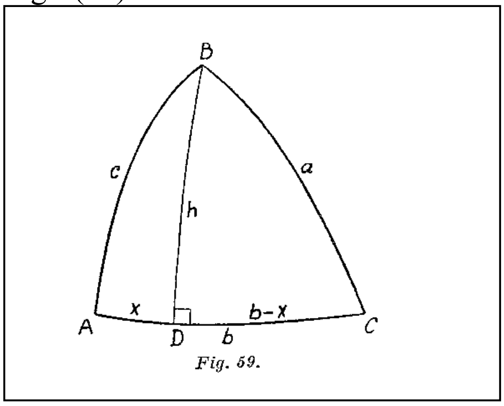
$$\cos c = \frac{1}{\tan A \tan B} = 0{,}1760 \quad \Rightarrow \quad c = 79^0{,}86$$

$$\sin a = \sin A \sin c = 0{,}6760 \quad \Rightarrow \quad a = 42^0{,}45$$

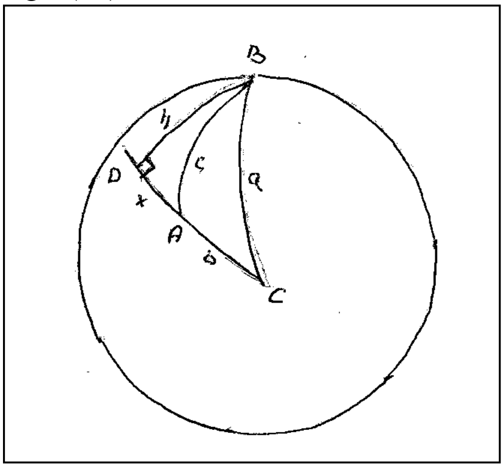
$$\sin b = \sin B \sin c = 0{,}9711 \quad \Rightarrow \quad a = 76^0{,}20$$

5. Den generelle sfæriske trekant

Figur(11)



Figur(12)



5.1 Cosinus relationen for den sfæriske trekant

Vi skal herefter betragte den generelle sfæriske trekant, som vist på figur (11). Vi nedfælder højden fra en af vinkelspidserne f.eks. fra *B*. Højdens fodpunkt på *b* er *D*. Vi antager i første omgang, at *D* ligger mellem *A* og *C*. Vi anvender herefter sætning (4.4) på ΔABD og ΔBDC.

$$\cos c = \cos x \cos h \qquad \text{og} \qquad \cos a = \cos h \cos(b - x)$$

Vi anvender derefter additionsformlen: $\cos(u - v) \cos u \cos v + \sin u \sin v$ på den sidste ligning.

$$\cos a = \cos h \cos(b - x) = \cos h \cos b \cos x + \cos h \sin b \sin x$$

som ved hjælp af $\cos c = \cos x \cos h$ kan skrives:

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos h \sin b \sin x$$

Anvendes nu (4.6) $\cos A = \dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}$ på ΔABD fås $\cos A = \dfrac{\cos h \sin x}{\sin c} \Leftrightarrow \cos h \sin x = \cos A \sin c$ får man *cosinusrelationen* for en sfærisk trekant:

(5.1)	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(5.1) har (ligesom cosinusrelationen for den plane trekant) to analoge udtryk, som findes ved bogstavombytning.

(5.2)	$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$
(5.3)	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

Cosinusrelationer kan anvendes til at beregne vinklerne i en sfærisk trekant, når siderne er kendte.

