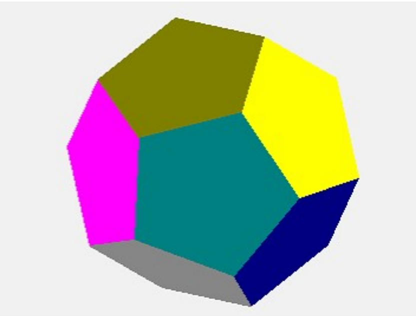
Elementær Matematik

Polynomier



Ole Witt-Hansen Køge Gymnasium
2008

Indhold

1. *Generelle polynomier*

Et polynomium er et udtryk (en funktion) af formen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

Hvor a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , ..., a_1 , a_0 er reelle tal, som kaldes for *polynomiets koefficienter.*

Ved polynomiets *grad* forstår man det største n for hvilket $a_n \neq 0$.
Med denne definition er for eksempel.

$$P(x) = 2x - 3$$

et førstegradspolynomium med koefficienterne $a_1 = 2$ og $a_0 = -3$.

$$P(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2$$

er et andengradspolynomium med koefficienterne $a_2 = -\tfrac{1}{2}$, $a_1 = 0$ and $a_0 = 2$.

$$P(x) = 5 \qquad \text{(En konstant)}$$

er et nultegradspolynomium med $a_0 = 5$.

1.1 Øvelse
Angiv graden og koefficienterne for polynomiet: $P(x) = -x^5 + 2x^3 - 6x$

Funktionen $P(x) = 0$ kaldes for *nulpolynomiet*. Nulpolynomiet tillægges ikke nogen grad**.**
Der findes jo intet n for hvilket $a_n \neq 0$.

Et polynomium, som ikke er nulpolynomiet, kaldes et *egentligt polynomium***.**

Læg mærke til, at *nulpolynomiet* ikke er det samme som et *nultegradspolynomiet*. Et nultegradspolynomium er en konstant forskellig fra nul.

2. *Division med hele tal.*

Før vi forklarer, hvad man forstår ved polynomiers division, vil vi se på almindelig division med hele tal.
Når vi *f*.eks. skal dividere 17 med 3, betyder det matematisk at bestemme to tal, nemlig 5 (kvotienten) og 2 (resten), således at der gælder divisionsligningen: $17 = 5 \cdot 3 + 2$-

At dividere p (*dividenden*) med d (*divisor*) betyder at bestemme to tal q (*kvotienten***)** og r (*resten*), således at der gælder *divisionsligningen,* og således, at graden af resten r er mindre end graden af divisor d.

$$p = q \cdot d + r \quad og \quad r < d$$

Hvis specielt $r = 0$, resten er lig med nul, siges *divisionen at gå op***.**

Ved division med større tal, har man en metode, som kaldes for *divisionsalgoritmen* til at udføre divisionen. Vi viser nedenfor den mest almindelige variant af metoden, idet vi vil dividere 406 med 13.

$$\begin{array}{r|c|l} 13 & 406 & 31 \\ & \underline{39} & \\ & 16 & \\ & \underline{13} & \\ & 3 & \end{array}$$

13 går 3 gange op i 40 og $3 \cdot 13 = 39$. Vi trækker 39 fra 40 og får resten 1.
Vi trækker 6 ned, så der kommer til at stå 16, som ikke er mindre end 13.
Vi fortsætter derfor divisionen: 13 går 1 gang op i $1 \cdot 13 = 13$. $16 - 13 = 3$, som er mindre end divisor 13, og divisionen kan ikke fortsættes. Kvotienten ved divisionen er 31 og resten er 3, så vi kan opskrive divisionsligningen:

$$406 = 31 \cdot 13 + 3$$

Det er lidt omstændeligt, at redegøre for, *hvorfor* divisionsalgoritmen fører til den korrekte divisionsligning, så det undlader foreløbigt beviset, men tager det op igen, når vi ser på polynomiers division, der på mange måder minder om division med hele tal.

Vi bemærker i øvrigt, at divisionsligningen kan opskrives, selv om divisor er større end dividenden. I dette tilfælde bliver kvotienten nemlig 0, og resten lig med dividenden.
F.eks. 7 divideret med 11 kan skrives: $7 = 0 \cdot 11 + 7$

3. *Polynomiers division.*

Vi formulerer nu en sætning om polynomiers division:

For to egentlige polynomier $P(x)$ og $D(x)$ af grad p og d, er det altid muligt at bestemme to polynomier $Q(x)$ og $R(x)$ af grad q og r, således at der gælder divisionsligningen for polynomier

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \quad , \quad hvor \quad r < d$$

altså således at graden af resten $R(x)$ er mindre end graden af divisor $D(x)$.
Man anvender de samme betegnelser *dividend*, *divisor*, *kvotient* og *rest* som for hele tal.

