Matematikken bag
Parallel- og centralprojektion

Dette er et redigeret uddrag af lærebogen: Programmering med Delphi fra 2003 (570 sider).
Delphi ophørte med at eksistere fra omkring 2010, så lærebogen er ikke aktuel længere.

Indhold

1. Tredimensional grafik og Projektionsgeometri

Når man laver computergrafik i en plan, er det ikke i almindelighed forbundet med de store matematiske udskejelser. Helt anderledes forholder det sig med 3D-grafik, som nødvendigvis stiller krav om kendskab til vektorregning og projektionsgeometri.

Vi vil her kun beskæftige os med den matematiske del af projektionsgeometri. Hvorledes man med et computerprogram tegner et 3-dim objekt, så kun de flader, vender ud mod iagttageren bliver tegnet, og hvorledes man animerer et 3-dim objekt, er behandlet i bogen: Programmering med Delphi fra 2004.

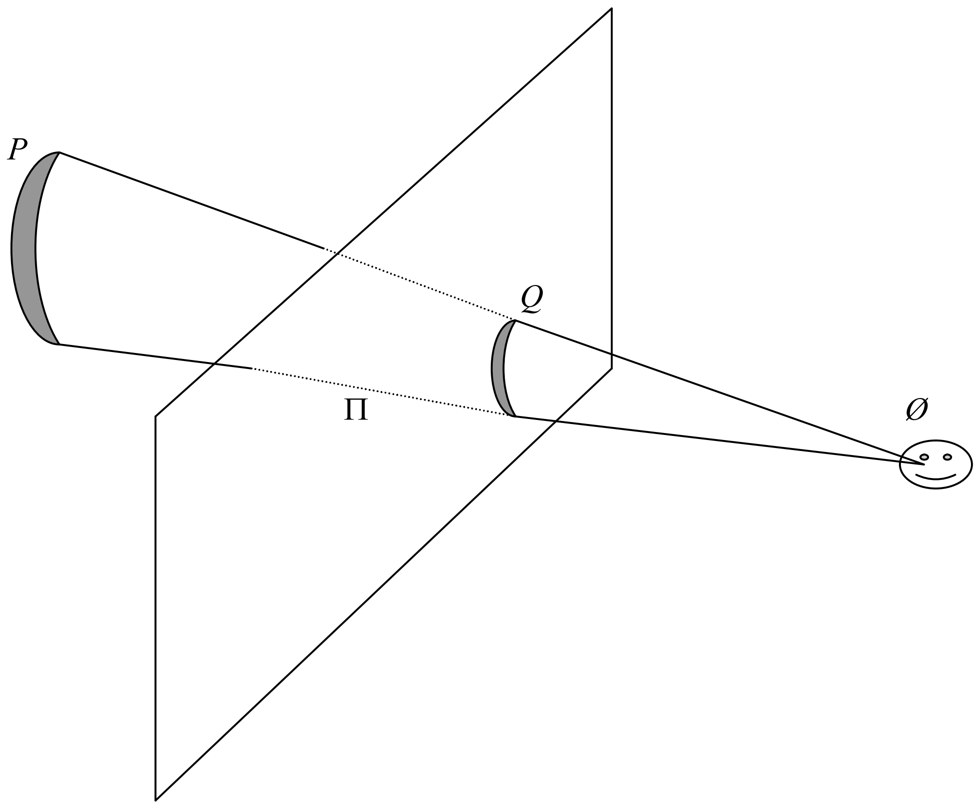
1.1 CentralProjektion

En centralprojektion er en afbildning af en rumlig genstand på en plan, og set fra et øjepunkt.
Det kan svare til, at man ser et landskab gennem et rektangulært hul (en maleriramme) i en væg.
Ved en centralprojektion ses det rumlige billede, som det er tilfældet i virkeligheden, det vil sige i perspektiv. Perspektivet indebærer, at genstande, der er langt væk fra billedplanen vil forekomme mindre, end hvis de er anbragt tæt på billedplanen.