Hvis højden fra *B* falder udenfor *AC*, som vist på figur (12) , følger nogle næsten identiske regninger:

Af ΔABD fås som før af (4.4) : $\cos c = \cos h \cos x$, og af ΔBDC fås:

$$\cos a = \cos h \cos(x+b) = \cos h(\cos x \cos b - \sin x \sin b) = \cos h \cos x \cos b - \cos h \sin x \sin b$$

Heri indsættes udtrykket for cos *c*, så

$$\cos a = \cos b \cos c - \cos h \sin x \sin b$$

Ligesom før anvender vi (4.6) $\cos A = \dfrac{\cos a \sin b}{\sin c}$ på ΔABD: $\cos(180 - A)\sin c = \cos h \sin x$, som indsat i udtrykket overfor uforandret giver *cosinusrelationen*:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

I modsætning til en trekant i planen er siderne i en sfærisk trekant fuldstændig fastlagt, når de tre vinkler er kendte. At løse de tre cosinusrelationer med hensyn til de tre vinkler *A,B,C* er imidlertid er en ret krævende algebraisk udfordring, men her minder vi om sætningen:

I polartrekanten, som er dannet af polerne til de tre storcirkler, som indeholder de tre sider *a,b,c,* er vinklerne i polartrekanten A_1, B_1, C_1 lig med supplementvinklerne (180 –*v*) til siderne *a, b, c* i den oprindelige trekant og siderne i polartrekanten a_1, b_1, c_1 er supplementvinkler til vinklerne *A, B, C* i den oprindelige trekant.

Så hvis kun vinklerne er kendte i en sfærisk trekant, opskriver man i stedet cosinusrelationerne for polartrekanten.

(5.4) $\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1$

Som herefter giver

$$\cos(180 - A) = \cos(180 - B)\cos(180 - C) + \sin(180 - B)\sin(180 - C)\cos(180 - a) \quad \Leftrightarrow$$

$$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + \sin B \sin C(-\cos a) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos A =' -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

Hvoraf a direkte kan bestemmes. Formlerne for b og c opnås ved bogstavombytning.

5.2 Sinus relationerne for den sfæriske trekant

Anvender man formlen (4.5): $\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$ for den retvinklede sfæriske trekant på ΔABD og ΔBDC på figur (11), så gælder der, hvad enten højden fra C falder indenfor eller udenfor AC :

$$\sin A = \frac{\sin h}{\sin c} \quad og \quad \sin C = \frac{\sin h}{\sin a} \quad \Rightarrow \quad \sin h = \sin A \sin c \quad and \quad \sin h = \sin C \sin a$$

Hvoraf følger

$$\sin A \sin c = \sin C \sin a$$

Som giver *sinusrelationerne* for den sfæriske trekant.

(5.5) $$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Det midterste led er fremkommet ved bogstavombytning. .

6. Arealet (overfladen) af en sfærisk trekant

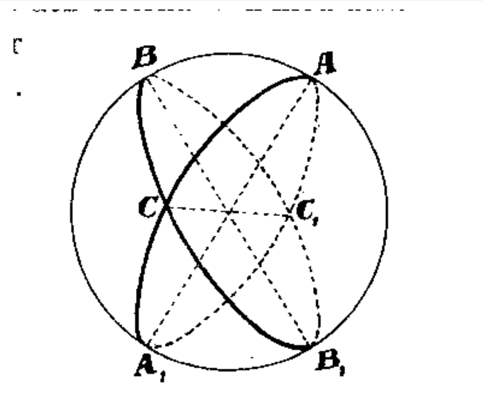


Fig. 66.

Overfladen af en kugle med radius R er: $T = 4\pi R^2$.
På figuren er vist en sfærisk trekant ABC. Vi har også indtegnet nabotrekanten til siden a: A_1BC, til siden b: AB_1C, og til siden c: ABC_1.
Punkterne: A og A_1 , B og B_1 og C og C_1 ligger diametralt modsat og en trekant og dens nabotrekant danner tilsammen en tokant med en vinkel, som er lig topvinklen. F.eks. danner ABC og A_1BC tilsammen en tokant med vinklen A.
Arealet af en tokant med vinklen 1^0 er 1/360 af kuglens areal, så arealet af en tokant med vinklen v er

$$T_v = \frac{v}{360} T$$

Heraf følger, idet vi skriver $T(ABC)$ for arealet af ΔABC.

$$T(ABC) + T(A_1BC) = \frac{A}{360} T$$
$$T(ABC) + T(AB_1C) = \frac{B}{360} T$$

(6.2) $$T(ABC) + T(ABC_1) = \frac{C}{360} T$$

(6.3) $$2T(ABC) + \left(T(ABC) + T(A_1BC) + T(AB_1C) + T(ABC_1)\right) = \frac{A+B+C}{360} T$$