Hvis $R(x) = 0$ (nulpolynomiet), siges *divisionen at gå op*, og man siger da at $P(x)$ er deleligt med $D(x)$.

For overskuelighedens skyld, vil vi gennemføre divisionsalgoritmen med et eksempel, men understrege, at den kan gennemføres for vilkårlige polynomier.

Som eksempel vælger vi:

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 7x + 1 \quad \text{og} \quad D(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

Vi laver da en opstilling, som ved divisionsalgoritmen for hele tal. Algoritmen bliver forklaret nedenfor.

$$
\begin{array}{llll}
 & & Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x) & \\
\underline{2x^2 + 3x - 1|} & 6x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 7x + 1 & | \; \underline{3x^2 - 2x + 1} & \\
 & \underline{6x^4 + 9x^3 - 3x^2} & & Q_1(x)D(x) \\
 & \quad -4x^3 - 4x^2 + 7x + 1 & & R_1(x) = P(x) - Q_1(x)D(x) \\
 & \quad \underline{-4x^3 - 6x^2 + 2x} & & Q_2(x)D(x) \\
 & \qquad 2x^2 + 5x + 1 & & R_2(x) = R_1(x) - Q_2(x)D(x) \\
 & \qquad \underline{2x^2 + 3x - 1} & & Q_3(x)D(x) \\
 & \qquad\qquad 2x + 2 & & R_3(x) = R_2(x) - Q_3(x)D(x)
\end{array}
$$

Vi bemærker, at vi har standset, når graden af resten $R_3\,(x) = 2x+2$ er mindre end resten af divisor. For at lære at udføre algoritmen, kan man i første omgang se bort fra de tilføjelser, som er skrevet til højre for divisionsskemaet.

Man dividerer nu højestegradsleddet i *divisor* $2x^2$op i højestegradsleddet i *dividenden* $6x^4$.

$6x^4$ divideret med $2x^2$ er lig med $3x^2$. Denne kvotient kaldes $Q_1(x)$.

$Q_1(x)$ multipliceres da med *divisor*, og resultatet skrives under *dividenden*.

$$Q_1(x)D(x) = 3x^2\,(2\,x^2 + 3x - 1) = 6x^4 + 9x^3 - 3x^2$$

som subtraheres fra dividenden. Herved fås resten

$$R_1(x) = -4x^3 - 4x^2 + 7x + 1$$

Bemærk at højestegradsleddet $6x^4$ går ud ved subtraktionen, så $R_1(x)$ er mindst en grad lavere end dividenden $P(x)$.
Man gentager nu helt den samme procedure, blot med $R_1(x)$ i stedet for $P(x)$.

$$Q_2(x) = -\,4\,x^3{:}2x^2 = -2x$$

Således fortsættes, indtil man får en rest, som har lavere grad end divisor.

Det er tilstrækkeligt, at man kan gennemføre divisionsalgoritmen for polynomier, men her vil vi nu godtgøre (bevise), at divisionsligningen

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

faktisk er opfyldt, hvis vi vælger:

$$Q(x) = Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x) = 3\,x^2 - 2x + 1 \quad \text{og} \quad R(x) = R_3(x) = 2x + 2$$

Af opstillingen ovenfor fremgår:

$$R_1(x) = P(x) - Q_1(x)D(x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = Q_1(x)D(x) + R_1(x)$$

$$R_2(x) = R_1(x) - Q_2(x)D(x) \quad \Rightarrow \quad R_1(x) = Q_2(x)D(x) + R_2(x)$$

$$R_3(x) = R_2(x) - Q_3(x)D(x) \quad \Rightarrow \quad R_2(x) = Q_3(x)D(x) + R_3(x)$$

Indsætter man nu i ligningerne til højre udtrykket for $R_2(x)$ i den anden ligning og dernæst udtrykket for $R_1(x)$ i den første ligning finder man:

$$P(x) = Q_1(x)D(x) + Q_2(x)D(x) + Q_3(x)D(x) + R_3(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x))D(x) + R_3(x)$$

Indsættes heri:

$$Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) \quad \text{og} \quad R(x) = R_3(x)$$

finder man divisionsligningen

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \qquad \text{hvor} \quad r < d$$

Da divisionsalgoritmen kan gennemføres med vilkårlige polynomier, og da den altid kan fortsættes indtil graden af resten er mindre end graden af divisor, er sætningen bevist.

