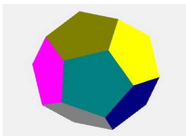
Markov-kæder
stationære fordelinger

Dette er en artikel fra min hjemmeside : www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2021

Indhold

Introduktion 1
1. Definitioner og fundamentale egenskaber ved Markov-kæder 1
2. Betingelse for at en Markov matrix er regulær 3
3. Eksempel: Katten og musen i labyrinten 4
4. Generelle egenskaber ved Markov-kæder 5
3.1 Periodiske, reducible og irreducible Markov-kæder 5
4. Grænse sandsynlighedsfordelinger og stationære tilstande for aperiodiske og irreducible Markov-kæder 6
4. Eksempel: Betinget valg af varemærke 8
7. Stationær sandsynlighedsfordeling 10

Introduktion

Teorien for Markov-kæder hviler på den elementære sandsynlighedsregning og lineære algebra
Hvis man ikke er bekendt med disse to discipliner, så kan f.eks. finde referencer i de første kapitler af sandsynlighedsregningen i:
http://www.olewitthansen.dk/Mathematics/Probability_theory.pdf.
En introduktion til lineær algebra kan f.eks.findes i:
http://www.olewitthansen.dk/Mathematics/Eigenvalue_problems_in_linear_algebra.pdf

1. Definitioner og fundamentale egenskaber ved Markov-kæder

Vi betragter et system, som kan være i et endeligt antal tilstande (1), (2), (3)…(n).
Tilstandsrummet S er mængden af tilstande $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
X er en stokastisk variable, altså en funktion med definitionsmængde S, således at sandsynligheden for at systemet er i tilstande (j) er

$$P(X = j) = p_j.$$

Vi skal antage, at systemet ændrer sig med et konstant tidsinterval. Sandsynlighedsfordelingen for systemets tilstande er givet ved sandsynlighedsvektoren

$$p = (p_1, p_2, ..., p_n)\text{, hvor } P(X = j) = p_j.$$

Begyndelsestilstanden betegnes

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ..., p_n^{(0)}),$$

Og de følgende sandsynlighedsfordelinger betegnes:

$$p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_n^{(k)}),\ \ k = 1,2,3....$$

Det er vigtigt at skelne mellem den fysiske tilstand, (s_j), som systemet befinder sig i og sandsynligheden $P(X = s_i) = p_j$ for at systemet befinder sig i tilstanden (s_j).
Systemet befinder sig til ethvert tidspunkt i en tilstand givet ved sandsynlighedsvektoren

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

Hvor p_j er sandsynligheden n for at systemet er i tilstanden j.
Idet systemet må befinde sig i én af tilstandene 1..n , så må der nødvendigvis gælde:

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$$

Den betingede sandsynlighed for at tilstanden (i) resulterer i tilstanden (j) ved en transition skrives p_{ij}, hvor

$$p_{ij} = P(X = i \mid X = j) \quad \text{eller blot} \quad P(X = i \rightarrow X = j) = p_{ij}$$

En Markov kæde er et system uden "historie". Sandsynligheden for en transition fra en tilstand *i* til en tilstand *j* afhænger udelukkende af de to tilstande *i* og *j*, , men ikke af de tilstande som gik forud for *i* ellæetr de mellemliggende tilstande. Udtrykt mere formelt:

$$P(X_{k+1} = j_{k+1} | P(X_k = j_k, X_{k-1} = j_{k-1}, X_{k-2} = j_{k-2}, ..., X_0 = j_0) = P(X_{k+1} = j_{k+1} | X_k = j_k)$$

Den betingede sandsynlighed at et system er i tilstanden j_{k+1} afhænger kun af den umiddelbare foregående tilstand j_{k+1} , men ikke af, hvordan denne tilstand er nået.

En almindelig spadseretur er ikke en Markov kæde idet positionen, hvor man tager det næste skridt, i almindelighed afhænger af de foregående skridt., man har taget
Et modeksempel er den såkaldte "random walk", som vi skal beskæftige os med senere.

Sandsynlighederne $P(X = i \to X = j) = p_{ij}$ danner en overgangsmatrix. Hvis systemet har *n* tilstande, så må en overgang resulterer i en af disse tilstande, derfor må summen af overgangssandsynlighederne i hver række være lig med 1.

$$\sum_{j=1}^{j=n} p_{ij} = 1 \qquad for \;\; i = 1..n$$

For et system med *n* tilstande kan overgangsmatricen skrives.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot\cdot & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot\cdot & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Man har tradition for at skrive tilstandsvektoren som en rækkevektor: $(p_1, p_2, .., p_n)$, $(q_1, q_2, .., q_n)$ eller $(r_1, r_2, .., r_n)$
Overgangen til en ny tilstand sker ved matrixmultiplikation med tilstandsvektoren fra venstre med $(q_1, q_2, .., q_n)$, herved får man den nye tilstandsvektor $(r_1, r_2, .., r_n)$

$$(q_1, q_2, ..., q_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot\cdot & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot\cdot & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix} = (r_1, r_2, ...r_n)$$

Med betegnelserne ovenfor finder vi således: $r_j = q_1 p_{1j} + q_2 p_{2j} + ... + q_n p_{nj}$.

