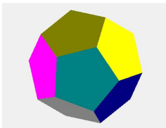
SPIL

Sandsynligheder og Strategier



Ole Witt-Hansen Køge Gymnasium 1998 (2016)

Indhold

Kap 1. Sandsynligheder ved spil

1. Lotto

Ved lottospil, går det som bekendt ud på at gætte 7 tal ud af 36 mulige. Foruden de 7 lotto tal bliver der også udtrukket 1 tillægstal. Man opnår præmier på følgende måde:

1. præmie ved at gætte alle 7 rigtige.
2. præmie for at gætte 6 rigtige plus et tillægstal .
3. præmie for at gætte 6 rigtige.
4. præmie for at gætte 5 rigtige.
5. præmie for at gætte 4 rigtige.

Vi vil indlede med at udregne sandsynlighederne for at få hver af disse præmier, når man udfylder én række.

Vi skal her minde om definitionen af sandsynligheden for en hændelse H i et Symmetrisk Sandsynlighedsfelt, hvor $n(U)$ er det mulige antal udfald og $n(H)$ er antallet af udfald i H.

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(U)} = \frac{Antal\ elementer\ i\ H}{Antal\ elementer\ i\ U} = \frac{Gunstige}{Mulige}$$

Antallet af forskellige måder, hvor man kan udvælge en delmængde på q elementer af en mængde på n elementer er:

$$K(n,q) = \frac{n!}{q!(n-q)!}$$

De mulige måder at udvælge 7 tal ud af 36 er derfor:

$$K(36,7) = \frac{36!}{7!(36-7)!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8.347.680$$

Følgelig er sandsynligheden for 7 rigtige

$$P(7) = \frac{1}{K(36,7)} = p_7 = 1{,}1979\cdot 10^{-7}$$

Når vi skal udregne sandsynligheden for 6 rigtige tal plus et tillægstal, ræsonnerer vi på følgende måde:
De 6 rigtige kan vælges ud af 7 på $K(7,6) = 7$ forskellige måder, og tillægstallet kan vælges på 1 måde. Da vi både skal have 6 rigtige og et tillægstal rigtigt, skal de to antal muligheder multipliceres for at finde antallet af gunstige udfald.

$$P(6\text{ rigtige} + 1\text{tt}) = K(7,6)\cdot 1/K(36,7) = 7/K(36,7) = 7\cdot p_7 = 8{,}330\cdot 10^{-7}$$

På samme måde kan vi finde sandsynligheden for 6 rigtige, idet antal gunstige er $K(7,6)$ gange med antal måder ”det forkerte tal” kan vælges på, nemlig 36 –7 –1 = 28 måder, idet det forkerte tal hverken må være et af de 7 rigtige eller et tillægstal.

$$P(6 \text{ rigtige}) = K(7,6)\cdot 28/K(36,7) = 196\cdot p_7 = 2{,}3479\cdot 10^{-5}$$

Sandsynligheden for 5 rigtige tal findes som antallet af måder at udtage 5 rigtige ud af 7 lig med $K(7,5)$, gange antallet af muligheder for de to sidste tal, som kan vælges blandt 36 - 7 = 29 tal. Dette antal er $K(29,2)$.

$$P(5 \text{ rigtige}) = K(7,5)\cdot K(29,2)/K(36,7) = 8526\cdot p_7 = 1{,}02\cdot 10^{-3} = 1{,}02 \text{ ‰}$$

På helt samme måde opskriver vi sandsynligheden for 4 rigtige, idet de gunstige er $K(7,4)\cdot K(29,3)$, nemlig 4 rigtige udvalgt blandt 7, gange 3 ”forkerte” udvalgt blandt 29.

$$P(4 \text{ rigtige}) = K(7,4)\cdot K(29,3)/K(36,7) = 127.890\cdot p_7 = 0{,}0153 = 1{,}53\%$$

Af ovenstående fremgår, at chancen for at få mere end 4 rigtige er uhyre ringe. Til gengæld er der en rimelig chance for at få 4 rigtige. Dette er gjort helt bevidst for dem, der har planlagt spillet. Erfaringen viser nemlig, at hvis man aldrig vinder, holder man op med at spille efter en vis tid.

Lad os antage at man hver uge udfylder en kupon med 10 rækker. Først udregner vi chancen for at få 4 rigtige på mindst én af kuponerne. Hændelsen "4 rigtige" er binomialfordelt, med antalsparameteren n =10.

For at finde denne sandsynlighed, udregner vi først sandsynligheden for den komplementære hændelse "Ikke 4 rigtige på nogen af kuponerne"

$$P(\text{Ikke 4 rigtige på nogen af kuponerne}) = (1-p_4)^{10} = 0{,}9847^{10} = 0{,}8557$$

$$P(\text{4 rigtige på mindst én af kuponerne}) = 1 - P(\text{Ikke 4 rigtige på nogen af kuponerne}) = 0{,}1443$$

Man har altså knap 15% chance for at få 4 rigtige på mindst en af de 10 rækker.

Antager vi nu, at man spiller 10 rækker i 5 uger, vil vi udregne sandsynligheden for, at man ikke får 4 rigtige på nogen af de 5 uger.

$$P(\text{ikke 4 rigtige i 5 uger}) = 0{,}8557^5 = 0{,}4487$$

Der er således godt 50% chance for at man får 4 rigtige mindst en gang på 5 uger.
Det er formodentlig det, som holder spillet i gang. Vinder man, får man udbetalt ca. 40 kr. , som kan sammenlignes med udgiften til en kupon 5·40 =200 kr.

Middelgevinsten på en kupon til 40 kr., hvis vi kun ser på 4 rigtige og sætter præmien 40 kr. er:

$$-40\cdot P(\text{ikke 4 rigtige på de 10 kuponer}) + 40\cdot P(\text{4 rigtige}) = -40\cdot 0{,}8557+40\cdot 0{,}1443 = -2.85 \text{ kr.}$$

øvelser

1. Udregn hvor mange uger man skal spille 10 rækker for, at der er mere end 50% chance for at vinde 4. præmie (5 rigtige). Opgaven skal løses med logaritmer.

2. Forsøg at udregne samme som ovenfor, blot med en 1. præmie.

3. En udfyldt række på 7 tal, "dækker" åbenbart over $K(7,4) \cdot K(29,2)$ forskellige rækker med 4 rigtige. Hvor mange rækker skal man mindst udfylde for at være sikker på at få 4 rigtige.

2. Poker

Vi antager at Poker spilles med et almindeligt spil kort, og at hver spiller får 5 kort fra begyndelsen. Vi vil ikke beskæftige os med at købe nye kort, da det er alt for kompliceret, men kun udregne sandsynlighederne for de forskellige kombinationer af kort, der kan slå hinanden.

Flush betyder i Poker sammenhæng 5 kort i samme farve og Straight betyder 5 kort i rækkefølge. Rangfølgen af kortfarverne er i øvrigt de samme som i Bridge: Spar, Hjerter, Ruder, Klør.

Rangfølgen af kortkombinationer i Poker er følgende:

Royal Flush:	De 5 højeste kort i samme farve. F.eks. es, konge, dame, knægt, 10 i ruder
Straight Flush:	5 kort i rækkefølge i samme farve.
Fire ens:	4 ens kort. (5. kort underordnet)
Full House:	3 ens + 2 ens (et par)
Flush:	5 kort i samme farve.
Straight:	5 kort i rækkefølge.
Tre ens:	tre ens kortværdi.
To par:	2 ens + 2 ens.
Et par:	2 ens.
Højeste kort:	

Sandsynlighederne for hver af disse kortkombinationer kan udregnes, idet de mulige kombinationer af 5 kort udtaget af 52 er $K(52,5) = 2.598.960$.

