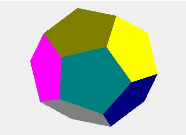
Eksempler på Markov kæder

Dette er en artikel hentet fra min hjemmeside : www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2021

Indhold

Introduktion

Grundlaget for teorien om Markov kæder er baseret på den elementære sandsynlighedsregning, og den elementære lineære algebra. Her kan for eksempel refereres til http://olewitthansen.dk/Matematik/SandsynlighedsRegning.pdf og http://olewitthansen.dk/Mathematics/Eigenvalue_problems_in_linear_algebra.pdf

1. Definitioner og egenskaber ved Markov kæder

Vi betragter et system, som kan befinde sig i netop én af et endeligt antal tilstande (1), (2),(3)…(n). Systemets tilstand er en stokastisk variabel X, hvor sandsynligheden for at systemet er i tilstanden j er $P(X = j) = p_j$. Systemet overgår fra en tilstand til en ny tilstand med et konstant tidsinterval. Systemets tilstand er til ethvert tidspunkt givet ved en tilstandsvektor ($p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$), hvor p_j er sandsynligheden for at systemet befinder sig i tilstanden (j). Idet systemet befinder sig i én af de n tilstande må der gælde:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$$

Sandsynligheden for at systemet overgår fra tilstanden (i) til tilstanden (j), skriver vi $p_{i\,j}$.

$$P(X = i \rightarrow X = j) = p_{i\,j}$$

En Markov kæde har ingen ”historie”. Sandsynligheden for at systemet overgår fra en tilstand (i) til en tilstand (j) afhænger kun af tilstandene (i) og (j) men ikke af de eventuelt mellemliggende tilstande.
Dette kan betragtes som definitionen på en Markov Kæde og udtrykkes mere formelt matematisk

$$P(X_{k+1} = j_{k+1} | P(X_k = j_k, X_{k-1} = j_{k-1}, X_{k-2} = j_{k-2}, \ldots, X_0 = j_0) = P(X_{k+1} = j_{k+1} | X_k = j_k)$$

Den *betingede sandsynlighed* for at systemet er i tilstanden j_{k+1} afhænger kun af den umiddelbare foregående tilstand, men ikke, men ikke af hvordan denne tilstand blev nået.

For en almindelig spadseretur er ikke en Markov Kæde, idet positionen afhænger (i langt de fleste tilfælde) ikke kun af det sidste skridt, men af flere, hvis ikke alle de foregående skridt.
Et modeksempel er den såkaldte Random Walk, som vi skal beskæftige os med som eksempel.

Overgangssandsynlighederne $P(X = i \rightarrow X = j) = p_{i\,j}$ udgør algebraisk en overgangsmatrix.
Hvis systemet har n tilstande, så må en overgang resulterer i netop én af disse n tilstande, derfor må summen af overgangssandsynlighederne til disse tilstande være lig med 1.

$$\sum_{j=1}^{j=n} p_{i\,j} = 1 \qquad for \;\; i = 1..n$$

Eller skrevet på matrix form:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & .. & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} & .. & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ .. & ... & ... & ... & ... \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Traditionelt bliver sandsynlighedsfordelingen for tilstandsstandsvektoren $s = (s_1, s_2, ...s_n)$ skrevet som en rækkevektor: $(p_1, p_2, .., p_n)$, $(q_1, q_2, .., q_n)$ eller $(r_1, r_2, .., r_n)$.
Overgangen fra en tilstandsvektor $(q_1, q_2, .., q_n)$ til en ny tilstandsvektor $(r_1, r_2, .., r_n)$, sker ved almindelige matrixoperationer. Læst fra venstre mod højre.

$$(q_1, q_2, ..., q_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & .. & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} & .. & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ .. & ... & ... & ... & ... \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix} = (r_1, r_2, ...r_n)$$

Vi har således: $r_j = q_1 p_{1j} + q_2 p_{2j} + ... + q_n p_{nj}$, hvor $j = 1..n$, og hvor $q_i p_{ij}$ udtrykker, at systemet er i tilstanden (i) gange sandsynligheden for en overgang til tilstanden (j)
Skrevet i en mere kompakt form: $r_j = \sum_{i=1}^{n} q_i p_{ij} \quad j = 1..n$.

Før vi går videre med eksempler, vil vi anføre nogle betingelser som en Markov overgangsmatrice nødvendigvis må opfylde.

2. Betingelser for en regulær Markov matrix

For en regulær Markov kæde må summen af sandsynlighederne i tilstandsvektoren forblive den samme lig med 1 efter enhver overgang.
Vi skal nu begrunde dette matematisk. Som eksempel tager vi først overgangsmatricen for en random work.

