# Lineær programmering

# En introduktion

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk

Ole Witt-Hansen 2020-11-29

Indhold

## 1. Lineær programmering

Lad der være givet en lineær funktion af to variable

$$f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2,$$

hvor $(a_1, a_2) \neq (0,0)$

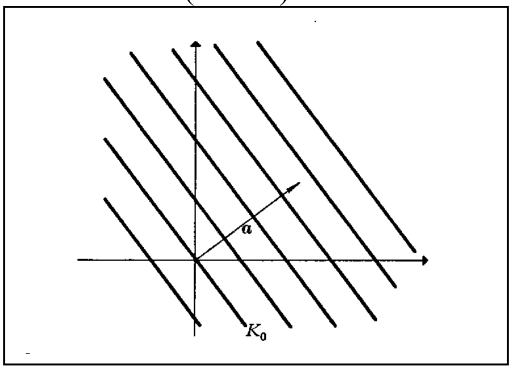
At en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ....x_n)$ er lineær, betyder som bekendt, at følgende to betingelser er opfyldt:

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \quad \text{og} \quad f(\lambda\bar{x}) = \lambda f(\bar{x})$$

Hvor $\bar{x}$ betegner talsættet $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ og $\lambda \in R$

Vi vil da undersøge hvorvidt $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ har en størsteværdi og/eller en mindsteværdi i en punktmængde *M*.

Ligningen $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ fremstiller en linie i planen med normalvektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ For forskellige værdier af *c*, kaldes de niveaulinier, idet det er linier, hvor den lineære funktion har den samme værdi (niveau). Alle niveaulinierne er vinkelret på normalvektoren. Se figuren nedenfor,




Det er klart, at $f(x_1, x_2)$ er voksende i normalvektorens retning, idet dette er retningen af voksende niveaukurver. Hvis $P(x_1, x_2)$ er et punkt i punktmængden *M*, så er projektionen af *P* på normalvektoren $\vec{a}$ lig med:

$\vec{OP} \cdot \vec{a} / |\vec{a}| = (a_1x_1 + a_2x_2) / |\vec{a}| = c / |\vec{a}|$

Heraf ses, at funktionen har sit max/min når projektionen Af $P(x_1, x_2)$ på normalvektoren har sit max/min.

Hvis punktmængden er begrænset af en lukket kurve, er det derfor klart at eventuelle max/min må befinde sig på randen af kurven. Hvis punktmængden er en regulær polygon må max/min befinde sig i polygonens hjørner.

Hvis, derimod punktmængden er omsluttet af en differentiabel kurve, som vist på figuren til venstre, kan man se, at max og min skal findes i punkter, hvor en niveaukurve tangerer den omsluttende kurve.

Idet $\vec{a} = (a_1, a_2)$ er en normalvektor til niveaukurverne er tværvektoren $\hat{a} = (-a_2, a_1)$ parallel med niveaulinierne.

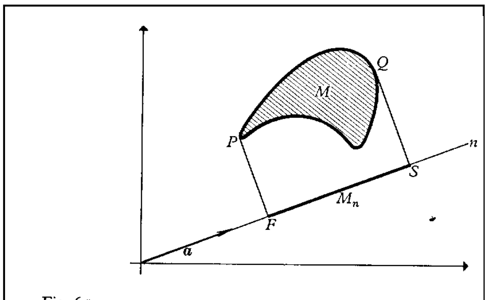


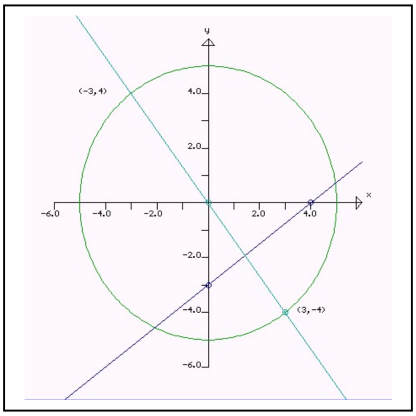
Fig. 6.1

Hvis den omsluttende kurve er givet ved parameterfremstillingen $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$ er tangentvektoren: $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Betingelsen for at niveaulinierne tangerer kurven, der omslutter punktmængden er da at tværvektoren $\hat{a} = (-a_2, a_1)$ er parallel med tangentvektoren, hvilket kan udtrykkes.

