Elementær matematisk økonomi

Ole Witt-Hansen 1982 (2018)

Indhold

1. Sammenhæng mellem pris og afsætning

Hvis man skal teoretisere om sammenhængen mellem, er det eneste, der ligger nogenlunde fast, at afsætningen af en vare aftager med prisen.
I den virkelige verden kan denne sammenhæng godt være kompleks og underkastet forskellige parametre, men for at behandle det teoretisk/matematisk, så bliver man i første nødt til antage en simpel lineær sammenhæng.
Hvis p betegner prisen på en vare og afsætningen er x, vil vi derfor udtrykke afsætningen, som en aftagende lineær funktion af prisen, hvor c og d er positive tal.

(1.1) $$x = -cp + d$$

Afsætningen falder til 0, når $-cp + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{d}{c}$, og den maximale afsætning fås, når $p = 0$.

Når denne sammenhæng mellem pris og afsætning skal behandles matematisk, er det imidlertid mere fordelagtigt at udtrykke prisen som funktion af afsætningen, også selvom det er prisen, der reelt er den uafhængige variabel.

(1.2) $$p = -ax + b$$

Men i øvrigt er sammenhængen mellem pris og afsætning den samme som før.
Omsætningen y bliver:

(1.3) $$y = xp = -ax^2 + bx$$

Hvilket fremstiller en parabel med toppunkt i $x_{\max} = \frac{b}{2a} \quad og \quad y_{\max} = \frac{b^2}{4a}$.

Grænseindtægten G, er defineret som den forøgelse af omsætningen, ved salg af endnu en enhed.

(1.4) $$G(x) = y(x+1) - y(x) \approx \frac{dy}{dx} = -2ax + b$$

Man ser heraf, at y er voksende for $x < \frac{b}{2a}$, den er nul for $x = \frac{b}{2a}$ og aftagende for $x > \frac{b}{2a}$.

1.1 Omkostningsforhold

Omkostningerne ved produktionen kan deles op i faste omkostninger til produktionsapparatet C_0, som er uafhængig af produktionens størrelse, og de variable omkostninger C_v, som er et fast beløb per produceret enhed. De totale omkostninger er således:

(1.5) $$C = C_v x + C_0$$

Omkostningerne per enhed bliver da:

(1.6) $$C_x = \frac{C}{x} = C_v + \frac{C_0}{x}$$

Grafen for denne funktion er i et (x, C_x) koordinatsystem en hyperbelgren med asymptoterne $x = 0$ og $C_x = C_V$.
På figuren nedenfor er det grafiske billede af (1.5) og (1.6) skitseret i samme koordinatsystem.

I analogi med grænseindtægten defineres grænseomkostningerne som den omkostningsforøgelse, der følger af at producere og omsætte en ekstra enhed.

(1.7) $$C_G = C(x+1) - C(x) \approx \frac{dC}{dx}$$

I dette tilfælde $= C_v$

På figuren nedenfor til venstre er (1.5) indtegnet sammen med (1.6), og på figuren til højre er y, $G(x)$ samt $p = -ax+b$ blevet indtegnet på samme figur.

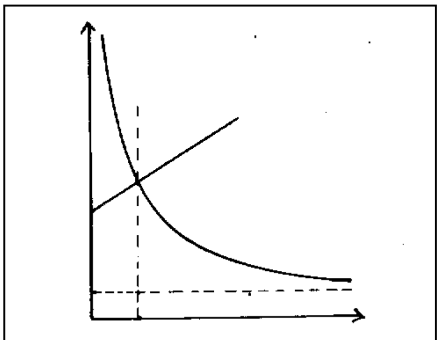
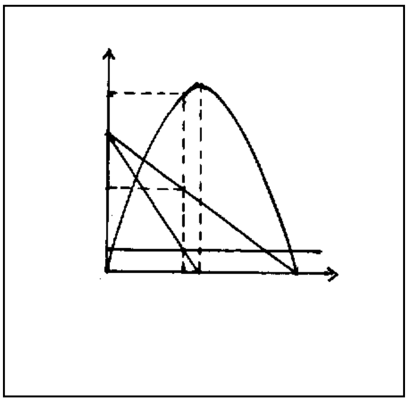


Fig. 3



Skæringspunktet $G(x) = C_V$ mellem grænseindtægten og grænseomkostningerne svarer til den optimale produktion.