For billedkunstnere har "perspektivet" været en udfordring siden middelalderen. Det er en omfattende del af undervisningen på enhver malerskole at lære at tegne et korrekt perspektiv.
Og det er bestemt ikke enkelt. Men malerskoleelevens udgangspunkt er et helt andet, end det er tilfældet i Computergrafik, idet malerskoleelevens først tegner en mængde linier efter bestemte regler, der alle ender i samme forsvindningspunkt. Disse linier fungerer da som rammer for størrelsen af de genstande, der skal anbringes i forskellige afstande.
Billedkunstnerens perspektiv er baseret på en kompliceret teknisk grafisk konstruktion, hvorimod perspektivet i computergrafik er baseret på matematisk-geometriske beregninger.
Der er også en anden væsentlig forskel. Billedkunstnerens afbildning af et objekt i perspektiv resulterer i et og kun et billede.
Når computergrafikeren matematisk har fastlagt den rumlige overflade af et objekt, kan han imidlertid på brøkdele af et sekund lave billeder, der ser objektet i hvilket som helst perspektiv, afstand og retning.

Rent geometrisk er centralprojektionen enkel. Iagttageren er placeret i et øjepunkt *Ø*.

Billedplanen Π er placeret et vilkårligt sted i rummet. Det eneste, som skal være fastlagt er billedplanens form, samt afstanden fra øjepunkt til billedplan. Genstanden er placeret på den modsatte side af billedplanen set fra øjepunktet. For at bestemme projektionen af punktet P på genstanden, trækkes en linie fra P til øjepunktet *Ø*. Skæringspunktet Q mellem billedplanen og linien PØ er centralprojektionen af P på Π. Se illustrationen herunder.

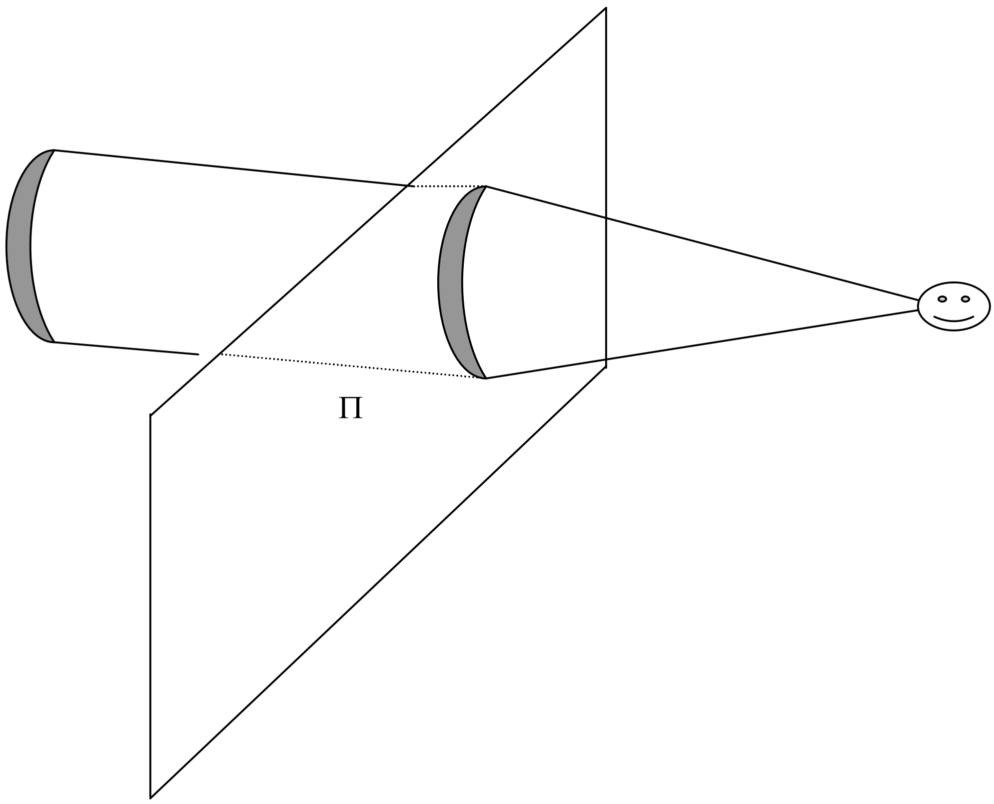


Figur 10.1 Centralprojektion

Vi skal senere se på, hvorledes man kan beregne koordinaterne til *Q* i planens koordinatsystem, når de rumlige koordinater til *Ø*,*P* samt planens ligning i et rumligt koordinatsystem er givne.