$$(x'(t), y'(t)) / |\vec{f}'(t)| = \pm (-a_2, a_1) / |\hat{a}|$$

Vi skal se på et simpelt eksempel, hvor vi vil bestemme størsteværdi og mindsteværdi for funktionen $f(x, y) = 3x - 4y$ i punktmængden: $x^2 + y^2 \leq 25$.




En parameterfremstilling for randkurven er (5cost, 5sint), og differentialkvotienten for dette er: $(-5\sin t, 5\cos t)$.
En enhedsvektor, som er parallel med niveaulinierne er: $(-a_2, a_1)/|\hat{a}| = (4,3)/5$ og en enhedsvektor i tangentens retning er $(-\sin t, \cos t)$. Det er tilstrækkeligt at løse ligningerne:

$$\cos t = \pm \tfrac{3}{5}$$

Som giver:

$$(\cos t, \sin t) = (\tfrac{3}{5}\tfrac{4}{5}),\ \ (\cos t, \sin t) = (-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}),$$

som det kan ses af figuren til venstre.

## 1.1 Eksempel

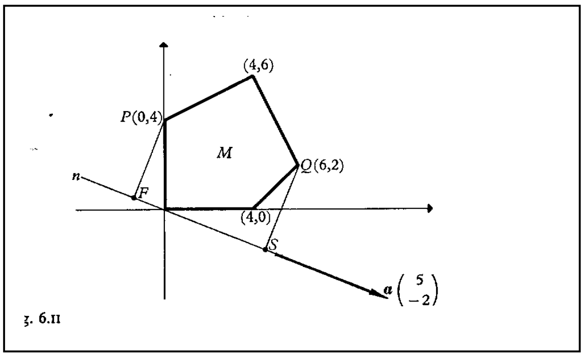
Vi ønsker nu at bestemme størsteværdi og mindsteværdi, som funktionen $f(x,y) = 5x - 2y$ har i punktmængden

$$\begin{aligned} M = \{(x,y) \mid x &\geq 0 \wedge \\ y &\geq 0 \wedge \\ 2x - 4y + 16 &\geq 0 \wedge \\ -x + y + 4 &\geq 0 \wedge \\ -4x - 2y + 28 &\geq 0\,\} \end{aligned}$$

Ulighederne beskriver 5 halvplaner. Fællesmængden for de 5 halvplaner er en femkant.
De fem udtryk er positive i den halvplan, som normalvektoren til linien peger ind imod. For de 5 linier er normalvektorerne (1,0), (-1,1), (-1,1), (-4,-2). På figuren nedenfor er linierne, svarende til de fem uligheder indtegnet. Fællesmængden ses at være en femkant, som har de to af siderne liggende på akserne. For at bestemme de skæringspunkter, der ligger i 1.kvadrant, ses det af figuren, at vi skal løse de to ligningssystemer:

$$\begin{matrix} 2x - 4y + 16 = 0 \\ -4x - 2y + 28 \geq 0 \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} 2x - 4y + 16 \geq 0 \\ -4x - 2y + 28 \geq 0 \end{matrix}$$

Det første ligningssystem løses ved at gange den øverste ligning med 2 og addere ligningerne heraf finder man, at $y$ = 6 og $x$=2.
På samme måde løses den anden ligning ved at gange den øverste ligning med 2 og addere ligningerne, heraf får man $y$ = 6 og $x$ = 4.
Vi ved allerede, at max og min for funktionen skal søges blandt hjørnerne i femkanten, idet de vil have den henholdsvis største og mindste projektion på normalvektoren til linien.