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Sandsynlighedsvektoren: (s_1, s_2) bliver transformeret til:

$$(s_1, s_2)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = (s_1 p + s_2(1-p), s_1(1-p) + s_2 p)$$

Tager vi summen af sandsynlighederne i den transformerede vektor:

$$(s_1 p + s_2(1-p) + s_1(1-p) + s_2 p) = s_1(p + (1-p)) + s_2((1-p)p + p) = s_1 + s_2 = 1.$$

Hvis vi skal gøre det samme det for en *n x n* matrix bliver det let for uoverskueligt, så vi nøjes med at gøre det for en 3x3 matrix.

$$(s_1, s_2, s_3)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = (s_1 p_{11} + s_2 p_{21} + s_3 p_{31}\ , s_1 p_{12} + s_2 p_{22} + s_3 p_{32},\ s_1 p_{13} + s_2 p_{23} + s_3 p_{33})$$

Og derefter tagen summen på højre side:

$$(s_1 p_{11} + s_2 p_{21} + s_3 p_{31} + s_1 p_{12} + s_2 p_{22} + s_3 p_{32} + \ s_1 p_{13} + s_2 p_{23} + s_3 p_{33})$$

Anvender vi henholdsvis $s_{1,}\ s_{2,,} s_3$ som en fælles factor finder vi:

$$s_1(p_{11} + p_{12} + p_{13}) + s_2(p_{21} + p_{22} + p_{23}) + s_3(p_{31} + p_{32} + p_{33}) = s_1 + s_2 + s_3$$

Vi bemærker da, at summen af sandsynlighederne i den transformerede vektor er lig med summen af sandsynlighederne summen i den oprindelige vektor lig med 1. Men at dette er betinget af at summen af sandsynlighederne i hver række i Markov overgangsmatricen.

2.1 Alle Markov-matricer har egenværdien 1 fra højre

Det er en simpel konsekvens af regulariteten af en Markov matrix, (selvom man sjældent gør brug af det), at alle Markov matricer har egenvektoren (1,1,1) fra højre, hørende til egenværdien 1.
Vi nøjes med at vise dette for en 3 x 3 matrix.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} + p_{13} \\ p_{21} + p_{22} + p_{33} \\ p_{31} + p_{32} + p_{33} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Reducible og irreducible Markov-matricer

En Markov kæde kaldes for irreducibel, hvis enhver tilstand kan nås ved overgange til enhver anden tilstand. Hvis ikke, så kan Markov matricen splittes op i to dele, som er uafhængige af hinanden. Hvis en Markov kæde er reducibel, er det ofte åbenlyst ud fra overgangsmatricen, eller fra det fysiske system, som den repræsenterer.

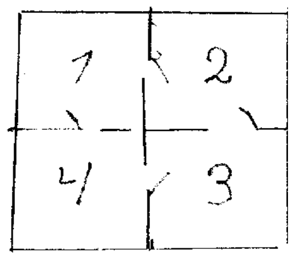
2.3 Stationære tilstande

En sandsynlighedstilstandsvektor kaldes for stationær hvis den er en egenvektor til overgangsmatricen med egenværdien 1.
Det er vel den mest fundamentale egenskaber ved Markov kæder, at alle regulære, ikke periodiske, irreducible Markov kæder vil nærme sig en stationær tilstand efter et passende antal iterationer.
Fra algebraen ved vi at en matrix og den transponerede matrix har de samme egenværdier, men ikke nødvendigvis de samme egenvektorer. Transponerer vi ligningen ovenfor får vi derfor en ligning:

$$(q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = 1\cdot(q_1,q_2,q_3)$$

Så alle regulære, ikke periodiske, irreducible Markov har egenværdien 1, og dermed har de en stationær tilstand.
At Markov kæden vil nærme sig til egentilstanden efter et passende antal iterationer er derimod ikke indlysende, men det kan vises enten algebraisk og analytisk.

3. Exampel 1: Katten og musen i labyrinten



Figuren til venstre viser en "labyrint" med 4 rum. i hvert rum er der to udgange til to af de øvrige rum.
Lad os antage at en kat og en mus befinder sig i hvert sit rum.
Lad os endvidere antage at antage, at sandsynligheden for at katten efter et skridt befinder sig i et af nabo rummene er ½ . Vi antager også, at katten og musen i hvert skridt bevæger sig hvor den er til et nabo rum med sandsynligheden ½.
Vi har således for eksempel, at $P(1\to 2)=\frac{1}{2}$ og $P(1\to 3)=0$
Markov matricen T bliver en 4x4 overgangs matrix.