Royal Flush :Der er 4 forskellige *Royal Flush* – en i hver farve.

$$P(Royal\ flush) = \frac{4}{K(52,5)} = 6{,}156 \cdot 10^{-6}$$

Straight Flush :Der kan i hver af de 4 kortfarver laves 9 forskellige *Straight Flush*. En af dem er Royal.

$$P(Straight\ Flush) = \frac{4(9-1)}{K(52,5)} = \frac{32}{K(32,5)} = 4{,}925 \cdot 10^{-5}$$

Fire ens: Der er 13 forskellige muligheder for *fire ens*. Det femte kort kan vælges på 52 - 4 = 48 forskellige måder.

$$P(4\ ens) = \frac{13 \cdot 48}{K(52,5)} = \frac{624}{K(52,5)} = 2,401 \cdot 10^{-4}$$

Full House: Der er 13 forskellige muligheder for 3 ens. De 3 kan udtages på $K(4,3)$ forskellige måder. De to ens må nødvendigvis have en anden talværdi, hvoraf resultatet følger.

$$P(Full\ House\text{: } 3\ ens + 2\ ens) = \frac{13 \cdot K(4,3) \cdot 12 \cdot K(4,2)}{K(52,5)} = \frac{3744}{K(52,5)} = 1,400 \cdot 10^{-3}$$

Flush: 5 kort i samme farve kan udtages på $K(13,5)$ måder. Der er 4 kortfarver. Vi må subtrahere *Straight Flush'er* fra.

$$P(Flush\text{: } 5\ i\ samme\ farve) = \frac{4 \cdot K(13,5) - 32 - 4}{K(52,5)} = \frac{5112}{K(52,5)} = 1,967 \cdot 10^{-3}$$

Straight: Der er 13 - 4 = 9 forskellige rækkefølger. Hver af de 5 kortværdier kan vælges blandt 4 farver. Vi skal fratrække *Straight Flush*.

$$P(Straight\text{: } 5\ i\ rækkefølge) = \frac{9 \cdot 4^5 - 36}{K(52,5)} = \frac{9180}{K(52,5)} = 3,53 \cdot 10^{-3}$$

Tre ens: Der er 13 kortværdier, og der skal udvælges 3. De sidste to kort kan udvælges blandt 52 - 4 = 48 kort (ikke 49, da det kunne give 4 ens). Vi må dog fratrække de $12 \cdot K(4,2)$ par, der kan dannes og som ville give *Full House*.

$$P(3\ ens) = \frac{13 \cdot K(4,3) \cdot (K(48,2) - 12 \cdot K(4,2))}{K(52,5)} = \frac{54912}{K(52,5)} = 2,113 \cdot 10^{-2}$$

To par: Først udregnes antallet af muligheder for de to par. Faktoren ½ skyldes, at man ved denne optælling tæller de mulige kombinationer. Et par f.eks. (spar dame, hjerter dame), vil både være at finde blandt de $13 \cdot K(4,2)$ og de $12 \cdot K(4,2)$ muligheder. Det sidste kort kan vælges blandt 52 – 8 som danner de to par.

$$P(2\ par) = \frac{\frac{1}{2} 13 \cdot K(4,2) \cdot 12 \cdot K(4,2)(52-8)}{K(52,5)} = \frac{123.552}{K(52,5)} = 4,75 \cdot 10^{-2}$$

Et par: De første 3 faktorer i tælleren er antallet af måder at få *et par* på. Vi bliver nødt til at subtrahere mulighederne for 2 *par* og *Full House*.

$$P(1\ par) = \frac{13 \cdot K(4,2) \cdot K(48,3) - 123.552 - 3755}{K(52,5)} = \frac{1221781}{K(52,5)} = 0,4701$$

Hermed har vi afsluttet vores gennemgang af sandsynlighederne i *Poker*. Bemærk, at sandsynlighederne følger rangen af en Pokerhånd.

3. *Ruinsandsynligheder ved Roulette mv.*

Beregningen af "ruinsandsynligheder" er noget, som er helt afgørende for forsikringsvirksomhed, hvis denne skal drives forretningsmæssigt. Sammenhængen mellem ruinsandsynligheder og beregning af præmiestørrelserne en ret kompliceret matematisk teori, som betegnes forsikringsmatematik. På universiteterne findes en særlig uddannelse, som kaldes aktuar studiet, som har dette som speciale.
Forsikringsmatematik kan illustreres ved at betragte roulettespil på et Casino.

En roulette har 37 felter, nummereret 0 – 36. Hvis man vinder på et felt får man udbetalt 36 gange indsatsen. Da man har lagt en indsats, er gevinsten 35 indsatser.

Hvis X er den stokastiske variabel, som betegner en spillers gevinst, så antager X værdierne +35 med sandsynlighed 1/37 og –1 med sandsynlighed 36/37.

$$P(X = 35) = 1/37 \quad \text{og} \quad P(X = -1) = 36/37 .$$

Middelgevinsten, når man spiller på et felt, er følgelig:

(3.1)
$$E(X) = \sum_{u \in U} X(u)P(u) = 35\frac{1}{37} + (-1)\frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$$

Hvis spilleren i stedet vælger at spille på m felter, antager gevinsten X, værdierne 36 - m med sandsynlighed m/37 og –m med sandsynligheden (37 - m)/37 = 1 - m/37.
Middelgevinsten bliver herefter:

$$E(X) = \sum_{u \in U} X(u)P(u) = (36 - m)\frac{m}{37} + (-m)(1 - \frac{m}{37}) = -\frac{m}{37}$$

Middelgevinsten pr. indsats er således uafhængig af, hvor mange felter man spiller på.

Hermed er det slået fast: Der findes intet system, der kan bringe én i stand til at vinde på en roulette på længere sigt. Dette er en simpel matematisk kendsgerning, som mange har måttet erkende på en betydelig mere smertelig måde.

Specielt, hvis man spiller på m = 18 felter er gevinsten 36-18=18 med sandsynlighed 18/37 og –18 med sandsynlighed 19/37.

Selvom en spiller ikke kan vinde i det lange løb, har spilleren på grund af tilfældigheder (som spillere foretrækker at kalde held) mulighed for at vinde betragtelig store beløb.

Vi vil nu lave nogle betragtninger over, hvor stor sandsynlighed en spiller har for at "sprænge banken", dvs. at ruinere et Casino.
En sådan beregnet sandsynlighed kaldes for *ruin sandsynligheden*.

Vi antager at Banken råder over n-enheder (indsatser). Vi ønsker at vurdere sandsynligheden for at en uendelig rig spiller, der gør den samme indsats i hvert spil, vinder n eller flere enheder, når der ikke er nogen begrænsning på antallet af spil.
Ruinsandsynligheden for banken betegner vi r_n.

Hvis X_1, X_2, X_3,.. betegner Casino'ets gevinst ved de enkelte spil er:

$$G_k = X_1 + X_2 + X_3 + .. + X_k$$

gevinsten efter k-spil. Ruinsandsynligheden kan derfor formuleres derhen, at

$$r_n = P(G_k \leq 0 \text{, for et eller andet } k)$$

(Der er ingen umiddelbar sammenhæng mellem n og k.)

Der gælder rekursions-formlen:

$$r_{n+1} = r_n r_1 ,$$

som udtrykker, at sandsynligheden for at blive ruineret med n+1 enheder er lig sandsynligheden for at blive ruineret med n enheder gange sandsynligheden for at blive ruineret med én enhed.
Dette, fordi vi antager at hvert spil er uafhængigt af de øvrige.
Heraf følger umiddelbart:

$$r_2 = r_{1+1} = r_1 r_1 = r_1^2 . \; r_3 = r_{2+1} = r_2 r_1 = r_1^3$$

og følgelig:

$$r_n = r_1^n$$

For at beregne en ruinsandsynlighed, ser vi først på tilfældet, hvor en spiller sætter sin indsats på 18 felter pr. spil. Her er Casino'ets gevinst +18 eller –18 pr spil. For nemheds skyld, sætter vi de 18 indsatser til at være en enhed = 1.

Vi opstiller da følgende rekursionsligning, som tager udgangspunkt i det første spil.
Sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n enheder er lig med:
Sandsynligheden for at banken vinder det første spil (hvor den vinder en enhed) gange sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n+1 enheder, plus
sandsynligheden for at banken taber det første spil (hvor den mister en enhed) gange sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n-1 enheder.
Sandsynlighederne for at banken vinder og taber er 19/37 og 18/37.