3.1 Øvelse.
Gennemfør polynomiers division med følgende polynomier:

a) $(2x^3 - 11x^2 + 6x - 5) : (2x^2 - x + 1)$
b) $(4x^5 - 2x^4 - 10x^2 + 8) : (x^3 + 2x - 3)$
c) $(2x^3 + 5x^2 - 6x - 9) : (2x - 3)$
d) $(3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x) : (-3x^4 + x^2 - 5)$

4. *Polynomiers rødder.*

Et tal α siges at være *rod* i polynomiet $P(x)$, hvis

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{altså hvis ligningen } P(x) = 0 \text{ har en løsning} \quad x = \alpha.$$

Et førstegradspolynomium har netop én rod, idet det af $P(x) = ax + b$ følger

$$P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -b/a$$

Som bekendt har et 2.gradspolynomium højst 2 rødder. Rødderne findes på sædvanlig vis ved at løse en 2.gradsligning.
Der findes en løsningsformel for 3.gradsligninger, men løsningsformlen er ret kompliceret og involverer såkaldte komplekse tal. For ligninger af grad højere end 4 findes der ingen løsningsformler. Det betyder imidlertid ikke, at man altid er afskåret fra at løse sådanne ligninger. Dette vil de følgende sætninger belyse.

4.1 Sætning: *α er rod i $P(x)$ hvis og kun hvis $P(x)$ er deleligt med x-α*

Bevis: Ifølge vores sætning om polynomiers division, kan vi dividere $P(x)$ med $x - \alpha$, hvad enten α er rod i $P(x)$ eller ej. Divisionsligningen bliver:

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha) + R(x)$$

Resten $R(x)$ må være en *konstant*, idet restpolynomiet er en grad lavere (eventuelt nulpolynomiet) end $x - \alpha$, som har graden 1. Vi sætter derfor $R(x) = R$
"Hvis og kun hvis..." betyder, at de to udsagn er ensbetydende, og sætningen derfor skal vises begge veje. Vi viser først "$\Rightarrow$"

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(\alpha)(\alpha - \alpha) + R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = 0$$

$R = 0$, så $P(x)$ er deleligt med $x - \alpha$.
Vi viser dernæst "$\Leftarrow$" og antager altså at $P(x)$ er deleligt med $x - \alpha$. Hvis dette er tilfældet er resten $R = 0$, så der gælder ligningen

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha)$$

Ved at indsætte $x = \alpha$, ses umiddelbart at $P(\alpha) = Q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$, så α er rod i $P(x)$.

Sætningen kan blandt andet anvendes til at bestemme samtlige rødder i et polynomium af grad større end 2. Dette vil vi vende tilbage til. Vi er nu i stand til at bevise sætningen:

4.2 Sætning: *Et polynomium af n'te grad har højst n rødder.*

Lad $P(x)$ være et polynomium af n'te grad. Hvis $P(x)$ har roden α_1 er $P(x)$ deleligt med $x - \alpha_1$.

$$P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$$

$Q_1(x)$ er da et polynomium af grad n - 1. Hvis $Q_1(x)$ har roden α_2 er $Q_1(x)$ deleligt med $x - \alpha_2$

$$Q_1(x) = (x - \alpha_2)\, Q_2(x)$$

Indsættes dette i udtrykket for $P(x)$, får man

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, Q_2(x)$$

Her er $Q_2\,(x)$ et polynomium af grad n-2.
På denne måde fortsætter indtil enten Q-polynomiet er af grad 0 (og derfor ikke har nogen rødder) eller, at man efter at have fundet p-rødder, får et polynomium $Q_p\,(x)$, som ikke har nogen rødder.

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\,.\,.\,.\;(x - \alpha_{p-1})(x - \alpha_p)Q_p(x)$$

$Q_p(x)$ er et polynomium af grad $n - p \geq 0$, som ifølge antagelsen ikke har nogen rødder.

Det er nu nemt at indse, at alle tallene α_1 , α_2 , ..., α_{p-1}, α_p er rødder i P(x). Hvis man indsætter et af disse tal i højreside af udtrykket for $P(x)$, vil netop en af faktorerne være nul.
Omvendt kan man indse, at $P(x)$ ikke kan have andre rødder, idet indsætter man nemlig et tal α som er forskelligt fra α_1 , α_2 , ..., α_{p-1}, α_p, finder man:

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \ldots (\alpha - \alpha_{p-1})(\alpha - \alpha_p)Q_p(\alpha)$$

Alle faktorerne er forskellige fra nul, da α var antaget forskellig fra alle rødderne og $Q_p(\alpha) \neq 0$, da $Q_p(x)$ ifølge antagelse ikke havde nogen rødder.
$P(x)$ har derfor netop rødderne α_1 , α_2 , ..., α_{p-1}, α_p og ingen andre. Da $n - p \geq 0$ er $p \leq n$.