Trekant C_1AB er symmetrisk med trekant CA_1B_1 med hensyn til kuglens centrum, så de to trekanter har samme areal. Man kan heraf, (hvis man betragter figur (13)) , slutte at de fire trekanter i parentesen ovenfor i (6.3) danner en halvkugle, og leddene i parentesen i (6.3) har derfor arealet ½*T.* Vi får derfor ved addition af de tre udtryk:

(6.4)
$$2T(ABC)+\tfrac{1}{2}T=\frac{A+B+C}{360}T \quad \Leftrightarrow \quad 2T(ABC)+\frac{180}{360}T=\frac{A+B+C}{360}T$$
$$2T(ABC)=\frac{A+B+C-180}{360}T \quad \Leftrightarrow$$
$$T(ABC)=\frac{E}{720}T \quad \Leftrightarrow \quad T(ABC)=\frac{E}{180}\pi R^2$$

Dette er arealet af en sfærisk trekant, hvor $4\pi R^2$ er overfladen af kuglen, og

$$E=A+B+C-180$$

kaldes *den sfæriske exces*.

Det bemærkelsesværdige er, at arealet af en sfærisk trekant ikke afhænger af størrelsen af vinkler og sider, men *kun* af den sfæriske exces.

7. Eksempler og opgaver i den almindelige sfæriske trekant

Eksempel 7.1

Givet de tre sider: $a = 80^0$, $b = 110^0$, $c = 65^0$. (Lav en prøvetrekant, som godt må være plan)

De tre vinkler *A, B, C*, kan beregnes ud fra cosinusrelationen:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \quad \Leftrightarrow \quad \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\cos 80-\cos 110\cos 65}{\sin 110\sin 65}=0{,}7362 \quad \Rightarrow \quad A=21^0{,}93$$

Og de to analoge formler, der findes ved bogstavombytning

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}=-4654 \quad \Rightarrow \quad B=117^0{,}74$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}=0{,}5400 \quad \Rightarrow \quad C=57^0{,}51$$

Eksempel 7.2

Givet de tre vinkler: $A = 80^0$, $B = 110^0$, $C = 65^0$.

Man kan godt forsøge, at få isoleret en side ved hjælp af cosinus- og sinusrelationerne, men det vil ikke føre til noget. I stedet bør man betragte polartrekanten, hvor

$$a_1 = 180 - A,\ b_1 = 180 - B,\ c_1 = 180 - C,$$

og så bestemme

$$A_1 = 180 - a,\ B_1 = 180 - b,\ C_1 = 180 - c.$$

Med de valgte vinkler vil opgaven for polartrekanten være den samme som i eksempel (7.1), og siderne vil derfor være:

$$a = 180 - 21.93 = 158^0{,}07\ ,\ c = 180 - 117.74 = 62^0{,}26\ ,\ c = 180 - 157.51 = 122^0{,}49\ .$$

Eksempel 7.3

For at det ikke skal ligne det rene hokuspokus, vil vi gennemføre beregningen vi med tre andre værdier for vinklerne:

$$A = 57^0\ ,\ B = 75^0\ ,\ C = 100^0.$$

Vi opskriver da cosinusrelationen for polartrekanten, hvor

$a_1 = 180 - A,\ b_1 = 180 - B,,\ c_1 = 180 - C,$ for så at bestemme A_1 , B_1 , C_1.

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\cos(180 - A) = \cos(180 - B)\cos(180 - C) + \sin(180 - B)\sin(180 - C)\cos(180 - a)$$

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = 0{,}5253 \quad \Rightarrow \quad a = 58^0{,}31$$

Og ved bogstavombytning:

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} = 0{,}1989 \quad \Rightarrow \quad b = 78^0{,}53$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = -0{,}0403 \quad \Rightarrow \quad c = 92^0{,}31$$

Eksempel 7.4

En vinkel og de to hosliggende sider: $a = 108^0$, $b = 143^0$, $C = 159^0$.