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \end{pmatrix}$$

Lad os antage at katten begynder med at være i rum (1).
Den start sandsynlighedsfordelingen er derfor: $s_0=(1,0,0,0)$. For at bestemme sandsynlighedsfordelingen efter et skridt, ganger vi overgangsmatricen fra venstre med s_0.

1. skridt. $$(1,0,0,0)\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \end{pmatrix} = (0,\tfrac12,0,\tfrac12)$$

2. skridt. $(0,\frac12,0,\frac12)*T=(\frac14+\frac14,0,\frac14+\frac14,0)=(\frac12,0,\frac12,0)$

3.skridt. $(\frac12,0,\frac12,0)\bullet T=(0,\frac12,0,\frac12)$.

Vi bemærker da at sandsynlighedsfordelingen for kattens position er cyklisk med perioden 2.
Vi skal nu gøre det samme, men fra musen synspunkt.
Til start er musens sandsynlighedsfordeling (0,0,1,0).

1. skridt. $(0,0,1,0)\bullet T=(0,\frac12,0,\frac12)$

2. skridt: $((0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) \bullet T = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$
3. skridt: $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \bullet T = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

Ikke overraskende er musens sandsynlighedsfordeling også cyklisk med perioden 2. Vi noterer os at i tilstandene (1) og (3) har katten og musen den samme sandsynlighedsfordeling. Derfor er sandsynligheden for at katten og musen er i det samme rum lig med: $(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) \cdot (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Vi vil nu ændre overgangsandsynlighederne , sålededes at katten (og musen) har sandsynligheden 1/2 for at forblive i det rum den er i, mens sandsynligheden for at den skifter til et af de to nabo rum er 1/4.
Overgangsmatricen og sandsynlighedsfordelingen bliver for katten efter tre skridt.

$$(1,0,0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\frac{1}{4})$$

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\frac{1}{4})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{3}{8},\frac{2}{8},\frac{1}{8},\frac{2}{8})$$

$$(\frac{3}{8},\frac{2}{8},\frac{1}{8},\frac{2}{8})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{10}{32},\frac{8}{32},\frac{6}{32},\frac{8}{32})$$

Og tilsvarende for musen:

$$(0,0,1,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$$

$$(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{2}{8},\frac{2}{8})$$

$$(\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8},\tfrac{2}{8},\tfrac{2}{8})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\tfrac{7}{32},\tfrac{9}{32},\tfrac{9}{32},\tfrac{7}{32})$$

Hvis vi beregner sandsynligheden for at katten og musen er i det samme rum efter 3 skridt, må vi beregne: $(\frac{7}{32},\frac{9}{32},\frac{9}{32},\frac{7}{32})\bullet(\frac{10}{32},\frac{8}{32},\frac{6}{32},\frac{8}{32}) = 63/256$.

4. Eksempel: Betinget valg af varemærke

Eksemplet er mere af matematisk karakter, end at det afspejler virkeligheden.
Lad os antage at kunderne i et supermarked køber den samme vare, som findes i 3 forskellige mærker, som vi kalder *A,B* og *C*. Vi antager af valget a mærke er givet ved følgende overgangs matrix. Den udtrykker, at hvis kunderne i en uge har valgt *A,B* eller *C*, så er sandsynlighederne for valg den næste uge givet ved overgangsmatricen.

$$P(A \to A) = 0.85,\quad P(A \to B) = 0.10\ ,\quad P(A \to C) = 0.05\,.$$
$$P(B \to A) = 0.15,\quad P(B \to B) = 0.80\,,\quad P(C \to C) = 0.05$$
$$P(C \to A) = 0.20,\quad P(C \to B) = 0.10,\quad P(C \to C) = 0.65$$

Hvis vi antager at kunderne køber varen hver uge, så kan vi beskrive systemet som en Markov kæde givet ved følgende Markov overgangsmatrix.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.20 & 0.15 & 0.65 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vi kan se at de tre kunder (1) , (2), (3) favoriserer mærkerne henholdsvis *A, B, C*. og vi er nu interesserede i hvorvidt dette mønster for varekøb ændrer sig fra et Makov kæde synspunkt.
For eksempel om vil varen *C* eventuelt vil blive helt afskrevet eller vil Markov kæden med tiden blive en stationær tilstand, det vil sige en egentilstand til overgangsmatricen.
At det sidste vil være tilfældet er en af de mest grundlæggende sætninger i teorien for Markov kæder.
Nedenfor er vist en computer simulation, svarende til 16 iterationer. Vi antager at sandsynlighedsfordelingen til at begynde med er:

A	*B*	*C*
0.200	0.300	0.500

```
Probability table

 0.850   0.100   0.050
 0.150   0.800   0.050
 0.150   0.800   0.050

initial state:
```

```
 0.200   0.300   0.500
Sum of probabilities in initial state=  1.000

Probabilities for new state 1
 0.290   0.660   0.050
sum of probabilities for state  1   1.000

Probabilities for new state:   2
 0.353   0.597   0.050
sum of probabilities for state  2   1.000

Probabilities for new state:   3
 0.397   0.553   0.050
sum of probabilities for state  3   1.000

Probabilities for new state:  15
 0.499   0.451   0.050
sum of probabilities for state  15   1.000

Probabilities for new state:  16
 0.499   0.451   0.050
sum of probabilities for state  16   1.000
```

Fra den 15. iterationer virker det plausibelt, at (0.499, 0.451, 0.053) faktisk er en stationær tilstand.