1.2 Parallel Projektion

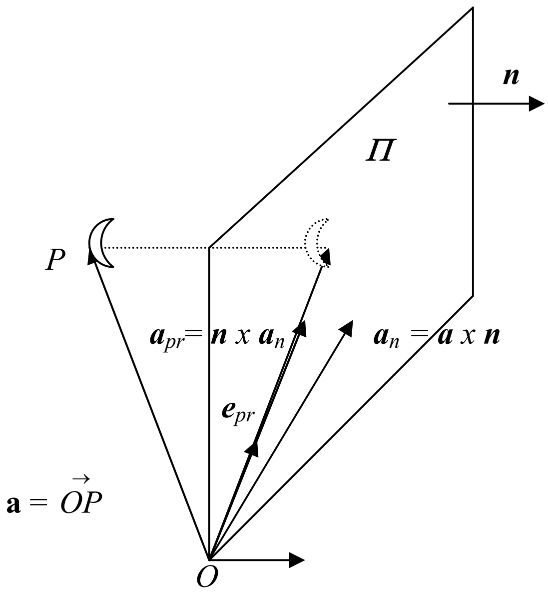
Parallelprojektionen svarer egentlig blot til at øjepunktet er uendelig langt væk fra billedplanen, således at alle linier fra genstand til øjepunkt er parallelle.
I praksis betyder dette, at man bestemmer Parallel Projektionen af et punkt *P*, simpelthen som den sædvanlige (ortogonale) projektion af *P* på billedplanen *Π*.
I en parallelprojektion er størrelsen af en genstands projektion, uafhængig af genstandens afstand fra billedplanen. "Perspektivet" det rumlige fremkommer kun ved de vinkler, som linierne i genstanden danner med hinanden.
Parallelprojektionen er ikke "virkelighedstro". I hvert fald ikke for flere genstande med meget forskellig afstand fra billedplanen. Det besynderlige er imidlertid, at de fleste vil opfatte parallelprojektionen som mere virkelighedstro, så længe genstandenes udstrækning vinkelret på billedplanen ikke er for store eller genstandenes afstande fra billedplanen ikke varierer alt for meget.
Dette hænger sammen med, at vi faktisk ser med to øjne og ikke med ét, og at vi på en eller anden måde kompenserer for perspektivet i genstande, der er mindre end få meter væk.
Så selv om parallelprojektionen ikke er virkelighedstro, anvendes den hyppigt alligevel, fordi den perceptionsmæssigt opfattes som mere "virkelighedstro" end centralprojektionen.
Rent matematisk er parallelprojektionen også lettere at håndtere, og kræver færre regninger. Dette vil vi se på senere. Herunder er parallelprojektionen søgt illustreret.



Figur 10.2 Parallelprojektion

1.3 Bestemmelse af parallelprojektionen af et punkt

Figuren herunder viser, hvorledes parallelprojektionen af punktet *P* på billedplanen beregnes.



Figur 10.4 Parallelprojektion af et punkt

Når man vil bestemme projektionen af et punkt på en plan, kan det principielt gøres på to måder. Analytisk geometrisk eller ved vektorregning. Umiddelbart synes det lettest at gøre det ved analytisk geometri, idet man blot skal bestemme ligningen for den linie, der går gennem *P* og har ***n*** som retningsvektor, og derefter finde denne liniens skæring med planen *Π.*
Dette er naturligvis korrekt, men problemet opstår, idet man opnår de rumlige koordinater til projektionen, mens det man ønsker er koordinaterne relativt til projektionsplanens koordinatsystem.

$$\vec{a}_n = \vec{a} \times \vec{n} \qquad \vec{a}_{pr} = \vec{n} \times \vec{a}_n \qquad \vec{e}_{pr} = \frac{1}{\left|\vec{a}_{pr}\right|}\vec{a}_{pr} \qquad \vec{OQ} = \vec{p}_r = (\vec{a} \cdot \vec{e}_{pr})\vec{e}_{pr}$$

$$x = \vec{p}_r \cdot \vec{i} \qquad y = \vec{p}_r \cdot \vec{j}$$

Vi foretager af denne grund beregningen af koordinaterne til projektionen i projektionsplanens koordinatsystem ved vektorregning
n er en enhedsvektor, der er normal til planen Π. *P* er det punkt i rummet, hvis projektion på planen, vi ønsker at bestemme. **a** = $\vec{OP}$ er stedvektoren fra Origo *O* til *P*.