Vi kan da opstille ligningen.

$$r_n = \frac{19}{37} r_{n+1} + \frac{18}{37} r_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad r_1^n = \frac{19}{37} r_1^{n+1} + \frac{18}{37} r_1^{n-1}$$

For at opnå det sidste udtryk, har vi anvendt resultatet af rekursionsligningen: $r_n = r_1^n$
Det er relativt nemt at bestemme r_1 ud fra denne ligning. Ved division af ligningen med r_1^{n-1} får man:

$$r_1 = \frac{19}{37} r_1^2 + \frac{18}{37} \Leftrightarrow 19r_1^2 - 37r_1 + 18 = 0$$

Den sidste 2.gradsligning kan løses på normal vis, idet diskriminanten $d = 37^2 - 4 \cdot 19 \cdot 18 = 1$, så

$$r_1 = \frac{37 \pm 1}{2 \cdot 19} \Leftrightarrow r_1 = \frac{36}{38} = \frac{18}{19} \vee r_1 = 1$$

Vi er kun interesseret i løsningen $r_1 = 18/19$.

Ifølge ovenstående er $r_n = r_1^n = (\frac{18}{19})^n$.

Vi vil herefter besvare spørgsmålet: Hvor mange enheder skal banken have, for at der er mindre end 1% chance for ruin. Dette er ensbetydende med at løse ligningen:

$$(\frac{18}{19})^n \leq 0.01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{18}{19})} = 85.17$$

Husker vi, at en enhed svarede til 18 indsatser, giver dette beskedne 1533 indsatser.

Hvis en spiller derimod spiller på sædvanlig vis med kun at placere en indsats på ét felt, er dette - lidt overraskende – betydelig mere risikabelt for banken.

Vi opstiller igen en rekursionsligning, med udgangspunkt i det første spil:
Sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n enheder er lig med:
Sandsynligheden for at banken vinder det første spil (hvor den vinder en enhed) gange sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n+1 enheder, plus
sandsynligheden for at banken taber det første spil (hvor den mister 35 enhed) gange sandsynligheden for at banken bliver ruineret med n-35 enheder.
Sandsynlighederne for at banken vinder og taber er 36/37 og 1/37.

Vi kan da opstille ligningen.

$$r_n = \frac{36}{37} r_{n+1} + \frac{1}{37} r_{n-35} \Leftrightarrow r_1^n = \frac{36}{37} r_1^{n+1} + \frac{1}{37} r_1^{n-35}$$

Ved division med $(r_1)^{n-35}$ og omordning af leddene og ved at sætte $r_1 = x$ får man ligningen:

$$36x^{36} - 37x^{35} + 1 = 0$$

Denne ligning kan kun løses ved numeriske metoder, og man finder løsningen x = 0,9984.
Hvis vi igen stiller spørgsmålet: Hvor mange indsatser skal banken råde over, for at der er mindre end 1% chance for ruin, skal vi løse ligningen:

$$(0{,}9974)^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9984)} = 2876$$

Altså en betydelig større beholdning, end hvis spilleren spiller på 18 felter.

Forsøger vi at udregne ruinsandsynligheden for en *spiller*, der har *n* enheder og lægger sin indsats på ét felt, kommer vi efter helt det samme ræsonnement frem til følgende rekursionsligning.

$$r_n = \frac{36}{37} r_{n-1} + \frac{1}{37} r_{n+35} \quad \Leftrightarrow \quad r_1^{\,n} = \frac{36}{37} r_1^{\,n-1} + \frac{1}{37} r_1^{\,n+35}$$

som fører til ligningen: $x^{36} - 37x + 36 = 0$. Denne ligning har kun løsningen $x = 1$.
Differentieres nemlig $f(x) = x^{36} - 37x + 36$, finder man: $f'(x) = 36x^{35} - 37$. Ligningen $f'(x) = 0$ har løsningen: $x = \sqrt[35]{\frac{37}{36}} > 1$. Da $f'(x) < 0$ for $x < 1$, har den ingen rødder mindre end 1.
Ruin-sandsynligheden for en spiller, der går på et Casino, som har en ubegrænset beholdning er 1.

Så vi kan endnu engang fastslå, at hvis man fortsætter med at spille på et Casino, vil man altid blive ruineret i det lange løb.

Man kunne selvfølgelig overveje ruinsandsynlighederne, hvis Casino har beholdningen *n* og en spiller har beholdningen *m*, ($n > m$ eller omvendt), men svaret vil afhænge af *n* og *m*, og de indgående to ulineære ligninger med to ubekendte med meget høje eksponenter er ikke så nemme at løse numerisk – selv på en Computer. Hvis $n >> m$, vil svaret stort set være det samme.

Kap 2. Strategier ved spil

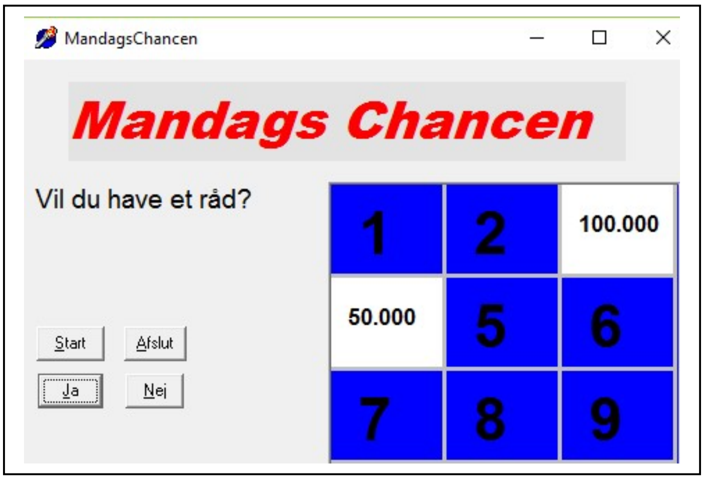
1. *Forskellige spil*

Efter at have udregnet vindersandsynligheder i forbindelse med spil, skal vi nu se på noget andet, som også er knyttet sammen med sandsynlighedsregningen, nemlig problemet med at fastlægge den bedste strategi, når man spiller et "spil".
Her skal spil imidlertid forstås i en meget videre betydning, det være sig krig, børsspekulation, jagt eller fiskeri på en bestemt dyreart. Sidstnævnte er dog alt for komplicerede til at kunne behandles elementært. Fælles er det dog, at man skal kunne beregne sandsynligheden for en bestemt konsekvens af et givet træk.

Vi vil begynde med at give nogle meget simple eksempler på "spil", hvor det er meningsfuldt at tale om optimal strategi.
Vendingen "den optimale strategi" indebærer, at spillet afvikles i et endeligt antal trin, og at der for hvert trin i spillet er mulighed for at forbedre sin gevinst og mulighed for at miste sin gevinst helt eller delvis. Man skal endvidere have mulighed for at standse spillet ved ethvert trin og inkassere sin gevinst.

1.1 *Mandags-chancen*

I dette spil, som har været lanceret af TV2, har man en række tildækkede felter med beløb (10,10,25,25,50,50,100,100,250) x 1000 kr.
Man har maximalt 3 forsøg. Man får beløbet på det sidst afdækkede felt. Nedenfor er vist en computer simulation af spillet efter 2. træk.