(1.8) $$G(x_0) = C_V \quad \Leftrightarrow \quad -2ax_0 + b = C_V \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{b - C_V}{2a}$$

For $x < x_0 \;\Leftrightarrow\; G(x) > C_V$, vil en forøgelse af produktionen kunne betale sig, idet indtægten ved mersalget vil overstige udgifterne, hvorimod det modsatte er tilfældet for $x > x_0$.

Bruttoavancen $B(x)$ ved det optimale salg x_0 er bruttoomsætningen minus de variable omkostninger, som er lig med nettoavancen $N(x)$ plus de faste omkostninger.

(1.9) $$B(x_0) = R(x_0) - C_V x_0 = -a\left(\frac{b - C_V}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{b - C_V}{2a}\right) - C_V\left(\frac{b - C_V}{2a}\right) = \frac{(b - C_V)^2}{4a}$$

Man kan opnå det samme resultat ved at summere fortjenesten på alle enhederne fra den 1. til den x'te.

(1.10)
$$B(x)=\int_0^{x_0}(G(x)-C_V)dx=\int_0^{x_0}(-2ax+b-C_V)dx=-ax_0{}^2+(b-C_V)x_0=$$
$$-a\left(\frac{b-C_V}{2a}\right)^2+(b-C_V)\frac{b-C_V}{2a}=\frac{(b-C_V)^2}{4a}$$

1.2 Eksempel

En virksomhed har erfaret, at prisen 9 kr. per enhed, giver en omsætning på 16.000 stk. per dag, mens en pris på 11,25 kr. giver en omsætning på 12.000 stk. per dag.
De faste daglige omkostninger udgør 64.000 kr. og de variable omkostninger er 1,50 kr. per stk. Hvis vi antager at omsætningen er en lineær funktion af prisen, kan vi da ifølge det foregående bestemme den optimale produktion og pris, samt den samlede brutto- og nettoavance ved denne pris. Hvis vi regner omsætningen i 1000 stk. bestemmes omsætningsfunktionen som den lineære funktion gennem (16,9) og (12; 11,25).

(1.11) $$p-9=\frac{11{,}25-9}{12-16}(x-16)\quad\Leftrightarrow\quad p=-\frac{9}{16}x+18$$

Den optimale produktion er ifølge (1.3) $y_{\max}=\dfrac{b^2}{4a}$ med $a=\dfrac{9}{16}$ *og* $b=18$, som giver: 144.000.

Grænseindtægter $G(x)=-2ax+b=-\dfrac{9}{8}x+18$ og grænseomkostningerne C_V = 1,50, vi finder da

(1.12) $$G(x)=C_V:\ -\frac{9}{8}x+18=1{,}5\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\frac{33}{2}}{\frac{9}{8}}=\frac{44}{3}=14\tfrac{2}{3}(1000)\ stk.$$

Prisen bliver da: $$p=-ax+b=-\frac{9}{16}\frac{44}{3}+18=9{,}75\,.$$

Bruttoavancen: $B(x_0)=\dfrac{(b-C_V)^2}{4a}=\dfrac{(18-1{,}5)^2}{4\cdot\frac{9}{16}}=\dfrac{(\frac{33}{2})^2}{\frac{9}{4}}=121.000$

Nettoavancen er Bruttoavancen – de faste omkostninger: 121.000 – 64.000 = 57.000.

2. Generalisering af teorien

Handel kan som bekendt betragtes fra to sider, nemlig fra producentens og fra aftagerens, og af den grund anvender man undertiden lidt andre betegnelser for de indgåede begreber end vi har anvendt tidligere. Som hidtil angiver *x* og *p* antallet af omsatte enheder og prisen. Sammenhængen mellem disse to størrelser angives nu som en generel funktion.

(2.1) $$p=f(x)$$

Som vi vil betegne som afsætnings- eller efterspørgselsfunktionen, og som antages at være differentiabel. Vi skal ligeledes antage at *p* er en aftagende funktion af *x*, og dermed $f'(x)<0$.

Bruttoomsætningen: $B=B(x)=xp=xf(x)$.

(2.2) Grænseudgiften er: $B(x+1)-B(x)\approx\frac{dB}{dx}=f(x)+xf'(x)=p(1+\frac{x}{p}f'(x))$.