5. Eksempel. The random walk i en dimension

"The random walk", dukker ofte op i den statistiske mekanik, men her er det ofte i to eller 3 – dimensioner. Se for eksempel: http://olewitthansen.dk/Fysik/Brownske_bevaegelser.pdf

i sammenhæng med Markov kæder, skal vi kun betragte bevægelser i én dimension.
Her er der to tilstande: Et skridt forlæns eller et skridt baglæns med sandsynlighederne *p* og 1 - *p*.
Overgangsmatricen er meget simpel:

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Vi antager at begyndelsestilstanden er (1,0), altså et skridt forlæns, og at denne tilstand svarer til positionen 0. Det næste skridt er til højre eller til venstre med sandsynlighederne *p* og 1 - *p*.

$$(1,0)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = (p, 1-p)$$

Og efter to skridt:

$$(p, 1-p)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = (p^2+(1-p)^2,\ p(1-p)+p(1-p) = (p^2+(1-p)^2, 2p(1-p))$$

Summen af sandsynlighederne i tilstandsvektoren skulle være lig med 1, hvilket vi konstaterer:
For det første skridt $(p+1-p)=1$, og for det andet skridt:

$$(p^2+(1-p)^2 +\ 2p(1-p)) = (p+(1-p)^2 = 1$$

Hvilket tyder på at summen af sandsynlighederne i tilstandsvektoren er binomialfordelt

$$(p^2+(1-p)^2, 2p(1-p))\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} =$$
$$(p^3+p(1-p)^2+2p(1-p)^2 \ , \ p^2(1-p)+(1-p)^3+2p^2(1-p)$$

Tager vi summen af sandsynlighederne efter 3 skridt finder vi efter at have omordnet leddene:

$$p^3+3p^2(1-p)+3p(1-p)^2+(1-p)^3=(p+(1-p))^3=1$$

Så efter det n'te er sandsynligheden for at have taget j skridt til venstre og $n-j$ skridt til højre binomialfordelt

$$\binom{j}{n-j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Eller, hvis $p=\frac{1}{2}$:

$$\binom{j}{n-j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Hvis vi ønsker at beregne middelpositionen ud fra $X(0)=1$. Finder vi:

$$P(X(j \to j+1)=p \ \text{ and } \quad P(X(j \to j-1)=1-p$$

På positionen j, så er middelpositionen efter et skridt: $E(X)=(j+1)p+(j-1)(1-p)=j+2p-1$
Hvis $p=\frac{1}{2}$, så er $E(X)=j$, som det burde være.
Vi skal også beregne variansen $\sigma^2(n)$ ved et skridt: Idet ethvert skridt er uafhængigt af de øvrige
Har vi $\sigma^2(n)=n\sigma^2(1)$ og $\sigma^2(1)=E(X^2)-E(X)^2=(+1)^2p+(-1)^2(1-p)-(2p-1)^2=-4p(p-1)$
Ikke umiddelbart indlysende, men sætter vi $p=\frac{1}{2}$ så er $\sigma^2(1)=1$.
Men $\sigma^2(1)=1$ medfører at

$$\sigma^2(n)=n\sigma^2(1)=n,$$

Så spredningen på positionen efter n skridt er

$$\sigma(n)=\sqrt{n}\,.$$

Det sidste resultat er helt generelt for en random walk også i to eller 3 dimensioner.

6. Eksempel: Længden af en kø, som folk stiller sig i og forlader

Lad os antage, at vi (for 20 år siden) har en kø ved betjeningslugen i en bank. Længen af køen ændres med et konstant tidsinterval, hvor køen med sandsynlighed p enten forlænges med én, fordi en ny kunde kommer ind i banken eller formindskes med én, fordi en kunde forlader køen med sandsynlighed 1- p.