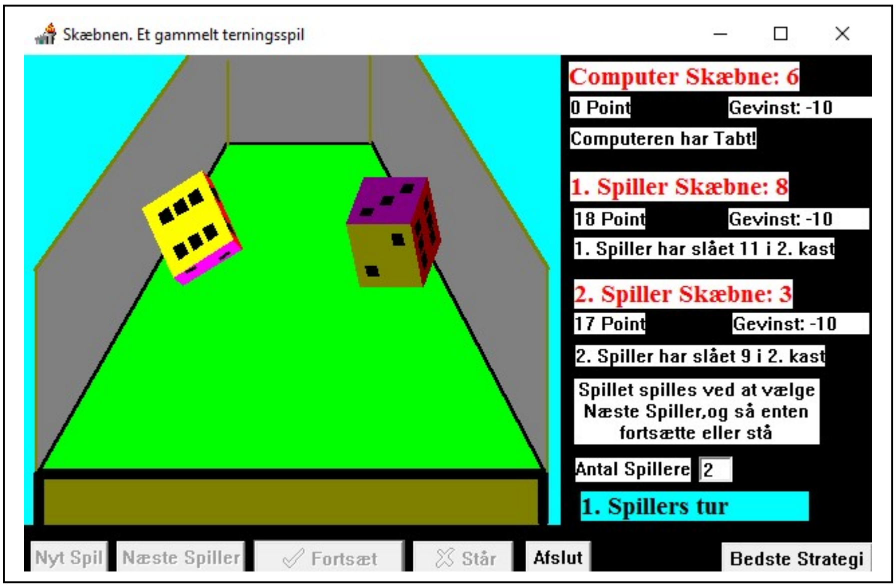


Det er nok klart, at hvis man afdækker et felt med 10 i 1. eller 2. forsøg skal man fortsætte, eller hvis man afdækker et felt med 100 eller 250 i 1. eller 2. forsøg skal man standse. Men hvad hvis man afdækker et felt med 50 i 1. eller 2. forsøg?
Det vil vi forsøge at afgøre ved nogle mere matematiske betragtninger.

1.2 *"Skæbnen"*

Et spil, som vist nok kommer fra orienten. Det spilles med to terninger. Først slår man et slag med de to terninger, og summen af deres øjental betegnes *skæbnen*.

Man kan nu slå, lige så mange gange man vil (max 100). Hvis øjentallene ikke er lig skæbnen, så adderes dette til ens pointtal, men hvis man slår sin skæbne, mister man alt.
Nedenfor er vist et trin i en animeret computer simulation af spillet.



Når spillet er standset, fordeler man indsatsen i forhold til spillernes opnåede pointtal.
Det gælder derfor om at have de største pointtal.

Problemet er imidlertid, hvornår det er optimalt at standse, når man kender sin skæbne.

1.3 *Indbrudstyvens pensionsproblem.*

Dette er en variant af mange forskellige optimeringsproblemer.
Arthur er indbrudstyv. Hver tyvetugt giver i snit K kr. Chancen for at Arthur bliver snuppet er p.
Hvis han bliver taget, mister han alt fra sine tidligere tyvetugter. Hvor mange indbrud skal Arthur lave, før han standser sin karriere og vælger at leve af sin "opsparing"?

1.4 *Tændstikspillet*

Dette spil falder lidt uden for rammerne, af de øvrige spil, fordi man ikke kan standse spillet, og fordi man aldrig kan miste noget af sin gevinst. Det kan derfor ikke umiddelbart behandles på samme måde som de hidtil nævnte spil.
Alligevel er det et spil, der udpræget kan behandles med matematiske teorier for den bedste strategi.

Spillet går ud på, at man på 10 tændstikker farver den ene side rød. Kastes tændstikken op er sandsynligheden for at den farvede side vender opad, når den lander på bordet lig med $p = 0{,}25$.

Hver spiller har fra starten tallene 1..10. Hvert tal må kun bruges 1. gang. Man skiftes til at kaste de 10 tændstikker og notere antallet af farvede tændstikker. Dette antal skal så ganges med et af de resterende tal 1..10. Den som efter 10 spil har den højeste sum har vundet.

Det kan oplyses, og let verificeres, at den maximale gevinst er 550, Middelgevinsten, hvor man vælger tilfældig er 137,5 og den optimale middelgevinst er ca. 167.

1.5 *Casino*

Roulette spil falder også lidt uden for rammerne af "optimale strategier", af den meget simple grund, at odds er svagt imod én. Det gælder dog ikke for Blackjack, hvor man kan udvikle en strategi, som giver en svag fordel. Hvis odds er imod én, vil man imidlertid altid tabe i det lange løb.
Som tidligere fastslået er den eneste mulighed - i det lange løb - for at undgå ruin i roulettespil, at der ikke er nogen øvre grænse for indsatser, og at man har flere penge end Casiono’et, og ingen af disse to betingelser er nogensinde opfyldt.

Enhver fornuftig matematisk spil-teori, vil derfor som resultat have, at man skal standse før det første spil. Det vil sige: Man skal lade være med at gå på Casino.

Denne kendsgerning udelukker dog ikke, at man kan gøre sig overvejelser over hvordan man kan spille, hvis man ikke udelukkende er interesseret i at forære sine penge til et Casino uden kamp.

2. *Optimale Strategier*

Hvis man intuitivt skal formulere en strategi for de 3 første spil nævnt ovenfor, så kan man f.eks. vælge én af 3 følgende strategier:

1. Man beslutter på forhånd, hvor stor ens gevinst (eller tab) skal være, før man stopper. Dette er faktisk en meget "almindelig" strategi, men den er bestemt ikke optimal.

2. Man fortsætter, så længe man i *middel* har mulighed for at forøge sin gevinst i næste spil. Man skal huske på, at middelværdien af "gevinsten" også omfatter tab, så middelværdien (i matematisk forstand) skal være positiv.
   Denne umiddelbart fornuftige strategi, kaldet den *kortsigtede eller myope strategi*, er i mange tilfælde også den optimale strategi, (dog ikke i mandagschancen).

3. Man fortsætter, så længe man i *middel* har mulighed for at forøge sin gevinst i et af de efterfølgende spil. Denne strategi kaldes *den langsigtede strategi*.

Både den kortsigtede og den langsigtede strategi, ser yderst rimelige ud og de vil også være optimale for langt de fleste spil. Hvis der er forskel på den langsigtede og den kortsigtede strategi, skal man anvende den langsigtede - naturligvis.

Der findes imidlertid visse former for "spil", hvor ingen af strategierne er optimale.
Det gælder f.eks. for børsspekulanter, der har en beholdning aktier, som de vil sælge når kurserne stiger. Dette fortsætter som bekendt aldrig i det uendelige. På et vist tidspunkt standser stigningen, og kurserne begynder at falde – som regel – hurtigere end de steg.
Hvornår skal man sælge for at opnå den største gevinst?

Det viser sig - men det er særdeles kompliceret at redegøre for – at når det gælder børs spekulation, så er ingen af strategierne 2. og 3. optimale. De vil begge to i grove træk som resultat have, at man enten skal sælge straks eller vente til man er ruineret!

Vi vil nu give en beskrivelse af "den optimale strategi", som er udviklet af *Snell*. Vi vil overhovedet ikke nærme os et bevis for, at det er den optimale strategi (beviset er ret "teknisk abstrakt"), men understrege, at det kan bevises! I matematisk forstand. Ulemperne ved *Snell*-strategien er, at den for selv simple problemer kan føre til ret omfattende og komplicerede regninger.

2. *Den optimale Snell-strategi*

Snell-strategien er på sin vis den samme som den kortsigtede strategi, men hvor man i denne strategi hele tiden regner sig et skridt frem, så tager Snell-strategien udgangspunkt i spillets slutning og arbejder sig baglæns. Vi indfører først nogle betegnelser:

Vi antager at "spillet" har n trin. S_k er en stokastisk variabel, der angiver den faktiske samlede gevinst, man har opnået ved det k'te spil. S_k kan antage en eller flere værdier med tilhørende sandsynligheder. Det nye ved Snell-strategien er, at man definerer endnu en stokastisk variabel G_k ved ligningen.

$$G_k = \max\{S_k, E(G_{k+1}| S_1..S_k)\}$$

G_k er den største af værdierne S_k (gevinsten efter det k'te spil) og $E(G_{k+1}| S_1..S_k)$), som er middelværdien af den maximale forventede gevinst i det k+1'te spil, når det er givet at man har spillet spillene 1..k. Dette opstilles i et skema.

$G_n = S_n$ Gevinsten ved spillets afslutning

$G_{n-1} = max\{S_{n-1} , E(G_n| S_1..S_{n-1})\}$
.
.
$G_k = max\{S_k , E(G_{k+1}| S_1..S_k)\}$
.
$G_1 = max\{S_1 , E(G_2| S_1)\}$

Snell strategien siger nu, at man skal standse spillet den første. gang S_k (gevinsten efter det k'te spil) overstiger middelværdien af den maksimale forventede gevinst i det k+1'te spil.