$\frac{dB}{dx}$ kaldes for differentialudgiften. Differentialudgiften er mindre end prisen, idet $f'(x) < 0$.
På samme måde, som ved den lineære sammenhæng, kan man udtrykke omsætningen x, som funktion af prisen. $x=f^{-1}(p)$, og hermed bliver bruttoomsætningen: $B(p)=pf^{-1}(p)$, og

(2.3) $$\frac{dB}{dp}=\frac{dB}{dx}\frac{dx}{dp}=\frac{dB}{dx}\frac{1}{f'(x)}$$

Ifølge reglerne for differentiation af sammensat og omvendt funktion.

2.1 Eksempel

Lad os antage at en markedsundersøgelse viser at omsætnings- (efterspørgsels) funktionen er givet ved.

$$x=\frac{40}{p^2+2}$$

Bruttoomsætningen er: $B=px=\frac{40p}{p^2+2}$

Vi vil da udregne, ved hvilken pris bruttoomsætningen er størst, så vi bestemmer $B'(p)$.

(2.4) $$B'(p)=\frac{40\cdot(p^2+2)-40p2p}{(p^2+2)^2}=\frac{-40p^2+80}{(p^2+2)^2}$$

$$B'(p)=0 \Leftrightarrow p^2=2 \Leftrightarrow p=\sqrt{2}\ (\vee\ p=-\sqrt{2}\ )$$

Virksomhedens omkostninger er en funktion af x.

$$C=C(x)$$

Som også antages at være differentiabel.

Grænseomkostningerne, erstattes af differentialomkostningerne. $C(x+1)-C(x)\approx\frac{dC}{dx}$.

Omkostningerne per enhed: $C_A=\frac{C}{x}$. Ved differentiation fås:

(2.5) $$\frac{dC_A}{dx}=\frac{x\frac{dC}{dx}-C}{x^2}$$

(2.6) $$\frac{dC_A}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dC}{dx} = \frac{C}{x} = C_A$$

Hvilket viser, at differentialomkostningerne omkostningerne per enhed har et extremum (minimum), når differentialomkostningerne er lig med omkostningerne per enhed.
Ligesom i det lineære tilfælde, vil man kunne bestemme det optimale salg og den dertil hørende pris ved at bestemme skæringspunktet mellem differentialomsætningskurven og differentialudgiftskurven.

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dC}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad p(1 + \frac{x}{p} f'(x)) = C_A, \quad hvor \quad p = f(x)$$

3. Konkurrence og monopol

Lad os antage at to virksomheder E_1 og E_2 producerer to varer, der konkurrerer med hinanden på det samme marked. Dette indebærer at afsætningen af hver af varerne afhænger af priserne på dem begge.

(3.1) $$\begin{aligned} E_1 : x_1 = f_1(p_1, p_2) \\ E_1 : x_1 = f_1(p_1, p_2) \end{aligned}$$

De to funktioner f_1 og f_2 tænkes at være fastlagt ved ekstrapolering af resultatet af markedsundersøgelser.
Nettoindtægten I for E_1 og E_2 er afsætningen gange pris fratrukket de variable omkostninger:

(3.2) $$\begin{aligned} I_1 = B_1(x_1) - C_1(x_1) = f_1(p_1, p_2)p_1 - C_1 f_1(p_1, p_2) \\ I_2 = B_2(x_1) - C_2(x_1) = f_2(p_1, p_2)p_2 - C_2 f_2(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Hvis de to producenter antager, at priserne p_1 og p_2 reguleres uafhængigt af hinanden, så vil de begge differentiere (3.2) mht. p_1 og p_2, for at optimere nettoindtægten med den antagelse at priserne er uafhængige af hinanden.
Kort sagt, de vil bestemme løsningerne til: $\frac{\partial I_1}{\partial p_1} = 0 \quad og \quad \frac{\partial I_2}{\partial p_2} = 0$ for at finde de to maxima.
Hvis derimod, at de begge indretter deres priser også efter den andens prissætning, ændres situationen. Hvis vi antager, at de begge reagerer ens på modpartens prissætning, altså hvis $p_1 = p(p_2) \quad og \quad p_2 = p(p_1)$, så bliver situationen mere kompliceret.