Først bestemmes en vektor $\mathbf{a}_n$, som er *krydsproduktet* af ***a*** og ***n***. Denne vektor er ortogonal på såvel ***a*** og ***n***, og er dermed parallel med (ligger i) planen *Π*. Dernæst bestemmes en vektor $\boldsymbol{a}_{pr}$ som krydsproduktet af ***n*** med $\boldsymbol{a}_n$. Denne vektor er også parallel med planen *Π* og den udspænder samme med ***a*** en plan, som er ortogonal på *Π.*
Vi kan derfor finde en stedvektor til projektionen *Q* af *P* på *Π*, som projektionen af ***a*** på $\boldsymbol{a}_{pr}$.
Først bestemmes en enhedsvektor $\boldsymbol{e}_{pr}$ som er ensrettet med $\boldsymbol{a}_{pr}$, og projektionen $\boldsymbol{p}_{pr}$ findes dernæst som vist ovenfor. Kordinaterne (*x,y*) til *Q* i projektionsplanens koordinatsystem, ved at tage skalarproduktet af $\boldsymbol{p}_{pr}$ med de to basisvektorer ***i*** og ***j*** .

Bestemmelse af parallelprojektionen af et punkt er anderledes, men ikke mere enkel, end hvad der gælder for en centralprojektion. Der er imidlertid en afgørende forskel.

Alle de vektor operationer, der skal udføres for at bestemme en parallelprojektion er lineære operationer, forstået på den måde, at hvis man skal bestemme projektionen af en linearkombination af vektorer: $\boldsymbol{c} = s\cdot\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{b}$, så er den lig med $\boldsymbol{c}_{pr} = s\cdot\boldsymbol{a}_{pr} + t\cdot\boldsymbol{b}_{pr}$.

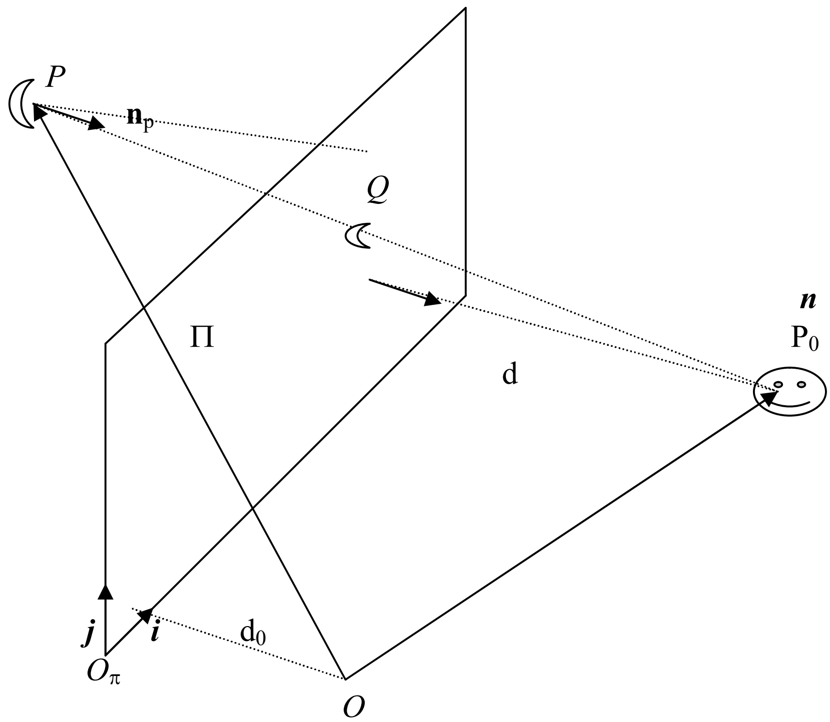
- Dette indebærer, at man ved parallelprojektion kan nøjes med at bestemme projektionen af de 3 basisvektorer $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ i det rumlige koordinatsystem. Projektionen af en vilkårlig anden vektor ***a*** med koordinater (*x,y,z*). $\boldsymbol{a} = x\cdot\boldsymbol{e}_1 + y\cdot\boldsymbol{e}_2 + z\cdot\boldsymbol{e}_3$ vil da kunne bestemmes som den samme linearkombination af de projicerede vektorer. $\boldsymbol{a}_{pr} = x\cdot\boldsymbol{e}_{1pr} + y\cdot\boldsymbol{e}_{2pr} + z\cdot\boldsymbol{e}_{3pr}$. Projektionen af de tre basisvektorer $\boldsymbol{e}_{1pr}$, $\boldsymbol{e}_{2pr}$, $\boldsymbol{e}_{3pr}$ ligger alle i projektionsplanen naturligvis.