Siden c bestemmes direkte ved cosinusrelationen:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C = -0{,}2876 \quad \Rightarrow \quad c = 106^0{,}71$$

B og C bestemmes herefter i princippet bestemmes ved sinusrelationerne: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{\sin b \sin C}{\sin c} = 0.2252 \quad \Rightarrow \quad B = 13^0{,}01 \;\vee\; B = 166^0{,}99$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c} = 0.8161 \quad \Rightarrow \quad A = 20^0{,}84 \;\vee A = 159^0{,}16$$

Problemet er naturligvis, at vi får to løsninger, og i modsætning til plangeometrien har vi ingen direkte måde at afgøre, hvilken der er den rigtige. Det svarer til at vi får vinklerne for trekanten og nabotrekanten til siden c. Men vi har ingen mulighed for at afgøre,(andet end på en præcis tegning), hvilke af de fire vinkler, der hører til nabotrekanten eller trekanten. I den sfæriske geometri er der ikke to løsninger til opgaven, som det er tilfældet i plangeometrien. Løsningerne hører til to forskellige trekanter.

Svaret på dette er også at beregne de to vinkler A og B ved cosinus relationen.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos 108 - \cos 143 \cos 106{,}71}{\sin 143 \sin 106{,}71} = -0{,}9345 \quad \Rightarrow \quad A = 159^0{,}16$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = -0.9774 \quad \Rightarrow \quad B = 166^0{,}98$$

Eksempel 7.5

Mens de hidtidige eksempler for såvel den retvinklede som den almindelige sfæriske trekant, har kunnet løses - omtrent på den samme måde, som for den plane trekant - kommer der problemer, hvis vi ser på tilfældene givet ved:

En vinkel, den hosliggende og den modstående side, f.eks. *A, a, b*
Eller en side en hosliggende og en modstående vinkel. F.eks. *A, B, a*.

De to tilfælde viser sig at være det samme, idet vi i det første tilfælde kan beregne B af sinusrelationerne og i det andet tilfælde kan beregne b af sinusrelationerne. Vi køber dog ind i det samme problem med de to løsninger til ligningen sin $v = x$.

I begge tilfælde har vi ganske *A, B, a, b*, men mangler at beregne *c* og *C*. Problemet er naturligvis, at vi ikke, som det er tilfældet for den plane trekant, kan beregne $C = 180 - (A+B)$.

Vi er ladt tilbage med at anvende cosinusrelationen, hvor vi ganske vidst kan opstille to ligninger, hvor siden *c* er den ubekendte, men problemet er, at både sin *c* og cos *c* optræder i ligningen.

Forsøg med at nedfælde en højde og anvende formlerne for den retvinklede trekant fører til det samme resultat.

Vi opskriver derfor cosinusrelationerne for cos *a* og cos *b*.

(7.5.1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ og $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$

Vi løser herefter de to ligninger for sin *c* og sætter resultaterne lig med hinanden.

$$\sin c = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \cos A} \quad \text{og} \quad \sin c = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \cos B}$$

Herefter får man en ligning til bestemmelse af cos *c*

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \cos A} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \cos B}$$

Hvorefter *C* kan beregnes af cosinusrelationerne.

Der er imidlertid også en anden mulighed, idet hver af de to cos-relationer (7.5.1) er en såkaldt homogen ligning af første grad ligning i sin *c* og cos *c*.

7.5 Den homogene ligning af første grad i cos*x* og sin*x*

Den generelle homogene ligning i cos *x* og sin *x* skrives:

(7.5.3) $$a\cos x + b\sin x = c$$

For at løse ligningen dividerer vi ligningen igennem med $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

og indfører nu vinklen *y* ved: $\cos y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *og* $\sin y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, det følger så:

(7.5.4) $$\tan y = \frac{b}{a}$$

ligningen bliver herefter

$$\cos y \cos x + \sin y \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Som omskrives ved hjælp af additionsformlen for cos(*x* - *y*)

$$\cos(x - y) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ligningen har kun løsninger, hvis $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$. Man bestemmer så *x* af :

$$x = y + \cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

8. Plangeometrien som grænsetilfælde for den sfæriske geometri

Radiantallet α for en bue *a* på en storcirkel med radius *R*, er givet ved: $\alpha = \frac{a}{R}$.