Af figuren ses, at $Q$(6,2) har den største projektion på normalvektoren til linien og at $P$(0,4) har den mindste projektion på normalvektoren.

Idet $f(x,y) = 5x - 2y$, finder vi:

$$f(6,2) = 26 \ \text{ og } f(0,4) = -8$$

Hvis man ikke kan støtte sig til en geometrisk figur,

Bliver man nødt til at udregne funktionsværdierne i s  samtlige polygonens hjørner. Dette gælder især, hvis funktionen, er en funktion af mere end to variable, hvor man skal finde skæringspunkter mellem rumlige figurer eller hyperplaner.
Vi udregner nu funktionsværdierne af $f(x,y)=5x-2y$ i de resterende 3 hjørner:

$$f(4,0)=10,\ \ f(4,6)=8,\ \ f(0,0)=0$$

## 1.1 Eksempel

I havnene *A* og *B* ligger henholdsvis 8 og 7 skibe. Disse skibe skal sejle til havnene *P*, *Q* og *R,* således at 4 skibe skal sejle til *P*, 5 skibe skal sejle til *Q* og 6 skibe skal sejle til *R*. Afstandene i sømil fra udgangspunkterne til de modtagne havne er givet ved følgende tabel.

| | *P* | *Q* | *R* |
|---|---|---|---|
| *A* | 190 | 300 | 250 |
| *B* | 250 | 400 | 300 |

Vi skal så søge at afgøre, hvor mange skibe skal sejle fra *A* og *B* til *P,Q* og *R*, således at  den samlede sejlrute bliver mindst mulig.
Vi antager at der sejler $x$ skibe fra *A* til *P* og $y$ skibe fra *A* til *Q*.
Da, der i alt er 8 skibe i *A*, må der sejle $8-x-y$ skibe fra *A* til *R*.
Da *P* modtager 4 skibe må der sejle $4-x$ skibe fra *B* til *P*.
På lignende måde ses det, at der må sejle $5-y$ skibe fra *B* til *Q* og $6-(8-x-y)=x+y-2$ skibe fra *B* til *R*. Disse oplysninger har vi samlet i en tabel.

| | til *P* | til Q | til R | i alt |
|---|---|---|---|---|
| fra *A* | $x$ | $y$ | $8-x-y$ | 8 |
| fra *B* | $4-x$ | $5-y$ | $x+y-2$ | 7 |
| i alt | 4 | 5 | 6 | 15 |

Den samlede sejlrute bliver herefter:
$190x+300y+250(8-x-y)+250(4-x)+400(5-y)+300(x+y-2)=4400-10(x+5y)$
For at minimere den samlede sejlrute ses af ovenstående, at vi skal bestemme max for funktionen

$$f(x,y)=(x+5y)$$

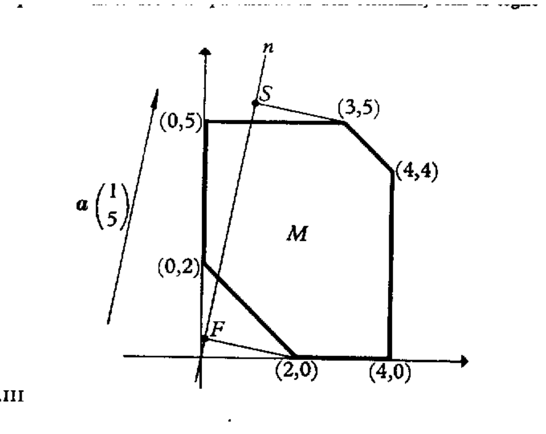
Tallene i tabellen må ikke være negative, så den punktmængde, hvor vi skal søge max er givet ved:

$$M=\{(x,y)\mid x\geq 0\wedge y\geq 0\wedge 8-x-y\geq 0\wedge 4-x\geq 0\wedge 5-y\geq 0\wedge x+y-2\geq 0\}$$