Udtrykket $q_i p_{ij}$ er således sandsynligheden for at systemet var i tilstanden (i) gange med sandsynligheden for at det overgår til tilstanden (j)

Skrevet på en mere kompakt form: $r_j = \sum_{i=1}^{n} q_i p_{ij} \quad j = 1..n$

Før vi går videre med teorien, vil vi præsentere nogle simple eksempler, der samtidig viser nogle grundlæggende egenskaber ved Markov-kæder.

2. Betingelse for at en Markov matrix er regulær

I en regulær Markov kæde er summen af sandsynlighederne i tilstandsvektoren bevaret lig med én efter hver iteration. Dette kan faktisk tages som definition af en Markov-kæde

"The random walk" har kun to tilstande forlæns og baglæns. Overgangsmatricen er derfor meget simpel. Det er indlysende at summen af rækkerne er lig med 1

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

En sandsynlighedstilstand (q_1, q_2) bliver transformeret til

$$(q_1, q_2)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = (q_1 p + q_2(1-p), q_1(1-p) + q_2 p)$$

Hvis vi udregner summen af tilstandene i den transformerede vektor, ser vi, at den er 1.

$$(q_1 p + q_2(1-p) + q_1(1-p) + q_2 p) = q_1(p + (1-p)) + q_2((1-p)p + p) = q_1 + q_2 = 1\,.$$

Hvis vi skal gennemføre denne beregning for en n x n , kan det godt blive lidt omstændeligt, så vi nøjes med at vise, at resultatet gælder for en 3 x 3 Markov matrix.

$$(q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = (q_1 p_{11} + q_2 p_{21} + q_3 p_{31}\ , q_1 p_{12} + q_2 p_{22} + q_3 p_{32},\ \ q_1 p_{13} + q_2 p_{23} + q_3 p_{33})$$

Vi udregner summen i sandsynlighedsvektoren på højre side.

$$(q_1 p_{11} + q_2 p_{21} + q_3 p_{31} + q_1 p_{12} + q_2 p_{22} + q_3 p_{32} + \ q_1 p_{13} + q_2 p_{23} + q_3 p_{33})$$

$q_1,\ q_2,,\ q_3$ er hver fælles for 3 led, og sæter vi udenfor en parentes, får man:

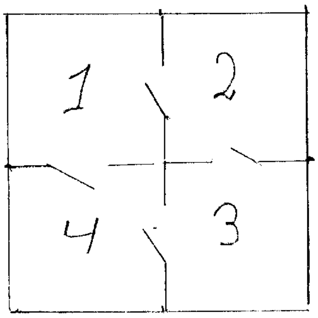
$$q_1(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + q_2(p_{21} + p_{22} + p_{23}) + q_3(p_{31} + p_{32} + p_{33}) = q_1 + q_2 + q_3$$

Vi ser da at summen af sandsynlighederne er bevaret ved en iteration med Markov matricen, hvis og kun hvis summen af alle rækkerne i Markov matricen alle er lig med 1.

Det er en simpel (men sjældent anvendt) kendsgerning, at alle Markov matricer har egenvektoren (1, 1, 1) fra højre med egenværdien 1.
Vi vil nøjes med at vise dette for en 3 x 3 Markov matrix.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}+p_{12}+p_{13} \\ p_{21}+p_{22}+p_{33} \\ p_{31}+p_{32}+p_{33} \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Eksempel: Katten og musen i labyrinten



Figuren til venstre viser en "labyrint", som har fire rum. I hvert rum er der to udgange til et af nabo rummene. Lad os antage at der til at begynde med befinder sig en kat i rum (1), vi antager også at katten i hvert skridt skifter til et nabo rum med sandsynligheden $\frac{1}{2}$.
For eksempel har vi har vi $P(1 \to 2) = \frac{1}{2}$ *and* $P(1 \to 3) = 0$.
Vi antager at katten til at begynde med er i (1), så tilstandsvektoren er: $s_0 = (1,0,0,0)$.
Overgangsmatricen *T:* $P(i \to j)$ $i, j = 1..4$ bliver en 4x4 matrix.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

For at bestemme tilstandsvektoren efter én iteration, skal vi gange med overgangsmatricen *T*.