Antager vi endelig, at de to producenter slutter sig sammen, således at: $I = I_1 + I_2 = I(p_1 + p_2)$, skal maximum findes ved at de to partielle differentialkvotienter $\frac{\partial I_1}{\partial p_1} = 0 \quad og \quad \frac{\partial I_2}{\partial p_2} = 0$ er nul samtidig.
Resultatet af løsningen af ligningerne er to priser, som vil være monopolpriserne.
Dette vil vi forsøge illustrere ved et eksempel.

3.1 Eksempel

På landets banegårde forestiller vi os, at der er et konkurrerende salg af chokoladebamser og chokolade frøer. Lad os antage at en statistisk markedsundersøgelse har vist at afsætningen i 10.000 per år kan repræsenteres ved funktionerne:

(3.3) Bamser: $x_1 = p_2 - p_1$
Frøer: $x_2 = 35 + p_1 - 2p_2$

Hvor priserne måles i øre.
De variable omkostninger per enhed sættes til for E_1: 12 øre og for E_2: 20 øre.

3.1.1 Uafhængige prissætninger

Vi skal først maksimere nettoomsætningen for det tilfælde, at prissætningerne er uafhængige af hinanden.

$$\begin{aligned} I_1 &= B_1 - C_1 = p_1x_1 - 12x_1 = x_1(p_1 - 12) \\ &= (p_2 - p_1)(p_1 - 12) = p_1p_2 - 12p_2 - p_1^2 + 12p_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ved differentiation med hensyn til p_1 fås:

$$\frac{\partial I_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow p_2 - 2p_1 + 12 = 0 \Leftrightarrow p_1 = \tfrac{1}{2}p_2 + 6 \tag{3.5}$$

Fortegnsvariationen for $p_2 - 2p_1 + 12$ ses at være: $p_2 - 2p_1 + 12 > 0 \Leftrightarrow p_1 < \tfrac{1}{2}p_2 + 6$, og sådan fremdeles, er fortegnsvariationen for differentialkvotienten +, 0, -, hvilket betyder, at det er et max.

Tilsvarende får vi for E_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= B_2 - C_2 = p_2x_2 - 20x_2 = x_2(p_2 - 20) \\ &= (35 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 20) = 35p_2 - 700 - 2p_2^2 + p_1p_2 + 40p_2 - 20p_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow p_1 + 75 - 4p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = \tfrac{1}{4}p_1 + \tfrac{75}{4}.$$

De to ligninger skal da løses til bestemmelse af globale max.

$$\begin{matrix} p_1 = \tfrac{1}{2}p_2 + 6 \\ p_2 = \tfrac{1}{4}p_1 + \tfrac{75}{4} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} p_1 - \tfrac{1}{2}p_2 = 6 \\ -p_1 + 4p_2 = 75 \end{matrix} \Leftrightarrow \tfrac{7}{2}p_2 = 81 \wedge p_1 = \tfrac{1}{2}p_2 + 6 \Leftrightarrow$$

$$p_1 = 17\tfrac{4}{7} \wedge p_2 = 23\tfrac{1}{7} \tag{3.7}$$

3.1.2 Gensidig afhængighed af prissætningerne

Vi skal derefter se på, hvad der sker, hvis E_1 i sin strategi for at maximere sin nettofortjeneste, indregner konkurrentens strategi, og E_2 gør tilsvarende. Udgangspunktet er:

$$\begin{aligned} I_1 &= x_1(p_1 - 12) = (p_2 - p_1)(p_1 - 12) \\ I_2 &= x_2(p_2 - 20) = (35 + p_1 - 2p_2)(p_2 - 20) \end{aligned} \tag{3.7}$$

I_2 maximerede sin nettofortjeneste ved at vælge $p_2 = \tfrac{1}{4}p_1 + \tfrac{75}{4}$ og
I_1 maximerede sin nettofortjeneste ved at vælge $p_1 = \tfrac{1}{2}p_2 + 6$

Indsættes disse priser i udtrykkene for henholdsvis I_1 og I_2 finder man udtrykkene:

(3.8)
$$I_1 = x_1(p_1 - 12) = (\tfrac{1}{4}p_1 + \tfrac{75}{4} - p_1)(p_1 - 12)$$
$$I_2 = x_2(p_2 - 20) = (35 + \tfrac{1}{2}p_2 + 6 - 2p_2)(p_2 - 20)$$