Hvis buerne i en sfærisk trekant er små i forhold til radius, vil kuglen være næsten plan i det område, som den sfæriske trekant dækker, (jorden er flad) og vi skulle forvente at de sfæriske formler, i dette tilfælde ville svare til de plangeometriske trigonometriske formler.

At dette er tilfældet, kan vises ved at rækkeudvikle sin α til første orden: $\sin \alpha = \alpha$ og cos α til 2. orden: $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ i formlerne for de sfæriske trekanter.

Den retvinklede sfæriske trekant:
Vi indfører betegnelserne α, β, δ, for radiantallet for siderne *a, b, c* i den sfæriske trekant og antager samtidig, at α <<1, β <<1, γ<<1.
I alle tilfælde er længden af buerne: *a = αR, b = βR, c = γR.*

Formlen for den sfæriske geometri, nu skrevet med radiantal

$$\sin A = \left(\frac{\sin a}{\sin c} \right) = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \Rightarrow \quad \sin A \approx \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha R}{\gamma R}$$

Som leverer formlen for den plane retvinklede trekant.

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

For den retvinklede sfæriske trekant gælder formlen:

$$\cos c = \cos a \cos b$$

Skrevet med radiantal, fulgt af en rækkeudvikling

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$$

$$1-\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (1-\tfrac{1}{2}\alpha^2)(1-\tfrac{1}{2}\beta^2) \quad\Leftrightarrow\quad \gamma^2 = \alpha^2+\beta^2 \quad\Leftrightarrow\quad R^2\gamma^2 = R^2\alpha^2 + R^2\beta^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Det ses således, at $\cos c = \cos a \cos b$ for den retvinklede sfæriske trekant svarer det den Pythagoræiske sætning $c^2 = a^2 + b^2$ for den plane retvinklede trekant.

Den almindelige sfæriske trekant:

Vi ser først på *sinusrelationerne* for den sfæriske trekant:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

som skrevet med radiantal:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

Vi rækkeudvikler sin i næveren og dividerer igennem med *R*.

$$\frac{\sin A}{\alpha R} = \frac{\sin B}{\beta R} = \frac{\sin C}{\gamma R} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Som ses at være sinusrelationerne for den plane trekant.

Vi vender os derefter til cosinusrelationen for den sfæriske trekant:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Som vi opskriver med radiantal for siderne:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$$

og rækkeudvikler

$$1-\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (1-\tfrac{1}{2}\alpha^2)(1-\tfrac{1}{2}\beta^2) + \alpha\beta\cos C$$

Hvis vi reducerer og kun beholder led indtil 2. orden får man:

$$1-\tfrac{1}{2}\gamma^2 = 1-\tfrac{1}{2}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\beta^2+\alpha\beta\cos C \quad\Leftrightarrow\quad \gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos C$$

Ved at gange igennem med R^2, genfinder man cosinusrelationen for den plane trekant.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