1. skridt. $$(1,0,0,0)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2})$$

2. skridt. $(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) * T = (\frac{1}{4}+\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}+\frac{1}{4},0) = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$

3.skridt. $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \bullet T = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$.

Vi bemærker, at sandsynlighedsfordelingen er cyklisk med perioden 2.
Vi gentager nu den samme procedure, men denne gang for musen
Vi antager, at musen til start befinder sig i (3), begyndelsestilstanden for musen er (0,0,1,0).

1. step. $(0,0,1,0) \bullet T = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$
2. step: $((0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) \bullet T = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$
3. step: $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \bullet T = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

Ikke overraskende er sandsynlighedsfordelingen for musen også cyklisk med perioden 2.
Vi noterer endvidere at i tilstandene efter én og tre iterationer har katten og musen den samme sandsynlighedsfordeling. Derfor er sandsynligheden for at katten og musen befinder sig i samme rum lig med: $(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})\cdot(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

4. Generelle egenskaber ved Markov-kæder

Vi skal betegne sandsynlighedstilstandsvektorer med *p, q, r*, med et eller flere indices.
Begyndelsestilstanden betegnes med : $p^{(0)}=(p_1^{(0)},p_2^{(0)},p_3^{(0)},...,p_n^{(0)})$. Efter en iteratin betegnes de med $p^{(1)}=(p_1^{(1)},p_2^{(1)},p_3^{(1)},...,p_n^{(1)})$, og sådan fremdeles.
De to tilstande er knyttet sammen af matrix ligningen

$$(p_1^{(0)},p_2^{(0)},p_3^{(0)},...,p_n^{(0)})\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot\cdot & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot\cdot & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix}=(p_1^{(1)},p_2^{(1)},p_3^{(1)},...,p_n^{(1)})$$

Eller skrevet mere formelt:

$$\underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{p}}^{(1)}$$

Efter endnu et skridt:

$$\underline{\underline{p}}^{(1)}\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{p}}^{(2)}=\underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{p}}^{(2)}=\underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}^2=\underline{\underline{p}}^{(2)}$$

Det burde herefter være klart, at:

$$\underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}^n=\underline{\underline{p}}^{(n)},$$

Dette kan også let vises ved induktion. Vi har vist at det gælder for n = 1, så vi skal antage at relationen gælder for n og derefter vise at den også gælder for n + 1

$$\underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}^n=\underline{\underline{p}}^{(n)}\ \wedge\ \underline{\underline{p}}^{(n)}\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{p}}^{(n+1)}\Rightarrow\quad \underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}^n\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{p}}^{(n+1)}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{p}}^{(0)}\underline{\underline{T}}^{n+1}=\underline{\underline{p}}^{(n+1)}$$

3.1 Periodiske, reducible og irreducible Markov-kæder

En Markov-kæde betegnes som irreducibel, hvis enhver tilstand kan nås fra enhver anden tilstand ved et endeligt antal iterationer med overgangsmatricen. Det er imidlertid vigtigt at vide om en Markov kæde er irreducibel. Hvis en Markov-kæde er reducibel betyder det, at den kan opdeles i to eller flere irreducible matricer.
Det er i reglen ikke vanskeligt at afgøre om en Markov-kæde er reducibel, enten ved at betragte overgangsmatricen eller ved analyse af det fysiske system, som den er en model for.

Ser vi på overgangsmatricen

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Og en tilstandsvektor (q_1, q_2, q_3, q_4) og bestemmer den næste tilstandsvektor:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.3q_1 + 0.2q_2\ ,\ 0.7q_1 + 0.8q_2\ ,0.4q_3 + 0.5q_4\ ,\ 0.6q_3 + 0.5q_4)$$

Vi kan se, at der kun er overgange til tilstandene (1) og (2) fra (1) og (2), og tilsvarende gælder for tilstandene (3) and (4), så Markov-kæden er derfor reducibel.

I eksemplet med katten og musen, så vi at sandsynlighedsvektoren er periodisk med perioden 2, da vi får den samme tilstandsvektor efter blot to iterationer.

I almindelighed siger vi at en Markov-kæde er periodisk, hvis den samme sandsynlighedsfordeling opnås ved et endeligt antal iterationer.
Hvis q betegner tilstandsvektoren og hvis overgangsmatricen betegnes T, så kan periodiciteten udtrykkes ved at der findes et positivt helt tal M for hvilket det gælder:

$$\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{T}}^M = \underline{\underline{q}}$$

Dette kan også udtrykkes ved at matricen $\underline{\underline{T}}^M$ har en egenvektor med egenværdien 1 fra venstre.