Matematisk set er dette problem identisk med "the random walk". Hvis j betegner længden af køen til tidspunktet t, så gælder der nemlig : $P(j \to j+1) = p$ og $P(j \to j-1) = 1-p$.
For overgangsmatricen gælder nemlig:

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Summen af sandsynligheder i tilstandsvariablen. For $n = 3$ er summen

$$p^3 + 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 + (1-p)^3$$

Vi genkender dette som binomialfordelingen for $(p + (1 - p))^3$.
Nedenfor er vist køens længde og sandsynlighederne for at køen har denne længde, forudsat at køens længde til tiden t er 1.

+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
p^3	0	$3p^2(1-p)$	0	$3p(1-p)^2$	0	$(1-p)^3$

Hvad angår middelværdi og varians af længden af køen, så er det det samme som for "The random walk".

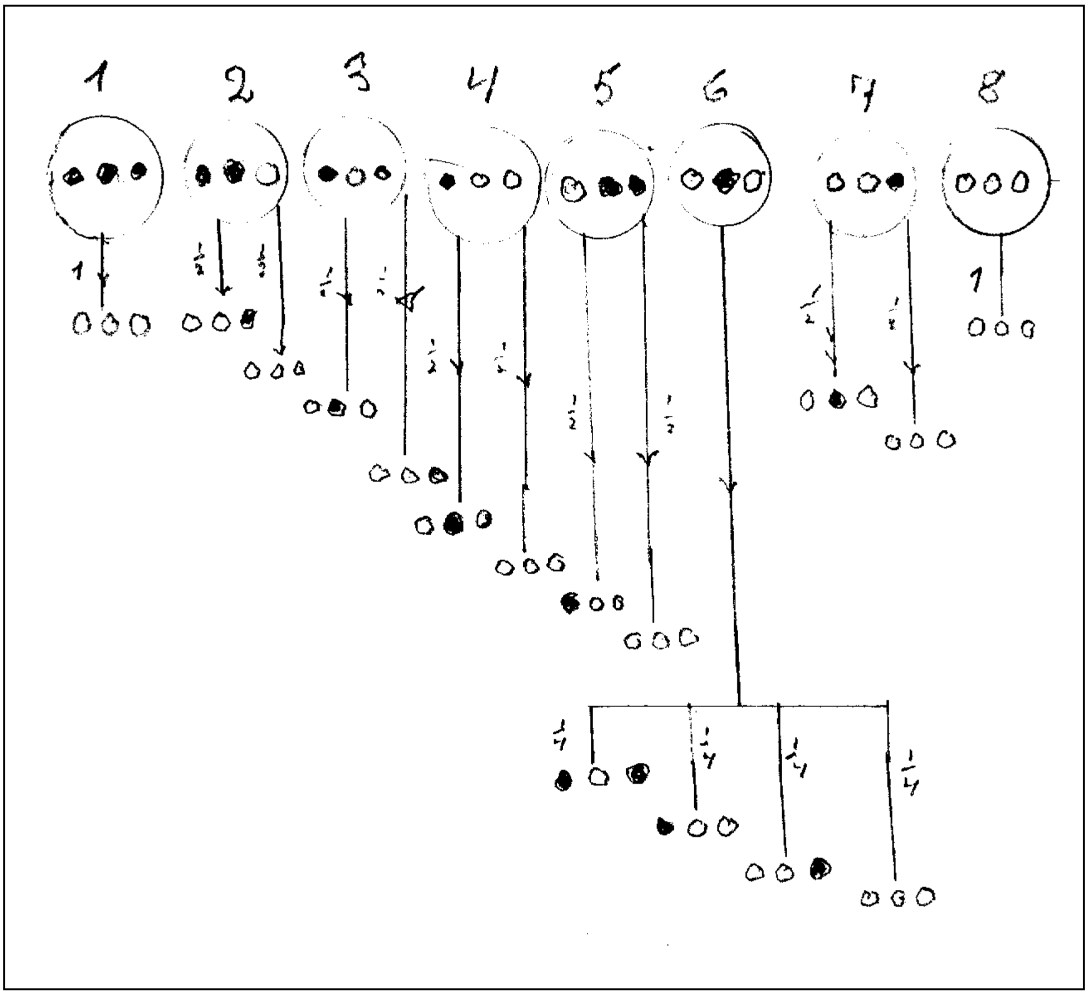
7. Eksempel: Forløbet af en smitsom sygdom

Vi skal nu se på en Markov kæde som simulerer udbredelsen og afslutningen af en smitsom sygdom Vi tænker os tre personer, som enten kan være syge eller raske. En rask person er markeret med en åben cirkel og en syg med en sort cirkel.
Vi respekterer rækkefølgen af de 3 personer, således at der er $2^3 = 8$ mulige tilstande, som vi betegner med 1..8. Nedenfor er en grafisk illustration af de otte tilstande.
Hvis systemet er i tilstanden til tidspunktet $t = n$ så er der en overgang til en ny tilstand $t = n+1$, som opfylder følgende tre regler.