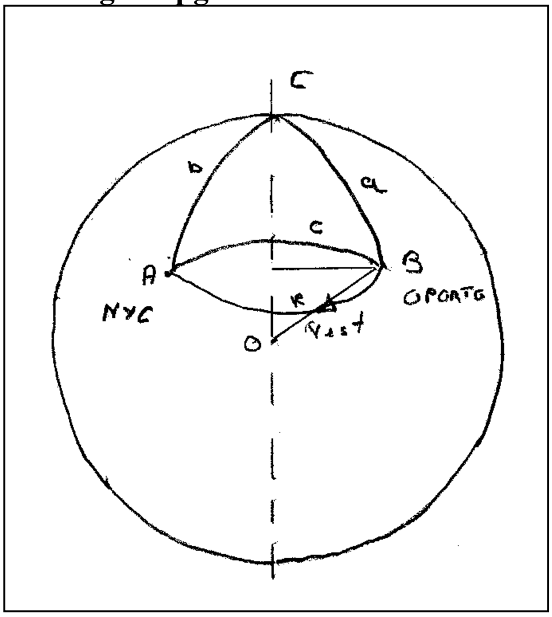
9. Opgaver

1. Oporto i Portugal og New York City ligger omtrent på samme bredde, idet vi sætter NYC = (40^0 45' n ; 74^0 0' w) (nordlig bredde; vestlig længde) og Oporto = (40^0 45' n ; 8^0 40' w). Skal man sejle (eller flyve) fra Oporto til New York er det derfor måske mest nærliggende at sejle stik vest, indtil man når frem.
Forklar, hvorfor dette ikke er den korteste vej, og beregn hvor meget strækningen (i sømil naturligvis) afkortes ved at sejle den korteste vej, sammenlignet med søvejen stik vest.
Det oplyses, at r_{jord} = 6370 km og 1 sm =1854 m

2. København ligger på (55^0 42' n; 12^0 35' ø) og Los Angeles ligger på (34^0 0' n; 118^0 10' w). Beregn den sfæriske afstand og afstanden i km mellem Kbh. og LA.
Flyveruten Kbh. LA. går via Søndre Strømfjord (66^0 0' n; 54^0 0 w).
Beregn afstandene København - Søndre Strømfjord og Søndre Strømfjord - Los Angeles og sammenlign med afstanden København - Los Angeles.

3. Bermuda-trekanten er et område der begrænses af: Miami: (25^0 49' n ; 80^0 6' w) - Puerto-Rico: (20^0 0'; 63^0 0') og Bermuda: (32^0 45' ; 65^0 0').
Der ønskes ikke en redegørelse for Bermuda trekantens mysterier, men kun en beregning af afstandene og vinklerne i Bermuda-trekanten, samt angivelse af trekantens areal (i km^2).

Løsning til opgave 1.



Alle de gange, jeg har stillet sfærisk geometri som stor opgave, har jeg inkluderet opgave 1. Det er nu aldrig lykkes nogen elever at finde det korrekte svar (uden hjælp), så nu vælger jeg at skrive løsningen, som er ganske overraskende, med mindre man anskuer det på en rigtig kugle.
Længde og bredde er angivet i grader og bueminutter, så det første vi gør, at dividere bueminutterne med 60 og gange med 100. 40^0,45' = 40^0,75 og 8^0,40' = 8^0,67.

Buerne a og b er lig med 90^0 - 40^0,75 =49^0,25.
Vinklen C =74^0 - 8^0,67 = 64^0,33.
For at bestemme længden af storcirkelbuen c , anvender vi cosinus relationen:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\cos c = \cos 49^0{,}25 \cos 49^0{,}25 + \sin 49^0{,}25 \sin 49^0{,}25 \cos 64^0{,}33 = 0{,}6775$$

$$c = 47^0{,}57 = \frac{47{,}57}{180}\pi \;\; rad = \;0{,}8302 \;\; rad$$

Længden af c findes ved at gange radiantallet med jordens radius R = 6370 km:

$$d_c = cR = 5288 \; km = \frac{5288}{1854} sm = 2853 \;\; sm$$

Hvilket er strækningen man skal tilbagelægge mellem Oporto og New York langs en storcirkelbue.

Hvis man derimod sejler stik vest, så sejler man langs en lillecirkel med radius: $r = R \sin a$.
Så denne radius bliver r = 6370 sin 49,25 *km* = 4825 *km*.

Den bue, der tilbagelægges er vinkelbuen mellem de to længdegrader. $C = 64^0,33 = 1{,}1228 \;\; rad$.
For at bestemme strækningen d_r skal man multiplicere buen med radius i lillecirklen r.

$$d_r = 4825 \cdot 1{,}1228 \; km = 5417 \; km = 2922 \; sm.$$

Forskellen i sømil mellem de to ruter er derfor 2922 – 2853 = 69 sømil = 128 *km*.