At er antallet af rødder p er mindre end polynomiets grad n, følger det, at et polynomium af n'te grad højst har n rødder. Som en konsekvens af denne sætning følger umiddelbart:

4.3 Sætning*: Nulpolynomiet er ikke et egentligt polynomium***.**

Nulpolynomiet har nemlig uendelig mange rødder, og kan derfor ikke være (fremstilles ved) et polynomium af grad n.

4.4 *Sætning*: Identitetssætningen for polynomier

*To polynomier er identiske (funktioner), hvis og kun hvis de har alle koefficienter ens***.**

Denne sidste sætning kan synes overflødig, men den er faktisk vigtig. Man kunne nemlig forestille sig at samme funktion kunne fremstilles ved et polynomium på flere forskellige måder.
Vi antager derfor at et polynomium kan fremstilles på to måder:

$$P(x) = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \; = \; b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} .. + b_1 x + b_0$$

Ved at flytte leddene på højre side over på den venstre, og samle leddene med ens potenser af x, finder man så. Hvis $n \neq m$, har vi antaget at $n>m$.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + (a_m - b_m)x^m +.(a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1} .. + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0 = 0$$

Da dette polynomium fremstiller nulpolynomiet er alle koefficienter = 0. (Nulpolynomiet er ikke et egentligt polynomium). Der må således gælde:

$$a_n = 0 \;,\; a_{n-1} = 0 \;,\; a_m - b_m = 0 \;,\; a_{m-1} - b_{m-1} = 0 \;, \ldots, a_1 - b_1 = 0 \;,\; a_0 - b_0 = 0$$

Hvoraf følger, at samtlige koefficienter er identiske, hvormed sætningen er bevist.

5. *Bestemmelse af rødderne i et polynomium af grad større end* 2

Der findes ingen formler til bestemmelse af rødderne i et polynomium af grad større end 4. Udledningen af formlen for rødderne i et 3.grads polynomium er langt over gymnasiepensum.

Vi skal derimod vise, at hvis man kan "gætte" n-2 rødder i et n'te grads polynomium, kan man bestemme samtlige rødder. Vi illustrerer dette ved et par eksempler.

5.1 Eksempel. Løs ligningen

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 10 = 0$$

Vi vil om et øjeblik angive en metode til "kvalificeret" rodgæt, men foreløbig vil vi gætte på ± 1 , ± 2 , $\pm\frac{1}{2}$, .. ?.
Vi finder P(1) = 2 - 5 + 7 - 10 = -6 ; P(-1) = -2 - 5 - 7- 10 = -24 ; P(2) = 2·8 - 5·4 + 7·2 -10 = 0 !
2 er altså rod i polynomiet. Men så er polynomiet deleligt med (x-2) ifølge sætning 4.1. Polynomiers division giver:

$$\begin{array}{l}
\underline{x - 2} \mid 2x^3 - 5x^2 + 7x - 10 \mid \underline{2x^2 - x + 5} \\
\qquad \underline{2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\quad -x^2 + 7x - 10 \\
\qquad\quad \underline{-x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad 5x - 10 \\
\qquad\qquad \underline{5x - 10} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Polynomiet kan da skrives (divisionsligningen):

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 10 = (x - 2)\,(2x^2 - x + 5)$$

$$\mathrm{P}(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\,(2x^2 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = 0 \ \vee \ 2x^2 - x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$$

Idet 2.gradsligningen ikke har løsninger.

6. *Kvalificeret rodgæt.*

For polynomier med heltallige koefficienter, findes der et par nyttige regler, som vi anfører nedenfor.

6.1 *Sætning:* Hvis p er en heltallig rod i et polynomium

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

med heltallige koefficienter, så går p op i a_0.

Bevis:
Hvis p er rod gælder:

$$P(p) = 0 \ \Leftrightarrow \ a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

Ved at sætte p udenfor en parentes i de n første led og flytte a_o over på den anden side fås:

$$p(a_{n-1}p^{n.1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1\,) = -\,a_0$$

På højre side står et helt tal og på venstresiden står produktet af det hele tal p og et helt tal. Heraf slutter vi at p går op i a_0.