Dette kaldes for *stopbetingelsen*. Stopbetingelsen er altså:

$$S_k \geq E(G_{k+1}| S_1..S_k)$$

Man skal altså standse spillet, når den opnåede gevinst er større eller lig med den betingede forventning af den maximale gevinst i det næste spil. Det kunne lyde som den kortsigtede strategi, men forskellen er den, at i den kortsigtede strategi er G_{k+1} erstattet af S_{k+1}.

At kunne gennemskue konsekvenserne af dette, er derimod ikke så nemt.
Det viser sig, at i mange tilfælde at er Snell-Strategien identisk med *den kortsigtede strategi*, som kræver, at man stopper, når $S_k \geq E(S_{k+1}| S_1..S_k)$

Snell strategien er ikke umiddelbart let gennemskuelig, og udregningen af de betingede middelværdier $E(G_{k+1}| S_1..S_k)$ er ofte ret "teknisk".

Vi vil nu behandle de før nævnte eksempler, og begynder med

2.1 *Indbrudstyvens pensionsproblem*

Lad os antage, at Arthurs gennemsnitlige gevinst ved hvert tyvetogt er K = 6.000 kr. og at chancen er at han bliver taget er 5%. Lad os antage at hans hidtidige "gevinst" efter k - tyvetugt er S_k, som bliver konfiskeret - og som han derved mister, hvis han bliver snuppet.

I dette tilfælde kan man - som vist nedenfor - se, at den kortsigtede strategi er den optimale strategi. Det hænger sammen med at alle "trin i spillet" er identiske. Gevinsten ved hvert tyvetogt er den samme – uafhængigt af de foregående tyvetugter - bortset fra, at den samlede gevinst vokser ved hvert vellykket tyvetogt.

X_k betegner den stokastiske variabel, som er Arthur's gevinst ved ét tyvetugt. Hermed er

$$S_k = X_1 + X_2 + X_3 + \dots X_k$$

X_{k+1} kan antage værdien K, med sandsynlighed 1-p_s = 1-P("Snuppet") (altså, hvis det næste tyvetugt lykkes) og værdien –S_k (han mister hele sin "opsparing"), med sandsynlighed p_s = P("Snuppet").

Vi opskriver nu Snell-strategien (Den kortsigtede strategi) for et trin i hans karriere:

$$G_k = max\{ S_k , E(S_{k+1} | 1..k) \}$$

S_k er hans "gevinst" efter k tyvetugter, og $E(S_{k+1}| 1..k)$ er hans forventede gevinst efter k+1 tyvetugter.

$E(S_{k+1}| 1..k)$ kan beregnes som den hidtidige "gevinst" plus den forventede gevinst ved næste tyvetugt i alt lig med $S_k + E(X_{k+1})$. $E(X_{k+1})$ er uafhængig af de første k - tyvetugter, derfor bliver stopbetingelsen:

$$S_k > S_k + E(X_{k+1}) \quad \Leftrightarrow \quad E(X_{k+1}) < 0$$

Middelværdien $E(X_{k+1})$ kan således udregnes efter den sædvanlige definition, idet X_{k+1} antager værdierne K (gevinsten ved et tyvetugt) og - S_k (mister hele sin "opsparing") med sandsynlighederne 1-p_s og p_s henholdsvis.

$$E(X_{k+1}) = K\cdot(1- p_s) - S_k\cdot p_s$$

Han skal standse, når

$$E(X_{k+1}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad K\cdot(1- p_s) < S_k\cdot p_s$$

som med tal eksemplet giver:

$6000\cdot 0,95 < S_k\cdot 0.05 \Rightarrow S_k > 114.000$,- kr. svarende til 114.00/6.000 = 0.95/0.05 = 19 tyvetugter

(Det gør han nu nok ikke, og er derfor henvist til at leve af folkepensionen efter nogle år i skyggen)

Man kunne godt tro, at dette eksempel kunne anvendes på andre (ligeså uetiske) problemstillinger. F.eks. hvor mange gange det er optimalt at køre gratis i S-tog. Det kan det imidlertid ikke helt.

Sagen er jo den, at man får en fast bøde, hvis man bliver snuppet, men man kommer ikke til at betale for de gange man har kørt gratis. Med andre ord, vurderingen om, hvorvidt det er fordelagtigt at køre uden billet, afhænger kun af middelgevinsten ved det næste forsøg. Hvis den er positiv, er det fordelagtigt at fortsætte, men hvis den er negativ, er det fordelagtigt at løse billet. (Det er i øvrigt uetisk at snyde – naturligvis).

Tager vi et eksempel: billetprisen er kr. 50,- Bøden er kr. 500. Sandsynligheden for at blive snuppet er $P_s = 0{,}1$. Hvis X er gevinsten ved at køre uden billet, er

$$E(X) = 50\cdot(1-P_s)-500\cdot P_s = 50\cdot 0.9-500\cdot 0.1 = -5{,}0$$

Det er således (med denne sandsynlighed for at blive snuppet) ikke fordelagtigt at køre uden billet i S-tog. Da en lærebog i sandsynligheder ved spil, naturligvis ikke må tilskynde til uetiske handlinger, undlader vi at foretage beregningen med $P_s = 0.05$.

2.2 *"Skæbnen"*

Vi betragter kast med to terninger. X betegner summen af øjentallene ved ét kast. Sandsynlighedsfordelingen for X er velkendt. F.eks. er $P(X=5) = 4/36$.
Sandsynligheden for at terningerne viser j øjne kan skrives som:

$$P(X=j) = \frac{6-|7-j|}{36}$$

Lad os antage at spillerens "skæbne" er q. Hvis man slår dette øjental er alt tabt. Ellers adderes øjentallene for hvert kast.

Hvis ikke man har slået sin "skæbne", så er den samlede gevinst efter n spil:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n.$$

Og middelværdien af S_n er

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = n\cdot E(X \mid X \neq q).$$

$E(X \mid X \neq q)$ er den betingede middelværdi af øjentallene, givet at man ikke slår sin skæbne.

$$E(X \mid X \neq q) = 2\cdot P(2) + 3\cdot P(3) + \dots (q-1)\cdot P(q-1) + (q+1)\cdot P(q+1) + \dots + 12\cdot P(12)$$

Den kortsigtede strategi (og Snell strategien) fastslår, at man skal standse, når middelværdien af den forventede gevinst ved næste kast er negativ:

Argumentet for dette kan overtages næsten ordret fra "indbrudstyvens pensionsproblem". $E(S_{k+1}|S_1 .. S_k)$ kan beregnes som den hidtidige gevinst S_k plus den *forventede* gevinst ved det næste kast i alt lig med $S_k + E(X_{k+1}| S_1 .. S_k)$. Stopbetingelsen er derfor:

$$S_k > S_k + E(X_{k+1}| S_1 .. S_k) \quad \Leftrightarrow \quad E(X_{k+1}| S_1 .. S_k) < 0$$

$$E(X \mid X \neq q) - S_n \cdot P(q) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_n > E(X \mid X \neq q) \,/\, P(q)$$

Det er ikke særlig svært at udregne stopbetingelsen f.eks. for $q = 2$ og $q = 6$.

Nedenfor er vist udskriften fra et program, som foretager beregningen for $q = 2..12$

Forventet gevinst i næste kast, når ens skæbne er *q*

q:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	6.94	6.83	6.67	6.44	6.17	5.83	5.89	6.00	6.17	6.39	6.67

Stop når din gevinst S > EX(*q*)/*P*(*q*), når skæbne er *q*

q:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	250.00	123.00	80.00	58.00	44.40	35.00	42.40	54.00	74.00	115.00	240.00

Som det fremgår, er der endog meget stor forskel på stoptiderne afhængig af ens "skæbne

2.3 *"Mandagschancen"*

Dette spil er lidt mere interessant, fordi det ikke er helt så enkelt at gennemskue.
I dette tilfælde kan man ikke forvente, at den kortsigtede strategi vil føre til den optimale strategi. At den faktisk gør det skyldes talværdierne. Dette skal forstås således, at hvis man ændrede på præmiestørrelserne ville Snell-strategien afvige fra den kortsigtede strategi. Vi vil analysere spillet ved Snell-strategien.

