Løsning af n transcendente ligninger med n ubekendte
Nulpunkt for en funktion af flere variable
Generaliseret Newton Rapson

1. Formulering af opgaven

Lad der være givet en reel vektorfunktion: $\underline{\underline{f}}(\underline{\underline{x}}) \quad R^n \to R^n$.

Vi ønsker, at løse ligningssystemet $\underline{\underline{f}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{x}}) - \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}}$

Skrevet ud:

$$
\begin{array}{lcl}
f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = b_1 & & f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) - b_1 = 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = b_2 & & f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) - b_2 = 0 \\
f_3(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = b_3 & & f_3(x_1, x_2, x_3, ...x_n) - b_3 = 0 \\
. & \Leftrightarrow & . \\
. & & . \\
. & & . \\
f_n(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = b_n & & f_n(x_1, x_2, x_3, ...x_n) - b_n = 0
\end{array}
$$

Løsning af et ligningssystem kan altid reduceres til at finde nulpunkt for en funktion.

2.Newton Rapsons metode

For en reel funktion af en variabel, gøres det f.eks. ved Newton - Rapsons metode. Vi antager at vi befinder ved x_0 ,s på et stykke af funktionen, der fører monotomt mod nulpunktet.

Vi antager dernæst at, $f(x_0)$ er den første tilnærmelse til $f(x) = 0,$ og vi søger så en bedre tilnærmelse $x_1 = x_0 + \delta_0$. Der gælder til første orden i δ_0:

$$f(x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0 + \delta_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dette gentages så med: $f(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1 + \delta_1) = f(x_1) + f'(x_1)\delta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Til at bestemme $x_2 = x_1 + \delta_1$ og sådan fremdeles indtil nulpunktet er bestemt med den ønskede nøjagtighed.

3. Generalisering til vektorfunktioner af flere variable.

Det er (næsten) trivielt, at generalisere til n variable, bortset fra at udregningerne ikke længere kan udføres i hånden eller på matematikregner. Det kræver et program.

Vi nøjes med at opskrive Newton Rapson ligningen for den i'te af funktionerne.

$$f_i(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, x_3 + \delta_3, ... , x_n + \delta_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_i(x_1, x_2, x_3, ...x_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta_j = 0$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, ... \delta_n$ kan så for hvert skridt bestemmes som løsningerne til det lineære ligningssystem:

Løsning af *n* transcendente ligninger med *n* ubekendte
Nulpunkt for en funktion af flere variable
Generaliseret Newton Rapson

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ . \\ . \\ \delta_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \\ \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n) \end{pmatrix}$$

Det nye punkt er herefter givet ved $x_i + \delta_i$, hvorefter processen gentages.

Denne metode anvendes i programmet matematisk analyse til at løse n (ikke lineære) ligninger med n ubekendte.

Ole Witt-Hansen 2000 (okt. 2013)