(3.9)
$$I_1 = -\tfrac{3}{4}p_1^2 + \tfrac{111}{4}p_1 - 225$$
$$I_2 = -\tfrac{3}{2}p_2^2 + 71p_2 - 820$$

(3.10)
$$\frac{\partial I_1}{\partial p_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{3}{2}p_1 + \tfrac{111}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = 18\tfrac{1}{2}$$
$$\frac{\partial I_2}{\partial p_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3p_2 + 71 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 = 23\tfrac{2}{3}$$

Indarbejdelsen af modpartens strategi i optimeringen betyder altså en mindre prisstigning, og dermed en forøget nettofortjeneste for begge de to producenter.

3.1.3 Sammenslutning af de to virksomheder

Man kan så tænke sig at de to virksomheder sammenlægges, så der ikke længere er en konkurrence. Den almindelige opfattelse er den, at et monopol altid vil betyde forøgede priser, som en bevidst handling fra producenterne, men hvad udsiger en simpel matematisk model om det spørgsmål?

Den samlede nettofortjeneste er:

(3.11)
$$I = I_1 + I_2 = x_1(p_1 - 12) + x_2(p_2 - 20)$$
$$= (p_2 - p_1)(p_1 - 12) + (35 + p_1 - 2p_2)(p_2 - 20)$$
$$I = I_1 + I_2 = p_1p_2 - 12p_2 + 12p_1 - p_1^2 + (35p_2 - 700 + p_1p_2 - 20p_1 - 2p_2^2 + 40p_2$$
$$I = I_1 + I_2 = 2p_1p_2 - p_1^2 - 2p_2^2 - 12p_2 - 8p_1 + 63p_2 - 700$$

Til bestemmelse af maximumspunktet, skal vi løse de to ligninger:

$$\frac{\partial I}{\partial p_1} = 0 \ \ og \ \ \frac{\partial I}{\partial p_2} = 0$$

(3.12)
$$\begin{matrix} \dfrac{\partial I}{\partial p_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2p_2 - 2p_1 - 8 = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial p_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2p_1 - 4p_2 - 63 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 2p_2 - (4p_2 + 63) - 8 = 0 \\ p_1 = 2p_2 + 63 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

$(p_1, p_2) = (23\tfrac{1}{2}, 27\tfrac{1}{2})$, hvilket må siges, at være en ganske pæn prisstigning.

Vi vil nu søge at opstille de 3 tilfælde af optimal afsætning på tabelform.

Uafhængig prissætning	$p_1 = 17\frac{4}{7}$	$p_2 = 23\frac{1}{7}$	$x_1 = p_2 - p_1 = 5\frac{4}{7}$	$x_2 = 35 + p_1 - 2p_2 = 6\frac{2}{7}$
Gensidig afhængighed	$p_1 = 18\frac{1}{2}$	$p_2 = 23\frac{2}{3}$	$x_1 = p_2 - p_1 = 5\frac{1}{3}$	$x_2 = 35 + p_1 - 2p_2 = 6\frac{1}{6}$
Sammenslutning	$p_1 = 23\frac{1}{2}$	$p_2 = 27\frac{1}{2}$	$x_1 = p_2 - p_1 = 4$	$x_2 = 35 + p_1 - 2p_2 = 3\frac{1}{2}$

Uafhængig prissætning	$I_1 = x_1 p_1 - 12x_1 =$ 1521/49 $=31\frac{2}{49}$	$I_2 = x_2 p_2 - 20x_2 =$ 968/49$=19\frac{37}{49}$
Gensidig afhængighed	$I_1 = (p_2 - p_1)(p_1 - 12) =$ 104/3$=34\frac{2}{3}$	$I_2 = (35 + p_1 - 2p_2)(p_2 - 20)$ $=22\frac{11}{18}$
Sammenslutning	$I = (p_2 - p_1)(p_1 - 12) + (35 + p_1 - 2p_2)(p_2 - 20)$ $=$105/4$=26\frac{1}{4}$	

Ud fra tabellen kan man drage sine egne konklusioner. Det skal dog bemærkes, at med de forøgede priser ved sammenslutningen (monopolet) falder både omsætningen og nettofortjenesten.

Kilder: Irene Kristensen: Nogle anvendelser af matematik i økonomi. Århus universitet 1974