En Markov-kæde siges at være *aperiodisk*, hvis den ikke er periodisk, men ikke desto mindre har den egenskab, at enhver tilstand kan nås fra enhver anden tilstand i et endeligt antal itrerationsskridt. Dette er grundlaget for hovedsætningen om Markov-kæders egenskab vil nærme sig en stationær tilstand ved et endeligt antal iterationer.
Stationær tilstand betyder, tilstandsvektoren er en egenvektor med egenværdien 1.
Det talteoretiske bevis for denne påstand er næsten ubærligt, og vi skal i stedet give et algebraisk, – om ikke "bevis" -, så dog en analytisk begrundelse for, at det forholder sig sådan.

4. Grænse sandsynlighedsfordelinger og stationære tilstande for aperiodiske og irreducible Markov-kæder

En stationær sandsynlighedsfordeling er defineret som en tilstand, der uændret ved en iteration med overgangsmatricen. Mere formelt, hvis q er en tilstandsvektor, og T er overgangsmatricen, så er q en stationær tilstand, hvis

$$\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{q}}$$

Sandsynlighedsfordelingen af tilstandsvektoren kan også beskrives som en tilstand, som er egenvektor til overgangsmatricen med egenværdien 1.
I har imidlertid allerede nævnt, at på grund af regulariteten af Makov-kæder (summen af elementerne i en række af Markov matricen er lig med 1, så har alle Markov matricer en egenvektor fra højre og fra venstre med egenværdien 1.

Egenværdierne λ af en matrix $\underline{\underline{A}}$, er at finde blandt løsningerne til ligningen

$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$$

Fra algebraen ved vi imidlertid, at en matrix og dens transponerede matrix har de samme egenværdier, så hvis ligningen $det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en Markov matrice har egenværdien $\lambda = 1$, svarende til en egenvektor fra højre, så har den transponerede matrix også en egenvektor med egenværdien 1, fra venstre, men ikke i almindelighed den samme egenvektor.
Men det betyder at enhver Markov matrix har en egenvektor fra venstre med egenværdien 1, det vil sige en stationær tilstand. Vi vil søge at illustrere dette for en 2 x 2 Markov matrix

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

$$det(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = \begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ q & 1-q-\lambda \end{pmatrix} = (p-\lambda)(1-q-\lambda) - q(1-p) = \lambda^2 - (p+1-q)\lambda + p - q$$

Det er let at se, det sidste udtryk har en rod $\lambda = 1$, og dette svarer til en egenvektor (α,α).
Vi multiplicerer imidlertid Markov-matricen fra venstre, det vil sige, den transponerede matrix. Matricen har stadig egenværdien 1, men egenvektoren vil ikke være den samme i almindelighed. Så vi undersøger hvad egenvektorerne er, når vi multiplicerer fra venstre. Hvis (x, y) er en egenvektor med egenværdi 1, har vi ligningen:

$$(x,y)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = 1\cdot(x,y) \;\Leftrightarrow\; (xp+yq, x(1-p)+y(1-q)) = (x,y)$$

Dette resulterer i de to ligninger:
$$x(p-1)+yq=0$$
$$x(1-p)-yq=0$$

Og hver af ligningerne giver: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1-p}{q}$,
Så vi har for eksempel med $(p,q) = (0.8, 0.4)$ en egenvektor $(0.2, 0.4)$

Det er klart at tilstandsvektoren $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ ikke selv kan have en "grænseværdi", idet det er en stokastisk variabel på tilstandsrummet S. For en aperiodisk Markov kæde er sandsynligheden imidlertid for vende tilbage til en tilstand s_i is, større end nul, da enhver tilstand kan nås fra enhver anden tilstand.
Endvidere vil sandsynlighedstilstandsvektoren nærme sig til en stationær tilstand. Det betyder ikke en matematisk konvergens, men at tilstandsvektoren, nærmer sig asynptotisk til den stationære tilstand.

Dette indebærer at enhver aperiodisk, irreducibel Markov-kæde har en stationær tilstand og at denne tilstand nås ved et endeligt antal iterationer.
Som bemærket tidligere så er det tal-teoretiske bevis for dette næsten ubærligt, så vi vil derfor først se på nogle eksempler før vi gennemfører et algebraisk, analytisk "bevis".