Som nævnt, har man i spillet 9 tildækkede felter (10,10,25,25,50,50,100,100,250). Man kan afdække højest 3 felter. Man får beløbet i 1000 kr., som det sidste felt viser. Hvis X er den stokastiske variabel, som angiver værdien af et felt, så vil de fleste uden så lange overvejelser vel fortsætte, hvis X<50 og standse, hvis X≥100. Det kritiske er, hvis man afdækker 50 (X=50).
Vi bemærker først at summen af alle felterne er S=620 og at $E(X)$ =620/9=68,9

Vi opskriver først den fuldstændige Snell-strategi for dette spil.

$G_3 = X_3$	Den Stokastiske variabel G_3 = Gevinsten = X_3 = værdien af det sidst afdækkede felt.
$G_2 = max\{ X_2 , E(G_3 \mid X_1,X_2)\}$	Den største af værdierne X_2 (= værdien af det afdækkede felt) og den betingede middelværdi af $G_3 = X_3$.
$G_1 = max \{ X_1 , E(G_2 \mid X_1) \}$	Som ovenfor.

Kriteriet for den optimale strategi er som tidligere:

Stop, hvis på noget trin: $X_k > E(G_{k+1} \mid X_{1..}X_k)$

Det er relativ nemt, at opstille en formel for $E(G_3 \mid X_1,X_2)$. Når X_1 og X_2 er afdækket er summen de resterende felter $S - X_1 - X_2$. Da alle felter har samme sandsynlighed er middelværdien simpelthen middeltallet af felterne $E(G_3 \mid X_1,X_2) = (S - X_1 - X_2)/(9\text{-}2)$.

Det er noget mere teknisk at opstille en formel for $E(G_2 | X_1)$ og også lidt teknisk at foretage beregningen. Vi vil nøjes med at skitsere beregningen for en værdi af X_1 og i øvrigt henvise til resultatet af et Computerprogram, som kan ses nedenfor.

Lad os antage, at $X_1 = 25$. Vi lader nu X_2 gennemløbe alle de mulige værdier (alle værdier skal tælles med det antal gange, der er felter med denne værdi). For hver værdi af X_2, (f.eks. 50), skal vi vælge max af X_2 og $E(G_3 | X_1, X_2) = (S - X_1 - X_2)/(9\text{-}2)$, (= (620-50-25)/7 = 77,8 i dette tilfælde), og addere det til en sum S_2 . $E(G_2 | X_1)$ er da lig med $S_2/(9\text{-}1)$ (da der er 9-1 felter X_2)

```
   X2[1]=   10.00   E(G3)=   85.71   G2=   85.71
   X2[2]=   25.00   E(G3)=   83.57   G2=   83.57
   X2[3]=   50.00   E(G3)=   80.00   G2=   80.00
   X2[4]=  100.00   E(G3)=   72.86   G2=  100.00
   X2[5]=  250.00   E(G3)=   51.43   G2=  250.00
X1[1]=   10.00   E(G[2])=  107.86

   X2[1]=   10.00   E(G3)=   83.57   G2=   83.57
   X2[2]=   25.00   E(G3)=   81.43   G2=   81.43
   X2[3]=   50.00   E(G3)=   77.86   G2=   77.86
   X2[4]=  100.00   E(G3)=   70.71   G2=  100.00
   X2[5]=  250.00   E(G3)=   49.29   G2=  250.00

X1[2]=   25.00   E(G[2])=  106.79

   X2[1]=   10.00   E(G3)=   80.00   G2=   80.00
   X2[2]=   25.00   E(G3)=   77.86   G2=   77.86
   X2[3]=   50.00   E(G3)=   74.29   G2=   74.29
   X2[4]=  100.00   E(G3)=   67.14   G2=  100.00
   X2[5]=  250.00   E(G3)=   45.71   G2=  250.00

X1[3]=   50.00   E(G[2])=  105.00

   X2[1]=   10.00   E(G3)=   72.86   G2=   72.86
   X2[2]=   25.00   E(G3)=   70.71   G2=   70.71
   X2[3]=   50.00   E(G3)=   67.14   G2=   67.14
   X2[4]=  100.00   E(G3)=   60.00   G2=  100.00
   X2[5]=  250.00   E(G3)=   38.57   G2=  250.00

X1[4]=  100.00   E(G[2])=   96.43

   X2[1]=   10.00   E(G3)=   51.43   G2=   51.43
   X2[2]=   25.00   E(G3)=   49.29   G2=   49.29
   X2[3]=   50.00   E(G3)=   45.71   G2=   50.00
   X2[4]=  100.00   E(G3)=   38.57   G2=   100.00

X1[5]=  250.00   E(G[2])=   62.68
```

Ser man resultaterne igennem, kan de udmøntes i en simpel regel. Fortsæt på 50 eller derunder. Stop på 100 eller derover. Det er måske lidt overraskende, at man også skal forsætte på 50.000, hvis man kun har et forsøg tilbage – man kunne jo ende med 10.000 og det er så bare ærgerligt – og det er vist nok de fleste, som standser ved 50.000 - men det er ikke den bedste strategi.

2.4 *Casino*

Som nævnt i indledningen til dette afsnit, findes der ingen strategi, som kan bringe en i stand til at vinde på et Casino – i det lange løb. Vil man gøre Casino-spil til en levevej, vil det altid med matematisk sikkerhed ende med ruin.

Det betyder imidlertid ikke, at man ikke kan vinde ved at gå på Casino, men hvis man tænker på at sprænge banken, så skal to krav i hvert fald være opfyldt for, at der skal være en ikke forsvindende sandsynlighed for, at det kan lade sig gøre

1. Man skal have flere penge end Casino.
2. Der må ikke være loft over indsatserne.

Begge betingelser er som bekendt aldrig opfyldt.

Man kan som sagt godt vinde på et Casino, men hvis man satser på at vinde mere (alle de gange man er på Casino i sit liv) end det beløb man medbringer ved hvert besøg, så vil chancerne for at tabe det hele være størst. Her er der tale om sandsynligheder og middelværdier – om odds. Selvfølgelig er de muligt at tabe hele sin formue ved første besøg eller vinde det tredobbelte ved det andet.

Der har i tidens løb været lanceret flere eksempler på vinderstrategier, som lyder uhyre besnærende. Den mest kendte er Martingale-systemet.

Man spiller kun på sort og rød, hvor får man får fordoblet sin indsats, hvis man vinder. Spillet er således helt lige, bortset fra, at indsatserne bliver liggende når zero kommer ud, og man kun får sin indsats en gang, hvis man vinder i næste spil (zero har ingen farve).

Spiller man efter Martingale-systemet, skal man inkassere sin gevinst, hvis man vinder. Hvis man derimod taber, skal man fordoble sin indsats.

Vi sætter grundindsatsen til 1. Har man spillet *n* gange, og dermed doblet op *n*-1 gange, har man lagt en indsats:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Udregnet af kvotientrækkeformlen

$$S_n = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

for rækken:

$$S_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^{n-1}$$

Vinder man det *n*'te spil får man udbetalt $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, så ens gevinst er $2^n - (2^n - 1) = 1$

Der gælder åbenbart den simple kendsgerning, at bliver man bare ved med at fordoble, så har man altid vundet én indsats!

Før man forsøger sig med dette, skal man dog nok gøre sig klart, hvor mange gange man kan tabe, før man er ruineret.

Sandsynligheden for at man taber 5 spil er $(½)^5$ = 1/32. Man har da tabt $2^5 – 1$ gange værdien af en jeton (i Danmark 50 kr.) dvs. 1.550, kr.

Vil man sikre sig bedre, f.eks. ved at kunne doble op 9 gange, (sandsynligheden for at tabe 10 spil er 1/1024) så skal man komme med kr. 51.150,-, men det kan man ikke engang gennemføre, da højeste indsats i Danmark er 24.000,-

Man kunne imidlertid stille det spørgsmål: Hvis man har n-jetoner, hvad er så sandsynligheden for at vinde q-jetoner, hvis man spiller efter Martingale-systemet.