For at finde et punkts Parallel Projektion, er det således tilstrækkeligt at foretage 6 multiplikationer til bestemmelse af de to koordinater. Dette er betragtelig hurtigere end ved bestemmelse af et punkts Central Projektion.

Nedenfor er vist eksempler på en parallelprojektion af en badebold og et farvelagt dodekaeder.
(Den dårlige kvalitet skyldes, at det er et foto af en computer skærm, da man ikke kan tage et skærmdump i det anvendte program (Delphi).

1.4 Bestemmelse af Centralprojektionen af et punkt

Vi skal nu se på de regninger, der helt konkret tillader os at beregne koordinaterne til centralprojektionen af et punkt på billedplanen. Udledningen er lavet ved brug af vektorer. På denne måde vil resultatet også være uafhængigt af, hvorledes koordinatsystemet vælges. Figuren nedenfor viser, hvorledes beregningen udføres. Af typografiske hensyn er koordinatsystemets begyndelsespunkt *O* anbragt på samme side af billedplanen som øjepunktet, men det er irrelevant for resultatet. Beregningen er ikke helt triviel.



Figur 10.3 Centralprojektion af et punkt

Da resultatet udtrykt i vektorer er uafhængig af valget af koordinatsystem, vælger vi vores rumlige koordinatsystem til at have *x-y* planen parallel med billedplanen og fælles basisvektorer. (***i***, ***j***).
Det rumlige koordinatsystem har begyndelsespunkt *O* og de tre basisvektorer
($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)). Øjepunktet befinder sig på *z*-aksens positive retning i afstanden $d\text{-}d_0$. Billedplanen er ortogonal på *z*-aksen i afstanden d_0 fra *O* i begge koordinatsystemer. *z*-aksen (basisvektor ***n***) er rettet mod øjepunktet.

Projektionsplanens koordinatsystem har begyndelsespunkt i O_π og basis vektorer ***i*** og ***j***.
Øjepunktet befinder sig i P_0. Vi ønsker nu at beregne projektionen af et punkt *P*, som befinder sig på genstanden.
Projektionen af *P* på planen Π betegnes *Q*.
n er en enhedsvektor, som er ortogonal på projektionsplanen Π. Afstanden fra *O* til planen Π betegnes d_0.

$\boldsymbol{n}_p$ er en enhedsvektor, som er parallel med $\overrightarrow{P_0P}$.

Bestemmelsen af koordinaterne (*x,y*) til stedvektoren $\overrightarrow{O_\pi Q}$ sker da efter følgende regninger.

$$\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP} \qquad \overrightarrow{n}_p = \frac{1}{|\overrightarrow{PP_0}|}\overrightarrow{PP_0}$$

Vi ønsker at bestemme t_p, således at vi kan udtrykke vektoren fra genstandspunktet *P* til synsliniens skæring med projektionsplanen ∏ ved $\boldsymbol{n}_p$. $\overrightarrow{PQ} = t_p \cdot \overrightarrow{n}_p$
Tager vi skalarproduktet med ***n*** på begge sider, finder man:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = t_p\,\vec{n}\cdot\vec{n}_p \quad og \quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = \vec{n}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}) = d_0 - \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}$$ (Projektionen af $\overrightarrow{OQ}$ *på* $\vec{n}$ *er* d_0)