1. Hvis en person er syg til $t = n$, så er personen rask til $t = n + 1$.
2. Hvis en rask person har en syg nabo til $t = n$, så bliver personen syg til $t = n + 1$ med sandsynligheden p og fortsætter med at være rask med sandsynligheden $1 - p$.
3. En rask person forbliver rask, hvis personen ikke har nogen syge naboer.

i den grafiske repræsentation nedenfor er angivet de mulige tilstande, sammen med sandsynligheden for overgang til de mulige tilstande ifølge reglerne 1 -3.

For eksempel tilstand 4 (sort, hvid, hvid) kan enten overgå til (hvid, sort, hvid) eller (hvid, hvid, hvid) I den grafiske repræsentation nedenfor har vi valgt $p = ½$.



Sandsynlighederne i overgangsmatricen er opnået ved at betragte den grafiske repræsentation ovenfor. For eksempel er sandsynlighederne $P(4 \to 6) = 0.5$ *og* $P(4 \to 8) = 0.5$. Alle andre Alle andre overgange fra (4) har sandsynligheden nul.
Nedenfor er vist overgangsmatricen for Markov kæden, som hører til sygdommens udbredelse. Idet summen af sandsynlighederne i hver række er lig med 1, er Markov matricen regulær, hvilket betyder, at summen af sandsynlighederne i den nye tilstand være lig med 1.

Nedenfor er vist Markov overgangsmatricen fra computer simulationen. Her har vi valgt
$p = p12 = 0.5,\ \ q12 = 1 - p12, og\ \ p14 = p12/2$.
Valget af overgangssandsynligheder har imidlertid (indenfor rimelige grænser) ikke stor indflydelse på det generelle resultat.

Overgangs matricen

```
((0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,1.0),
(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,p12,p12),
(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,p12,0.0,q12),
(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,p12,0.0,q12),
(0.0,0.0,0.0,p12,0.0,0.0,0.0,q12),
(0.0,0.0,p14,p14,0.0,0.0,p14,p14),
(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,p12,0.0,q12),
```

```
(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,1.0));
```

Nedenfor er vist overgangsmatricen, begyndelsestilstanden og de første 5 iterationer.
Det bemærkes, at allerede efter 3 iterationer er stort set alle blevet raske, og vi derefter har nået en stationær tilstand.

probability table

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.500
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.500
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.500
0.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.500
0.000	0.000	0.250	0.250	0.000	0.000	0.250	0.250
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.500
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

initial state
0.400 0.200 0.100 0.200 0.100 0.000 0.000 0.000
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 1
0.000 0.000 0.000 0.050 0.000 0.150 0.100 0.700
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 2
0.000 0.000 0.038 0.038 0.000 0.075 0.038 0.813
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 3
0.000 0.000 0.019 0.019 0.000 0.056 0.019 0.888
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 4
0.000 0.000 0.014 0.014 0.000 0.028 0.014 0.930
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 5
0.000 0.000 0.007 0.007 0.000 0.021 0.007 0.958
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 6
0.000 0.000 0.005 0.005 0.000 0.011 0.005 0.974
sum of probabilities= 1.000

probabilities for state no 11
0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.001 0.000 0.998
sum of probabilities= 1.000

Vi ser at blot efter 3 iterationer er alle blevet raske, og befinder sig i tiælstanden (8).
Den tilstand kaldes (af indlysende grunde) en absorberende tilstand.

8. Eksempel. Kugler i en urne

Vil vil først betragte det (næst) simpleste tilfælde, hvor vi har to urner A og B, som hver indeholder 3 kugler. Der er i alt 3 røde og 3 hvide kugler.
Vi bevæger os fra en tilstand til den næste ved at tage en kugle fra hver af urnerne samtidigt, hvorefter kuglerne bytes om og lægges samtidig tilbage i de to urner.
Vi antager herefter at antallet af rode kugler er en stokastisk variable med værdimængden (0,1, 2, 3).
Vi vil derefter beregne sandsynlighederne: $P(X = j \mid X = i) = P(i \to j)$ for $i, j = 0,1,2,3$ på en systematisk måde. i almindelighed vil vi kun beregne sandsynligheder, som er forskellig fra nul.