Dette kan man faktisk godt udregne direkte, men regningerne er ret omfattende. Derimod er resultatet simpelt. Vi vil ikke lave en direkte udregning, men anvende de samme metoder, som vi har anvendt for den bedste strategi.

Vi tager udgangspunkt i det faktum, at sort, rød Casino spil er et lige spil, så middelværdien af gevinsten er 0 ligegyldigt, hvordan man spiller.
Middelværdien (som er nul) af en gevinst på q-jetoner er lig med q gange sandsynligheden $P(q)$ for at vinde q jetoner, minus ens kapital (n jeton'er) gange med sandsynligheden for at man taber det sidste spil som er $1 – P(q)$.

$$q \cdot P(q) - n \cdot (1 - P(q)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(q) = \frac{n}{n+q}$$

Har man f.eks. n = 31 jetoner (1.550,- kr.) er sandsynligheden for at vinde q=10 (500 kr.) lig med 0,756
En rimelig stor sandsynlighed, men altså stadig 25% chance for ruin.
Ønsker man derimod at blive rigtig rig og vinde 10.000,- kr., dvs. q=200, er $P(200)$ = 0,134 .

Konklusionen er den, at satser man på at vinde mere end man medbringer, så er sandsynligheden mindre end ½, men kan man nøjes med mindre, så er sandsynligheden større end ½. Men bemærk dette gælder fra første gang man går ind på et Casino til man beslutter at holde op.

2.5 *Tændstikspillet*

Som beskrevet ovenfor går spillet ud på at farve den ene af siderne rød på 10 tændstikker. Når tændstikken kasten op i luften er sandsynligheden for at den røde side vender opad, når den rammer bordet lig med p=0,25.

Man kaster på skift 10 sådanne tændstikker 10 gange. For hvert kast skal man multiplicere antallet af røde med et af tallene 1..10. Hver tal må kun bruges én gang. Den der får den største sum har vundet. Det er klart at en god strategi i det lange løb vil give en højere sum.

Vi minder om at antallet af X røde tændstikker er binomialfordelt, med primærsandsynlighed p og antalsparameter n=10.

$$P(X=j) = \binom{10}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{10-j} \qquad j = 0,1,2..,10$$

Endvidere vil vi anvende de kumulerede sandsynligheder $P(X \leq j)$ og $P(X \geq j)$.

Nedenfor er vist resultatet af en Computersimulation af spillet.

Primær sandsynligheder for *n*:= 10 og *p*= 0.250 *P*(*X*=j)

```
j:  0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
 0.0563 0.1877 0.2816 0.2503 0.1460 0.0584 0.0162 0.0031 0.0004 0.0000 0.0000

Baglæns kumulerede sandsynligheder P(X>=q)
j:  0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
 1.0000 0.9437 0.7560 0.4744 0.2241 0.0781 0.0197 0.0035 0.0004 0.0000 0.0000

 1. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,}  Faktor= 4
 2. kast. Antal = 4. Vælg mellem { 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9,10,}  Faktor=10
 3. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9,}  Faktor= 5
 4. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9,}  Faktor= 3
 5. kast. Antal = 3. Vælg mellem { 1, 2, 6, 7, 8, 9,}  Faktor= 8
 6. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1, 2, 6, 7, 9,}  Faktor= 6
 7. kast. Antal = 6. Vælg mellem { 1, 2, 7, 9,}  Faktor=9
 8. kast. Antal = 3. Vælg mellem { 1, 2, 7,}  Faktor= 2
 9. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1, 7,}  Faktor= 7
10. kast. Antal = 2. Vælg mellem { 1,}  Faktor= 1
```

Din score er 176

Valget af tallene 1..10 er i dette tilfælde foretaget ud fra den "optimale strategi", som vi vil omtale om et øjeblik.

Før vi analyserer den optimale strategi for dette spil, vil vi forsøge os med en "intuitiv bedste strategi". Vi belyser denne strategi med et konkret eksempel.

Lad os f.eks. antage at vi slår 4 røde i den 3. kast (3. forsøg). De tal vi har tilbage kalder vi (y_8, y_7, y_6, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1). Spørgsmålet om vi skal gange med det største y_8 eller det næststørste y_7 osv.

Vi ræsonnerer da som følger: Hvis sandsynligheden for at slå mere end 4 røde i de resterende 7 kast er større end ½, så skal vi vælge det næststørste.. Vi skærper dette:

Hvis sandsynligheden for at slå mindst 5 røde, mindst en gang i de resterende 7 kast er større end ½, så skal vi vælge det næststørste.

Tilsvarende: hvis sandsynligheden for at slå mindst 5 røde mindst 2 gange i de resterende 7 kast skal vi vælge det 3. største…og sådan fremdeles.

Strategien virker umiddelbart meget plausibel.

Sandsynlighederne kan direkte fås af binomialfordelingen: Først sandsynligheden for at få mindst *q*-røde i et kast. Dette er:

$$P(X \geq q) = \sum_{j=q}^{n} P(X = j) \qquad \text{, hvor } P(X = \text{j}) \text{ er angivet ovenfor}$$

Sandsynligheden for at dette sker mindst r gange i n - k kast er også en binomialfordeling og kan skrives:

$$P(X \geq q;\text{ mindst r gange i } n - k \text{ kast}) = \sum_{j=r}^{n-k} \binom{n-k}{j} P(X \geq q)^j (1 - P(X \geq q))^{n-k-j}$$

Beregningen af disse (110) sandsynligheder gøres nok lettest på en computer.

For at lave en strategi-tabel, gør man det, at for hvert kast, og hvert antal mulige røde, vælger man først det største af de resterende tal. Dernæst beregner man sandsynligheden for at få mindst 1 rød mere i et af de følgende kast. Hvis denne sandsynlighed er større end ½, ser man på det næststørste af de resterende tal. Man beregner så sandsynligheden for at få mindst 1 rød mere i mindst to af de resterende kast. Hvis denne sandsynlighed er større end ½, så vælger man det tredjestørste af de resterende tal og sådan fremdeles….

Det bemærkes, at beregningen skal initialiseres med, at man altid vælger det mindste, hvis man slår 0 røde og altid vælger det største, hvis man slår 10 røde.

Nedenfor er vist en computerberegning af en strategi-tabel. Endvidere er også lavet en såkaldt "Monte-Carlo" simulation. Dette betyder, at man har ladet maskinen spille f.eks. 10.000 spil, spillet efter strategi-tabellen. Nederst er vist hyppighederne for ens score og endelig fordelingsfunktionen for observationerne. (Den kumulerede frekvens).

$P(X = j)$ for n =10 and p = 0.250

j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X =j):	0.056	0.188	0.282	0.250	0.146	0.058	0.0162	0.003	0.0004	0.000	0.000

$P(X>=j)$ for n =10 and p = 0.250

j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X>=j)	1.000	0.944	0.756	0.474	0.224	0.078	0.0197	0.0035	0.0004	0.000	0.000

Strategi tabel:
Tallene refererer ikke til faktorene selv, men til den største næststørste osv.
Eksempel: Hvis man slår 3 røde i den andet kast, så skal man vælge (7) den tredjestørste.