4. Eksempel: Betinget valg af varemærke

Eksemplet er mere af matematisk karakter, end at det afspejler virkeligheden.
Lad os antage at kunderne i et supermarked køber den samme vare, som findes i 3 forskellige mærker, som vi kalder *A,B* og *C*. Vi antager af valget a mærke er givet ved følgende overgangs matrix. Den udtrykker, at hvis kunderne i en uge har valgt *A,B* eller *C*, så er sandsynlighederne for valg den næste uge givet ved overgangsmatricen.

$$P(A \to A) = 0.85, \quad P(A \to B) = 0.10 \ , \ P(A \to C) = 0.05\,.$$
$$P(B \to A) = 0.15, \quad P(B \to B) = 0.80\,, \ P(C \to C) = 0.05$$
$$P(C \to A) = 0.20, \ P(C \to B) = 0.10, \ P(C \to C) = 0.65$$

Hvis vi antager at kunderne køber varen hver uge, så kan vi beskrive systemet som en Markov-kæde givet ved følgende Markov overgangsmatrix.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & \quad B & \quad C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.20 & 0.15 & 0.65 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vi kan se at de tre kunder (1) , (2), (3) favoriserer mærkerne henholdsvis *A, B, C*. og vi er nu interesserede i hvorvidt dette mønster for varekøb ændrer sig fra et Makov kæde synspunkt.
For eksempel om vil varen *C* eventuelt vil blive helt afskrevet eller vil Markov kæden med tiden blive en stationær tilstand, det vil sige en egentilstand til overgangsmatricen.
At det sidste vil være tilfældet er en af de mest grundlæggende sætninger i teorien for Markov-kæder.
Nedenfor er vist en computer simulation, svarende til 16 iterationer. Vi antager at sandsynlighedsfordelingen til at begynde med er:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 0.200 & 0.300 & 0.500 \end{array}$$

```
Probability table

 0.850   0.100   0.050
 0.150   0.800   0.050
 0.150   0.800   0.050

initial state:

 0.200   0.300   0.500
Sum of probabilities in initial state=  1.000

Probabilities for new state 1
 0.290   0.660   0.050
```

```
sum of probabilities for state  1   1.000

Probabilities for new state:   2
 0.353   0.597   0.050
sum of probabilities for state  2   1.000

Probabilities for new state:   3
 0.397   0.553   0.050
sum of probabilities for state  3   1.000

Probabilities for new state:  15
 0.499   0.451   0.050
sum of probabilities for state  15   1.000

Probabilities for new state:  16
 0.499   0.451   0.050
sum of probabilities for state  16   1.000
```

Fra den 15. iterationer virker det plausibelt, at (0.499, 0.451, 0.053) faktisk er en stationær tilstand.
Hvis der er nuller i Markov matricen og/eller i begyndelsestilstanden, så kræver det i almindelighed flere iterationer at nå til den stationære tilstand, som illustreret i eksemplet nedenfor.

```
The transition matrix

(  0.10  0.00  0.90 )
(  0.90  0.00  0.10 )
(  0.00  0.90  0.10 )

initial vector

(   1.00  0.00  0.00 )

state no   1

(   0.10  0.00  0.90 )

state no   2

(   0.01  0.81  0.18 )

state no   3

(   0.73  0.16  0.11 )

Vi undlader tilstandeme 4 - 15

state no  16
(   0.33  0.28  0.40 )

state no  17
(   0.28  0.36  0.36 )

state no  18
(   0.35  0.32  0.33 )

state no  19
(   0.33  0.29  0.38 )

state no  20
(   0.30  0.34  0.36 )
```

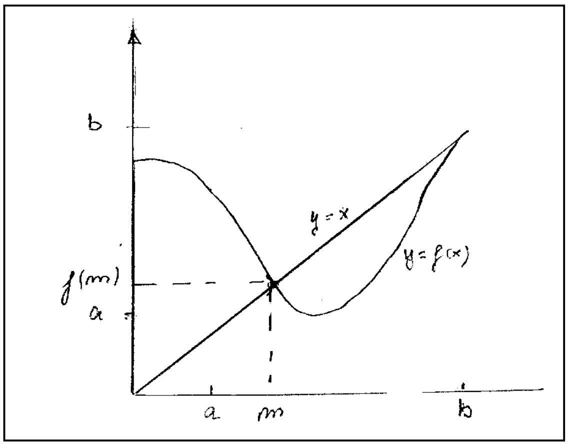
7. Stationær sandsynlighedsfordeling

I dette afsnit skal vi behandle en af hjørnestenene i teorien for Markov-kæder, som er den asymptotiske opførsel af Markov-kæder hen imod en stationær tilstand.
Det viser sig at alle ikke periodiske, irreducible Markov-kæder har en stationær tilstand, som nås i et endelig antal skridt?
Dette betyder imidlertid ikke, at rækken af tilstande $(X_0, X_1, ...,)$, nærmer sig asymptotisk til en grænsestilling. For enhver ikke trivial Markov-kæde vil en stokastiske variable fluktuerer for $n \to \infty$ og derfor er en "grænseværdi" i matematisk forstand udelukket.
Men vi kan håbe at sandsynlighedsfordelingen af X_n nærmer sig en bestemt værdi, hvilket er det samme som at sige at overgangs matricen har en egenvektor fra venstre med egenværdien 1.
Egenværdierne for en matrix $\underline{A}$ er fastlagt ved ligningen:

$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$$

En matrix og den transponerede matrix har som omtalt de samme egenværdier.
Determinanten er et n´te grads polynomium i λ. Ifølge Algebraens fundamentalsætning har et sådant polynomium n rødder. Hvis n er ulige har det mindst en reel rod. For en stationær tilstand er en af egenværdierne lig med 1.
Vi har ovenfor vist at en Markov matrix har egenvektoren (1,1,1,1,..,1) med egenværdien 1 fra højre. Men det betyder at Markov matricen også har egenværdien 1 fra venstre, men med en anden egenværdi. Så alle Markov matricer har en stationær tilstand.
Hvad vi mangler at vise er, at sandsynlighedstilstanden nærmer sig asymptotisk til den stationære tilstand.
At enhver begyndelsestilstand vil nærmer sig til den stationære tilstand efter et endeligt antal iterationer, kan ikke bevises algebraisk, og som omtalt er det tal-teoretiske bevis udenfor rammerne af denne fremstilling.
Vi skal derfor levere et algebraisk, analytisk bevis, der hviler på den sætning, at enhver kontinuert funktion $y = f(x)$, der afbilder et interval på sig selv har et fikspunkt, altså et punkt, hvor

$$f(m) = m.$$



Dette kan indses geometrisk ud fra grafen til venstre, hvor vi antager at den kontinuerte funktion $y = f(x)$ afbilder intervallet $[a, b]$ på sig selv: $f([a, b]) = [a, b]$
Nedenfor er indtegnet en funktion $y = f(x)$, som opfylder disse betingelser, samt linien $y = x$, som går gennem (a, a) og (b, b). Da en kontinuert funktion antager alle værdier i sin værdimængde mindst en gang, så vil funktionen krydse linien $y = x$ mindst en gang. Hvis $f(a) = a$, så er det et fikspunkt ellers, hvis $f(a) \neq a$, må funktionen krydse linien $y = x$ for enten at opnå værdier, som er mindre end a end eller større end a. Skæringspunkterne med $y = x$ er fikspunkter for $f(x)$, idet her er $f(x) = x$.
Sætningen om at alle funktioner, der afbilder et interval på sig selv har mindst et fikspunkt, kan også indirekte vises ud fra sætningen:

E*n kontinuert funktion y = f*(*x*)*, defineret i et interval* [*a, b*]*, hvor f*(*a*)*f*(*b*) < *0, skærer* 1.*aksen mindst en gang.*

For at anvende dette til at bestemme fikspunkter skal vi antage at $f(a) < f(b)$. Tilfældet $f(a) > f(b)$ kan behandles ved at betragte funktionen *y* =- *f*(*x*).
Vi indfører da hjælpefunktionen $g(x) = f(x) - k \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + k$, hvor *k* er et reelt tal.
For at opfylde betingelsen at funktionen $g(x)$ skærer 1. aksen, må vi kræve, at $g(a) < 0 \;\; og \;\; g(b) > 0$, og dermed, at $f(a) - k < 0 \;\; og \;\; f(b) - k > 0$
Løser vi disse to uligheder med hensyn til *k*, giver det:
$k > f(a) \, og \;\; k < f(b) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) < k < f(b)$.

Ifølge sætningen, ved vi da at for $f(a) < k < f(b)$ findes der et $m \in [a,b]$, således , at $g(m) = 0$.
Sætter vi nu $f_1(x) = f(x) + (m-k) = g(x) + k + (m-k)$, så opnår vi at $f_1(m) = m$.
Funktionen $f_1(x)$ afviger kun fra $f(x)$ ved en additiv konstant. Vi kan imidlertid ikke direkte vise at det også gælder for $f(x)$ idet det ville kræve at vi kender *m* på forhånd.

Det er også en velkendt sætning, som under ret generelle antagelser udsiger, *at hvis en reel funktion har et fikspunkt, så kan fikspunktet bestemmes ved recursion, begyndende fra et (næsten) vilkårligt punkt* x_0, på følgende måde:

$$x_1 = f(x_0)\,, \quad x_2 = f(x_1)\,, \quad x_3 = f(x_2)\,, \ldots$$

Sætningen udsiger altså, at følgen konvergerer mod *m* hvor: $m = f(m)$.