Hvis man vil undersøge om et polynomium med heltallige koefficienter har heltallige rødder, kan man altså indskrænke sig til at undersøge de heltal, som går op i konstantleddet a_0.

6.2 Eksempel. Vi vil løse ligningen: $-3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = 0$

Hvis polynomiet har heltallige rødder, skal de søges blandt divisorerne i 9, som er $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
Ved indsætning ses at x = 1 er rod. Ved division med x - 1 fås:

$$\begin{array}{l} x - 1 \mid -3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 \mid -3x^2 - 12x - 9 \\ \quad \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ \qquad -12x^2 + 3x + 9 \\ \qquad \underline{-12x^2 + 12x} \\ \qquad\qquad -9x + 9 \\ \qquad\qquad \underline{-9x + 9} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Ifølge divisionsligningen er

$$-3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = (x - 1)(-3x^2 - 12x - 9)$$

Og den oprindeligning er derfor ifølge nulreglen ensbetydende med

$$x - 1 = 0 \vee -3x^2 - 12x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 \vee x = -1 \vee x = -3}}$$

Rødderne i 2.gradsligningen er fundet på sædvanlig vis eller ved rodgæt (-1 - 3 = -4 og (-1)(-3) = 3).

Sætningen om heltallige rødder i et polynomium kan skærpes til:

6.3 *Sætning:* Hvis $\frac{p}{q}$ er rod i et polynomium,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

med heltallige koefficienter, og hvor $\frac{p}{q}$ er en uforkortelig brøk, så går p op i a_0 og q går op i a_n

Beviset for denne sætning forløber efter helt de samme retningslinier, som beviset for den simplere sætning, bortset fra en enkelt talteoretisk detalje.

$$\frac{p}{q} \text{ er rod i } a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{(Vi ganger igennem med } q^n\text{)}$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n \quad \Leftrightarrow \quad \text{(Vi flytter p uden for en parentes på venstre side)}$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

På højre side står et helt tal, som på venstre side er skrevet som p gange et helt tal. Altså må p gå op i højresiden $a_0 q^n$. Idet p/q er antaget uforkortelig, er p og q indbyrdes primiske. Her af slutter vi, at p må gå op i a_0.
Beholder vi i stedet $a_n p^n$ på venstresiden og flytter de øvrige led over på højresiden og sætter den fælles faktor q uden for en parentes, finder man.

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n \quad \Leftrightarrow$$

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} +) \quad \Leftrightarrow$$

På samme måde som før, kan vi se, at $a_n p^n$ er skrevet, som et produkt af q og et helt tal. Altså går q op i $a_n p^n$. Da *p* og *q* er indbyrdes primiske, går *q* op i a_n, hvormed begge sætningens dele er bevist.

6.4 Eksempel. Vi vil løse ligningen: $2x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = 0$

Vi gætter på rationale rødder af formen p/q. Ifølge sætningen ovenfor, skal der gælde p = ±1, ± 3 og q = ± 1, ± 2 og derfor: p/q = ± 1, ± 1/2, ± 3, ± 3/2.
Ingen negative tal kan være rod i ligningen, for indsættes et negativt tal bliver alle led negative. 1 er ikke rod, men vi finder $P(½) = 2(½)^3 - 11(½)^2 + 11(½) - 3 = 0$, så ½ er rod. Ved polynomiers division:

$$
\begin{array}{l|l|l}
\underline{x - ½} & 2x^3 - 11x^2 + 11x - 3 & \underline{2x^2 - 10x + 6} \\
 & \underline{2x^3 - x^2} & \\
 & \quad -10x^2 + 11x - 3 & \\
 & \quad \underline{-10x^2 + 5x} & \\
 & \qquad\qquad 6x - 3 & \\
 & \qquad\qquad \underline{6x - 3} & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$2x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \qquad\qquad d = 25 - 12 = 13$$
$$\Leftrightarrow x = (5 \pm \sqrt{13})/2$$

Løsningen til ligningen er således:

$$x = \frac{1}{2} \lor x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \lor x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

Bemærk, at sætningen om rationale rødder i et polynomium med heltallige koefficienter *ikke* udsiger noget om, hvorvidt sådanne rødder findes, men hvis der findes rationale rødder, så gælder sætningen.
Sætningen kan i øvrigt udvides til at gælde for alle polynomier med rationale koefficienter, idet koefficienterne kan gøres heltallige ved at multiplicere med fællesnævneren for de brøker, der udgør koefficienterne.