Løsningen skal søges i fællesmængden *M*, som opfylder de 6 uligheder i *M*.
Vi tegner først de akseparallelle linier:

$$x=0,\ y=0;x=4;\ y=5\,.$$

Linien $x+y-2=0$, går gennem (0,2) og (2,0). Vi mangler da blot at bestemme skæringspunkterne mellem $8-x-y$. og linierne $y=5$ og $x=4$, som giver punkterne (3,5) og (4,4).
Polygonen svarende til punktmængden *M*, er illustreret på figuren, sammen med normalvektoren (1,5).



6.III

Af figuren ses, at projektionen på normalvektoren er mindst i (2,0) og størst i (3,5).
Vi kontrollerer resultatet ved at udregne funktionen $f(x,y)=(x+5y)$ i punkterne (0,2), (0,5), (3,5), (4,4), (4,0) og (2,0).
$f(0,2)=10$, $f(0,5)=25$, $f(3,5)=28$,
$f(4,4)=24$, $f(4,0)=4$; $f(2,0)=2$
Heraf fremgår det også, at vi har størsteværdi for funktionen i (3,5) og mindsteværdi i (2,0).
Indsættes $(x,y)=(3,5)$ i tabellen ovenfor, finder man antallet af skibe, der skal sejle til de 3 havne.

| | til *P* | til *Q* | til *R* |
|---|---|---|---|
| fra *A* | 3 | 5 | 0 |
| fra *B* | 1 | 0 | 6 |

## 1.2 Eksempel

De to fabrikker *A* og *B* forsyner 3 aftagere *P, Q* og *R* med en bestemt vare. Hvor meget *A* og *B* kan producere af den pågældende vare og de tre aftageres forbrug af varen fremgår af følgende to tabeller. Den tredje tabel angiver omkostninger pr. enhed ved transporten fra *A* til *P*. etc.

| *A* | *B* |
|---|---|
| 8000 | 7000 |

| *P* | *Q* | *R* |
|---|---|---|
| 4000 | 5000 | 6000 |

| | *P* | *Q* | *R* |
|---|---|---|---|
| *A* | 19 | 30 | 25 |
| *B* | 25 | 40 | 30 |

Vi stiller os nu den opgave, at bestemme antallet af varer, der skal leveres til *P, Q, R*, fra *A* og *B*, således at de samlede omkostninger bliver så små som muligt.
Lad os antage at *A* leverer *x* enheder til *P* og *y* enheder til *Q*, Det følger da at *A* leverer $8000-x-y$ enheder til *R*. Da *P* skal modtage 4000 enheder må *B* levere 4000 - *x* enheder til *P*.
Dette kan opstilles i følgende skema.

| | *P* | *Q* | *R* | i alt |
|---|---|---|---|---|
| *A* | $x$ | $y$ | 8000– $x$ - $y$ | 8000 |
| *B* | 4000 - $x$ | 5000 - $y$ | 7000 – (4000 - $x$) – (5000 – $y$) | 7000 |
| i alt | 4000 | 5000 | 6000 | 15000 |