I det følgende skal vi konsekvent behandle et system, som har 3 tilstande.
Dette betyder imidlertid ikke en begrænsning af det generelle i de opnåede resultater, men blot af typografisk bekvemmelighed - også for læseren.
En Markov-kæde består af en tilstandsvektor $s = (s_1, s_2, s_3)$ med sandsynlighederne. $q = (q_1, q_2, q_3)$
Ofte kalder man også tilstandssandsynlighederne som "tilstandsvektoren", hvis det ikke giver anledning til misforståelser.
A Markov chain consist of a state vector $s = (s_1, s_2, s_3)$ with the probabilities $q = (q_1, q_2, q_3)$.

Sandsynlighederne opfylder betingelserne: $\sum_{i=1}^{3} q_i = 1$

Markov overgangsmatricen:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}$$

Opfylder betingelserne : $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$ for *i* =1..3

En overgang fra en tilstand $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)})$ til en tilstand $q^{(1)} = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})$ sker med matrix multiplikation med Markov matricen.

$$\underline{\underline{q}}^{(k+1)} = \underline{\underline{q}}^{(k)}\,\underline{\underline{P}} \qquad \text{eller udskrevet} \qquad q_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{3} q_j^{(k)} p_{i,j} \qquad i = 1..3\,.$$

Idet systemet må være i en af de mulige tilstande (s_1, s_2, s_3) må summen af sandsynlighederne være lig med 1.

$$q_1^{(k)} + q_2^{(k)} + q_3^{(k)} = 1$$

Men det betyder at $q_i^{(k+1)}$ er middelværdien (betegnet $< q_i^{(k+1)} >$) af den i'te kolonne af Markov matricen $\underline{\underline{P}}$, med hensyn til sandsynlighedsfordelingen $(q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, q_3^{(k)})$. Helt præcist:

$$q_i^{(k+1)} = q_1^{(k)} p_{1,i} + q_2^{(k)} p_{2,i} + q_3^{(k)} p_{3,i} = < \underline{\underline{p_i}} >_k$$

Hvis vi opfatter Markov matricn $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$ som en lineær function $\boldsymbol{L}$ af 3 variable (q_1, q_2, q_3), har vi således:

$$(q_1^{(k+1)}, q_2^{(k+1)}, q_3^{(k+1)}) = L(q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, q_3^{(k)})$$

Hvor

$$(q_1^{(k+1)}, q_2^{(k+1)}, q_3^{(k+1)}) = (< \underline{\underline{p_1}} >_k, < \underline{\underline{p_2}} >_k, < \underline{\underline{p_3}} >_k)$$

L og dermed Markov matricen er derfor en rekursiv funktion.

Der findes et teorem, som tilskrives Brouwers:
*At en kontinuert funktion f(**x**), som afbilder et n-dimensionalt interval på sig selv, har mindst et fikspunkt.* Samtidig kan fikspunktet nås ved rekursion, hvis funktionen opfylder en Lifschitz betingelse, som kan formuleres derhen, at der findes et reelt tal c, således at for alle x og y gælder:

$$\| f(y) - f(x) \| < c \, \| y - x \| \ ,$$

$\| \ \|$ er en passende norm (længde) i det metriske rum vi betragter.
Idet alle Markov tilstandsvektorer har en norm mindre eller lig med 1, kan vi anvende Lifschitz betingelsen på et Markov system. Så vi har dermed begrundet – men ikke formelt bevist:

Alle Markov kædet og dertil hørende overgangsmatricer P har en stationær tilstand, som er et fikspunkt for Markov matricen, og enhver begyndelsestilstand vil efter et passende antal iterationer nærme sig rekursivt til den stationære tilstand..

Nedenfor er vist nogle eksempler på iterationer af Markov-kæder. Vi har tidligere betragtet iterationer af tilstande, indtil den stationære tilstand er nået. Vi har imidlertid ækvivalensen:

$$\underline{\underline{p}}^{(n-1)}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{p}}^{(n)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\underline{p}}^{(0)}\,\underline{\underline{T}}^{n} = \underline{\underline{p}}^{(n)}$$

hvor $\underline{\underline{T}}^{(n)} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}} \ldots \underline{\underline{T}}$ (n gange)

Så i stedet for at se på iterationer af en tilstand, kan vi betragte iterationer (gange fra venstre med matricen) $\underline{\underline{T}}$.
Resultatet skulle blive det samme, men med et måske overraskende (men logisk nok) udtryk for $\underline{\underline{T}}^n$
Vi vil sammenligne dette med den sædvanlige iteration af en tilstand.
<u>The transition matrix</u>

```
( 0.10  0.40  0.50 )
( 0.40  0.30  0.30 )
( 0.20  0.30  0.50 )
```