$P(0 \to 0) = 0$, i det alle de røde kugler er i B.
$P(0 \to 1) = 1$ Idet, hvis man tager en kugle fra B, så er den rød.
$P(1 \to 0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (Der er en rød i A og 1 hvid i B)
$P(1 \to 1) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ (Enten tager man en rød fra A og modtager en rød fra B eller man tager en hvid og modtager en hvid).
$P(1 \to 2) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
(Man tager en hvid fra A ($p = \frac{2}{3}$) og modtager en rød fra B: $p = \frac{2}{3}$).
$P(2 \to 1) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (Man tager en rød fra A ($p = \frac{2}{3}$) og modtager en hvid ($p = \frac{2}{3}$))
$P(2 \to 2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ (som ovenfor 1 til 1)
$P(2 \to 3) = \frac{1}{9}$

Bemærk at i hvert tilfælde $i \to j,\ j = 0..3)$ er summen af sandsynlighederne lig med 1, som de skulle være.

8.1 Kugler i en urne. Resultat fra en computer simulation

Vi vælger begyndelsestilstanden med 3 røde i A. Fra udskriften nedenfor, kan vi se at kun efter nogle få iterationer, nærmer sandsynlighedsfordelingen en stationær tilstand, nemlig

0 røde	1 rød	2 røde	3 røde
0.050	0.450	0.450	0.050

<u>Udskrift fra computersimulationen</u>

probability table

0.000	1.000	0.000	0.000
0.111	0.444	0.444	0.000
0.000	0.444	0.444	0.111
0.000	0.000	1.000	0.000

initial state

0.000	0.000	0.000	1.000

State no 1

0.000 0.000 1.000 0.000

State no 2
0.000 0.444 0.444 0.111

State no 3
0.049 0.395 0.506 0.049

State no 4
0.044 0.450 0.450 0.056

State no 5
0.050 0.444 0.456 0.050

State no 6
0.049 0.450 0.450 0.051

State no 7
0.050 0.449 0.451 0.050

State no 8
0.050 0.450 0.450 0.050

9. Eksempel. Kugler i en urne (2)

Vi skal nu se på en lidt forskellig version af problemet ovenfor, idet vi har to utrner med henholdsvis 3 røde og 4 hvide kugler.
Overgangssandsynlighederne afviger kun lidt fra dem i det foregående eksempel.
Overgangsmatricen er som før givet ved: $p_{ij} = P(X = j \mid X = i) = P(i \to j)$,
X er en stokastisk variabel, der som før betegner antallet af røde kugler i A.

$P(0 \to 0) = \frac{1}{4}$. Man må tage en hvid kugle fra A, og siden der er 4 kugler i B, 3 røde og en hvid er sandsynligheden for at trække en hvid lig med ¼.
$P(0 \to 1) = \frac{3}{4}$. Idet der er 3 røde kugler i B.
$P(1 \to 0) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Der er en rød kugle i A og to hvide i B.
$P(1 \to 1) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dette kan opnås enten ved at tage en rød fra A og få en rød kugle fra B eller tage en hvid kugle fra A og få en hvid kugle fra B.
$P(1 \to 2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
$P(2 \to 0) = 0$
$P(2 \to 1) = \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
$P(2 \to 2) = \frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$
$P(2 \to 3) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Omstændighederne ved dette eksempel er de samme som i foregående og vi nøjes med at vise resultaterne fra computer simulationen. Vi kan se, at sandsynlighedsfordelingen (0,1,2,3) af røde

kugler bliver stationær med (0.05, 0.45, 0 .45, 0.05) efter blot 5 iterationer når iterationen begynder med sandsynlighedsfordelingen (0, 0, 0, 1)
.

```
Overgangsmatricen for antallet af rode kugler

 0.000   1.000   0.000   0.000
 0.111   0.444   0.444   0.000
 0.000   0.444   0.444   0.111
 0.000   0.000   1.000   0.000

initial state

 0.000   0.000   0.000   1.000

probabilities for state no  2
 0.000   0.444   0.444   0.111

probabilities for state no  3
 0.049   0.395   0.506   0.049

probabilities for state no  4
 0.044   0.450   0.450   0.056

probabilities for state no  5
 0.050   0.444   0.456   0.050

probabilities for state no  6
 0.049   0.450   0.450   0.051

probabilities for state no  7
 0.050   0.449   0.451   0.050

probabilities for state no  8
 0.050   0.450   0.450   0.050
sum of probabilities=  1.000
```

10. Det generelle diffusionsproblem

Vi skal nu generalisere problemet med 3 kugler i to urner til n kugler i hver af de to urner A og B. i hver af urnerne A og B, har vi til ethvert tidspunkt n kugler, så i alt er der $2n$ kugler, nemlig $2r$ røde kugler og $2w$ hvide kugler.

i urnen A er der til et givet tidspunkt p røde og q hvide kugler, således at $p + q = n$.
Vi vil da udregne sandsynlighederne: (1) A mister en rød kugle, men får en hvid. (2). Antallet af røde kugler er uændret. (3) A får en rød kugle og mister en hvid.

$$P(p \to p-1),\ P(p \to p)\ \text{ og }\ P(p \to p+1)$$

p er antallet af rode kugler i A.