Hvoraf følger $t_p = \dfrac{(d_0 - \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP})}{\vec{n}\cdot\vec{n}_p}$

Endvidere gælder

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \qquad \overrightarrow{O_\pi Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OO_\pi}$$

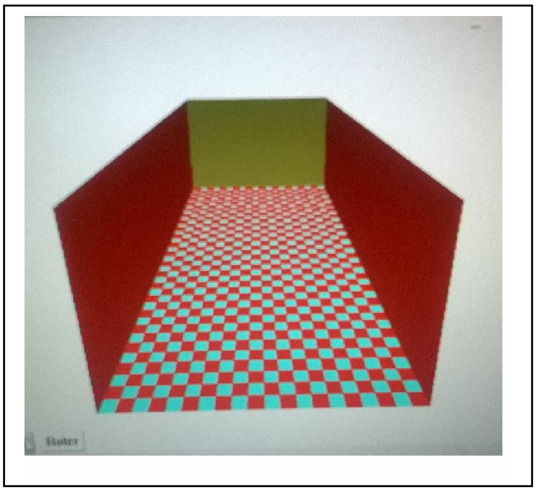
Hvor O_π er begyndelsespunktet for projektionsplanens koordinatsystem.
Herefter findes koordinaterne (*x,y*) til projektionen af punktet *P* i projektionsplanens koordinatsystem (O_π, ***i***, ***j***). $x = \vec{i}\cdot\overrightarrow{O_\pi Q} \quad y = \vec{j}\cdot\overrightarrow{O_\pi Q}$

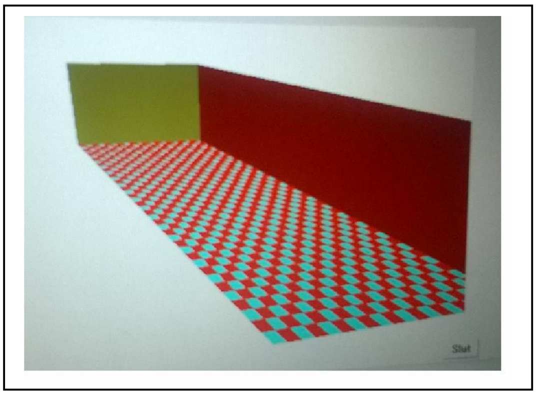
Den med fortegn regnede projektion af $\overrightarrow{OP}$ på ***n*** er $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}$. (Positivt på figuren ovenfor).
Cosinus til vinklen mellem ***n*** og $\boldsymbol{n}_p$ findes som $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_p$. (På figuren et negativt tal).
Hvad vi ønsker at finde er længden |*PQ*|.
Denne længde er netop afstanden fra *P* til *Π* divideret med |*cos(v)*|.

Afstanden fra P til Π beregnes da som længden af projektionen af $\overrightarrow{OP}$ på $\boldsymbol{n}$ minus d_0. At differensen er vendt om i udtrykket ovenfor for t_p skyldes fortegnet for $\cos v$. t_p er altså lig med længen af $\overrightarrow{PQ}$.

Heraf følger, at $\overrightarrow{PQ} = t_p \cdot \boldsymbol{n}_p$.
Herefter er det let at finde stedvektoren til Q i projektionsplanens koordinatsystem, vist ved ligningerne ovenfor. Til slut bestemmes koordinaterne til Q (x,y) ved at tage skalarproduktet med de to basisvektorer.
Da beregningen af en centralprojektion indebærer ikke lineære operationer (beregningen af t_p), er det ikke muligt - på samme måde som ved parallelprojektion - at nøjes med at finde projektionen af de 3 basisvektorer. Regningerne ovenfor må gennemføres ved beregningen af hvert punkt.

Nedenfor er vist en computer genereret centralprojektion, som tidligere var et svendestykke på alle malerskoler, nemlig at tegne en flisegang i perspektiv. For at dokumentere, at projektionen er lavet med formlerne ovenfor, og ikke direkte tegnet er flisegangen vist fra to forskellige øjepunkter. (Billedkvaliteten er dårlig – ja, det er et foto af et skærmbillede)





Ole Witt-Hansen 2015 (2004)