<u>The initial vector</u>

```
(  0.20  0.30  0.50 )
```

The subsequent states are

```
(  0.24  0.34  0.47 )
(  0.25  0.34  0.46 )
(  0.26  0.34  0.46 )
```

Vi ser, at den stationære tilstand nås efter blot 3 iterationer.
Hvis man imidlertid har overgangsmatricer med flere nuller og begyndelsestilstande med nuller, kræver det betydelig flere iterationer.
Nedenfor er vist et sådant eksempel med en begyndelsesvektor (1,0,0) og en Markov matrice med et nul i hver række. Først ser vi på den sædvanlige iteration af sandsynlighedsvektoren
Den stationære tilstand nås kun næsten efter 15 iterationer, og ikke engang helt efter 20 iterationer.

```
The transition matrix

( 0.10  0.00  0.90 )
( 0.90  0.00  0.10 )
( 0.00  0.90  0.10 )

initial state
( 1.00  0.00  0.00 )

Subsequent states
( 0.10  0.00  0.90 )
( 0.01  0.81  0.18 )
( 0.73  0.16  0.11 )
( 0.22  0.10  0.68 )
( 0.11  0.62  0.28 )
( 0.56  0.25  0.19 )
( 0.28  0.17  0.55 )
( 0.18  0.50  0.32 )
( 0.47  0.29  0.24 )
( 0.31  0.22  0.47 )
( 0.23  0.42  0.35 )
( 0.41  0.31  0.28 )
( 0.32  0.25  0.42 )
( 0.26  0.38  0.36 )
state no  15
( 0.37  0.32  0.31 )
( 0.33  0.28  0.40 )
( 0.28  0.36  0.36 )
( 0.35  0.32  0.33 )
( 0.33  0.29  0.38 )
state no  20
( 0.30  0.34  0.36 )
sum of probabilities = 1.000
```

Nedenfor er vist resultatet af potenser af de samme to Markov matricer, som er vist ovenfor..
Antallet af iterationer er ikke nødvendigvis det samme som med iterationer af tilstandsvektoren, idet sidstnævnte afhænger af begyndelsestilstanden.

```
The transition matrix

  0.10  0.40  0.50
  0.40  0.30  0.30
  0.20  0.30  0.50

2 multiplications

  0.27  0.31  0.42
  0.22  0.34  0.44
  0.24  0.32  0.44

4 multiplications

  0.24  0.32  0.43
  0.24  0.32  0.44
  0.24  0.32  0.44

8 multiplications

  0.24  0.32  0.44
  0.24  0.32  0.44
  0.24  0.32  0.44

16 multiplications

  0.24  0.32  0.44
  0.24  0.32  0.44
  0.24  0.32  0.44
```

```
The transition matrix

  0.10  0.00  0.90
  0.90  0.00  0.10
  0.00  0.90  0.10

2 multiplications

  0.01  0.81  0.18
  0.09  0.09  0.82
  0.81  0.09  0.10

4 multiplications

  0.22  0.10  0.68
  0.67  0.15  0.17
  0.10  0.67  0.23

8 multiplications

  0.18  0.50  0.32
  0.27  0.21  0.53
  0.50  0.27  0.23

16 multiplications

  0.33  0.28  0.40
  0.36  0.32  0.32
  0.28  0.36  0.36

32 multiplications

  0.32  0.32  0.36
  0.32  0.32  0.36
  0.32  0.32  0.35

64 multiplications

  0.32  0.32  0.36
  0.32  0.32  0.36
  0.32  0.32  0.36
```

.

Det er bemærkelsesværdig, at der star det samme tal i hver af de tre søjler. Dette er imidlertid langt fra et tilfælde, men en konsekvens at vektoren er en sandsynlighedsfordeling.

Ser vi på en sandsynlighedsvektor $p = (p_{1,} p_{2,} p_{3,}) \quad hvor \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$ og en matrix

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Og ganger vi med en sandsynlighedsvektor $(p_{1,} p_{2,} p_{3,})$

$$(p_{1,} p_{2,} p_{3,}) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = (p_1 a + p_2 a + p_3 a, p_1 b + p_2 b + p_3 b, p_1 c + p_2 c + p_3 c) =$$

$$((p_1 + p_2 + p_3)a, (p_1 + p_2 + p_3)b, (p_1 + p_2 + p_3)c) = (a, b, c).$$

Så $(p_{1,} p_{2,} p_{3,})$ er en egenvektor med egenværdien 1, altså en stationær tilstand, kun hvis $(a,b,c) = (p_{1,} p_{2,} p_{3,})$ .Dette er også afspejlet i eksemplerne ovenfor.