(1) $$P(p \to p-1) = \frac{p}{n}\frac{2w-q}{n}$$ (A Mister en rød kugle og får en hvid kugle)

(2) $P(p \to p) = \frac{p}{n}\frac{2r-p}{n} + \frac{q}{n}\frac{2w-q}{n}$ (A Mister en rød kugle og får en rød kugle)

(3) $P(p \to p+1) = \frac{q}{n}\frac{2r-p}{n}$ (A får en rød kugle og mister en hvid kugle)

Det er let at overbevise sig selv om, at disse former er identiske med de former vi anvendte med eksemplet, hvor n = 3.

$$P(1 \to 0) = \frac{p}{n}\frac{2w-q}{n} = \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{9}$$

$$P(1 \to 1) = \frac{p}{n}\frac{2r-p}{n} + \frac{q}{n}\frac{2w-q}{n} = \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9}$$

$$P(1 \to 2) = \frac{q}{n}\frac{2r-p}{n} = \tfrac{2}{3}\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}$$

Vi kan også sammenligne denne fordeling med binomialfordelingen, hvor en kugle tages tilfældig med sandsynligheden ½.
Sandsynlighedsfordelingen for antallet af rode kugler efter 3 gentagelser er :

0	1	2	3
0.1250	0.3750	0.3750	0.1250

Denne stokastiske sandsynlighedsfordeling er mærkbart forskellig fra den deterministiske Markov fordeling.

11. Eksempel: Stokastisk spil om en krone. Absorberende tilstande

Vi skal nu se på et spil, hvor to spillere A and B spiller om en krone. En mønt bliver kastet. Hvis den viser *krone* , så vinder A en krone ellers vinder B en krone.
Ved spillets begyndelse har hver af deltagerne tre kroner. Spillet slutter, når en af spillerne har mistet hele sin kapital.
La
Lad q være antallet af kroner som A har, så q kan antage værdierne (0, 1, 2, 3 ,4, 5, 6)
Sandsynligheden for at tilstanden q resulterer i tilstanden q +1 (q <3) er p = ½, og ellers lig med 0.
$P(q \to q+1) = \frac{1}{2}$ for q <3 og ellers 0

På samme måde er er sandsynligheden for at tilstanden q resulterer i tilstanden q -1 (q>0) lig med p. og ellers lig med nul.

Idet spillet er slut hvis en a spillerne har 6 kroner eller 0 kroner, så er der ingen overgange fra (1,1) og (6,6) til *andre* tilstande. Vi antager derfor at summen af sandsynlighederne for at befinde sig i en af disse to tilsande må være 1. På grund af symmetrien må hver af sandsynlighederne være 0.50.
Vi sætter af formelle grunde $P(0 \to 0) = 1$ og $P(6 \to 6) = 1$, idet spillet da er slut
Computer simulationen viser at dette også er tilfældet, men først efter omkring 40 iterationer.
Tilstandene kaldes af denne grund for **absorberende tilstande**

Markov overgangsmatricen for spillet

```
probability table
 1.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000
 0.500   0.000   0.500   0.000   0.000   0.000   0.000
 0.000   0.500   0.000   0.500   0.000   0.000   0.000
 0.000   0.000   0.500   0.000   0.500   0.000   0.000
 0.000   0.000   0.000   0.500   0.000   0.500   0.000
 0.000   0.000   0.000   0.000   0.500   0.000   0.500
 0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   1.000

initial state:
 0.000   0.000   0.000   1.000   0.000   0.000   0.000
sum of probabilities in initial state=  1.000

new state   1
 0.000   0.000   0.500   0.000   0.500   0.000   0.000
new state   2
 0.000   0.250   0.000   0.500   0.000   0.250   0.000
new state   3
 0.125   0.000   0.375   0.000   0.375   0.000   0.125
new state   4
 0.125   0.188   0.000   0.375   0.000   0.188   0.125
new state   5
 0.219   0.000   0.281   0.000   0.281   0.000   0.219
new state   6
 0.219   0.141   0.000   0.281   0.000   0.141   0.219
new state   7
 0.289   0.000   0.211   0.000   0.211   0.000   0.289
new state   8
 0.289   0.105   0.000   0.211   0.000   0.105   0.289
new state   9

Jump to state 43

 0.499   0.000   0.001   0.000   0.001   0.000   0.499
new state  44
 0.499   0.001   0.000   0.001   0.000   0.001   0.499
```

Vi noterer os symmetrien i tilstandsvektoren, som det også skulle være.