Kast no:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
score										
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1
2	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1
3	8	7	7	6	5	4	3	3	2	1
4	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
7	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Gennemsnitlig score = 164.37

Hyppighed af score:

h(75)= 1	h(80)= 7	h(85)= 3	h(90)= 5	h(95)= 6	h(100)= 34	h(105)= 38
h(110)= 82	h(115)= 68	h(120)=161	h(125)=146	h(130)=320	h(135)=280	h(140)=534
h(145)=425	h(150)=752	h(155)=577	h(160)=878	h(165)=645	h(170)=956	h(175)=651
h(180)=863	h(185)=527	h(190)=609	h(195)=351	h(200)=389	h(205)=180	h(210)=203
h(215)= 93	h(220)= 86	h(225)= 47	h(230)= 32	h(235)= 21	h(240)= 13	h(245)= 8
h(250)= 3	h(255)= 0	h(260)= 4	h(265)= 1	h(270)= 1	h(275)= 0	h(280)= 0

Frekvens of score:

F(80)=0.0008	F(85)=0.0011	F(90)=0.0016	F(95)=0.0022	F(100)=0.0056
F(105)=0.0094	F(110)=0.0176	F(115)=0.0244	F(120)=0.0405	F(125)=0.0551
F(130)=0.0871	F(135)=0.1151	F(140)=0.1685	F(145)=0.2110	F(150)=0.2862
F(155)=0.3439	F(160)=0.4317	F(165)=0.4962	F(170)=0.5918	F(175)=0.6569
F(180)=0.7432	F(185)=0.7959	F(190)=0.8568	F(195)=0.8919	F(200)=0.9308
F(205)=0.9488	F(210)=0.9691	F(215)=0.9784	F(220)=0.9870	F(225)=0.9917
F(230)=0.9949	F(235)=0.9970	F(240)=0.9983	F(245)=0.9991	F(250)=0.9994
F(255)=0.9994	F(260)=0.9998	F(265)=0.9999	F(270)=1.0000	F(275)=1.0000

Som det fremgår af tabellen for $P(X >= j)$ er der kun 7,8% chance for at slå 5 røde eller derover, så gør man det, skal man altid vælge det største af de resterende tal. For 3 eller 4 røde er situationen langt mere uigemmeskuelig, og kun en beregning kan afgøre sagen.

Vi prøver nu at finde den optimale strategi, eller Snell-strategien. Hvad angår spørgsmålet om hvorvidt vi skal vælge den største eller næststørste, så lader det sig faktisk gøre, at beregne Snell-strategien på en computer. De følgende tilfælde bliver derimod for komplicerede, og der anvender vi en svagt forbedret version af vores intuitive strategi.

Forbedringen består i følgende, idet vi illustrerer det med et eksempel.
Lad os sige vi har slået 3 røde og vi overvejer om vi vil gange det med 7 eller 6. Ganger vi med 6, er det fordi vi forventer at slå mindst 4 røde mindst en gang i de resterende kast. Vores score vil være $7 \cdot 3$ og $7 \cdot 4$ henholdsvis, og scoren vil blive forbedret med en faktor 4/3, hvis vi ganger med 6 under forventning af at slå 4 røde.
Vores forbedring af strategien går da ud på, at vi vælger det næststørste 6, hvis sandsynligheden for at slå 4 røde gange den relative forbedring 4/3 er større end ½.

Vi rekapitulerer dernæst Snell-strategien:

$G_{10} = X_{10}$ X_{10} Stokastisk variabel = antallet af røde i det 10 kast

$G_9 = max\{ X_9 , E(G_{10}) \}$ $E(G_{10}) = E(X_{10}) = np = 10 \cdot 0,25 = 2,5$; $X_9 = 0,1,\ldots 10$.

$G_k = max\{ X_k , E(G_{k+1}) \}$ $E(G_k)$ kræver en længere udregning, men den udregnes som en almindelig middelværdi altså som max af de to værdier gange $P(X=X_{k-1})$

$G_1 = max\{ X_1 , E(G_2) \}$

Som eksempel udregner vi $E(G_9)$. Da $E(G_{10})=2,5$, skal vi for $X_9 = 0,1,2$ anvende $E(G_{10})=2,5$ i udregningen.

$$E(G_9) = 2{,}5 \cdot(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))+ 3\cdot P(X=3)+\ldots+10\cdot P(X=10) = 3{,}06$$

Værdierne for $E(G_k)$ er alle udregnet og vist i computerberegningen nedenfor. Bemærk især at de vokser fra 2,5 til 4,25 når k aftager fra 10 til 2

Strategien er nu følgende: Vælg det største af de resterende tal hvis $X_k > E(G_{k+1})$ (altså det antal man har slået er er større end det forventede største antal) ellers vælg det næststørste.
Ved afgørelsen om de 3. største, 4. største osv. anvender vi den hidtidige strategi, med den modifikation, at vi multiplicerer sandsynligheden med den formodede relative forbedring $E(G_{10\text{-}kast})$/antal røde.

En computerberegning, helt svarende til den foregående, men med den ændrede strategi er vist nedenfor. Man bemærker for det første de små ændringer, der er i strategien. Den nye strategi er lidt mindre forsigtig, men den giver altså også pote i form af en forbedring af gennemsnittet på ca. 2,75

Primær sandsynligheder *P*(*X*=j) for *n*:= 10 og *p*= 0.250

j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
***P*(*X*=j):**	0.056	0.188	0.282	0.250	0.146	0.058	0.016	0.0031	0.0004	0.0000	0.0000

Baglæns Kumulerede sandsynligheder: *P*(*X*>=j)

j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
***P*(*X*>=j):**	1.000	0.944	0.756	0.474	0.224	0.078	0.0197	0.0035	0.0004	0.0000	0.0000

E(G[10])= 2.50 E(G[9])= 3.06 E(G[8])= 3.37 E(G[7])= 3.62 E(G[6])= 3.80
E(G[5])= 3.95 E(G[4])= 4.06 E(G[3])= 4.16 E(G[2])= 4.25

kast nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
score										
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1
3	8	7	6	5	5	4	3	2	2	1
4	9	8	7	7	6	5	4	3	2	1
5	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
7	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Gennemsnitlig gevinst ms = 167.27

Hyppigheder af score

h(75)= 1	h(80)= 1	h(85)= 0	h(90)= 3	h(95)= 2	h(100)= 5	h(105)= 4
h(110)= 9	h(115)= 12	h(120)= 12	h(125)= 17	h(130)= 22	h(135)= 28	h(140)= 39
h(145)= 24	h(150)= 49	h(155)= 54	h(160)= 74	h(165)= 63	h(170)=117	h(175)= 63
h(180)= 91	h(185)= 57	h(190)= 72	h(195)= 39	h(200)= 36	h(205)= 35	h(210)= 29
h(215)= 14	h(220)= 21	h(225)= 1	h(230)= 5	h(235)= 1	h(240)= 0	h(245)= 0
h(250)= 0	h(255)= 0	h(260)= 0	h(265)= 0	h(270)= 0	h(275)= 0	h(280)= 0

Frekvens af score

F(80)=0.0020	F(85)=0.0020	F(90)=0.0050	F(95)=0.0070	F(100)=0.0120
F(105)=0.0160	F(110)=0.0250	F(115)=0.0370	F(120)=0.0490	F(125)=0.0660
F(130)=0.0880	F(135)=0.1160	F(140)=0.1550	F(145)=0.1790	F(150)=0.2280
F(155)=0.2820	F(160)=0.3560	F(165)=0.4190	F(170)=0.5360	F(175)=0.5990
F(180)=0.6900	F(185)=0.7470	F(190)=0.8190	F(195)=0.8580	F(200)=0.8940
F(205)=0.9290	F(210)=0.9580	F(215)=0.9720	F(220)=0.9930	F(225)=0.9940
F(230)=0.9990	F(235)=1.0000	F(240)=1.0000	F(245)=1.0000	F(250)=1.0000
F(255)=1.0000	F(260)=1.0000	F(265)=1.0000	F(270)=1.0000	F(275)=1.0000

Måske er det ikke en særlig imponerende forbedring fra den første strategi, men det er en teoretisk milepæl, at man er i stand til at angive den bedste strategi for bestemte typer af spil. Som omtalt har vi ikke forsøgt at bevise, at Snell-Strategien er den optimale Strategi, men det kan bevises.

Det er vigtigt, at notere sig, at i alle de omtalte "spil", har udfaldene være stokastiske variable, dvs. uforudsigelige, men med bestemte sandsynligheder, og at disse sandsynligheder ikke bliver ændret af den strategi man følger.

I mange af de "spil", hvor man ofte møder begrebet strategi: f.eks. skak, krig, finansmarked og markedsføring er dette langt fra tilfældet. Hvis f.eks. alle børsspekulanter fulgte den samme "optimale strategi" med børskursen som stokastisk variabel, ville det nok vise sig at det var den dårligste strategi af alle. Teorien for dynamiske strategier, hvor de stokastiske variable er funktioner af tiden, og af den valgte strategi er teoretisk næsten ufremkommelige.

Indeks