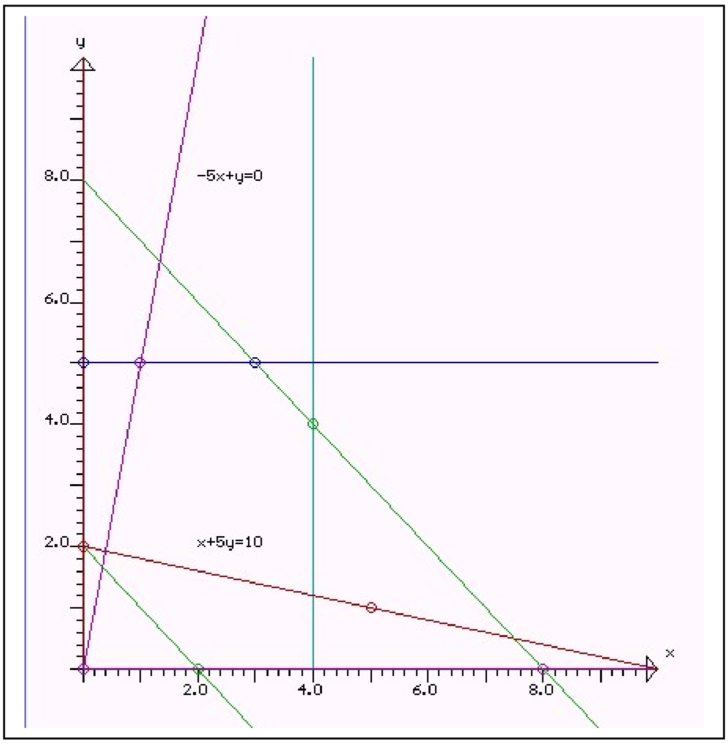
Og efter en mindre reduktion

| | *P* | *Q* | *R* | i alt |
|---|---|---|---|---|
| *A* | $x$ | $y$ | 8000– $x$ - $y$ | 8000 |
| *B* | 4000 - $x$ | 5000 - $y$ | $x+y$ - 2000 | 7000 |
| i alt | 4000 | 5000 | 6000 | 15000 |

Da alle størrelserne i tabellen skal være ikke negative, må følgende uligheder gælde:
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $8000 - x - y \geq 0$; $4000 - x \geq 0$; $5000 - y \geq 0$; $x + y - 2000 \geq 0$
De samlede omkostninger bliver da:

$$19x + 30y + 25(8000 - x - y) + 25(4000 - x) + 40(5000 - y) + 30(x + y - 2000) = -x - 5y + 44000$$

Hvis de samlede omkostninger $-x - 5y + 44000$ skal være mindst, skal $x + 5y$ være størst mulig.
Niveaulinierne er $x + 5y = c$. Vi har set at dette netop er tilfældet i det punkt, eller de punkter, hvor projektionen på normalvektoren er størst.
Nedenfor er vist en grafisk repræsentation. Tallene skal måles i tusinde.




På figuren er indtegnet de 6 linier
$x = 0$
$y = 0$
$8 - x - y = 0$
$4 - x = 0$
$5 - y = 0$
$x + y - 2 = 0$
Fællesmængden af de 6 positive halvplaner er polygonen med hjørnerne (4,0), (4,4), (3,5), (0,5), (0,2) , (2,0).
Endvidere er vist en niveaulinie $x + 5y = 10$ og normalen til denne niveaulinie $\vec{n} = (1,5)$
Grafisk ses det, at projektionen på normalen er størst i (3,5),
Som kontrol udregner vi funktionsværdierne i polygonens 6 hjørner,
$f(x, y) = x + 5y$ : $f(4,0) = 4$ $f(4,4) = 24$, $f(3,5) = 28$, $f(0,5) = 25$, $f(0,2) = 10$, $f(2,0) = 2$.
Som det fremgår, har funktionen sin størsteværdi 28 i (3,5), som vi også aflæste geometrisk.
Minimum for omkostningerne bliver herefter: 44 – 3 – 25 = 36. (målt i tusinde),

## 1.3 Eksempel

E fabrik, der fremstiller automobiler og traktorer er organiseret i fire afdelinger, med hver sin funktion. A: Metalstansing, B: Samling af motorer, C; Endelig samling af biler, D: Endelig samling af traktorer.
Til fremstillingen af en automobil kræves 1/25000 del af A's månedlige kapacitet, 1/34000 del af B's månedlige kapacitet og 1/22500 af C's månedlige kapacitet.
Hvad angår traktorerne er de tilsvarende brøkdele: 1/35000, 1/17000 og 1/15000.
Idet vi regner i tusindedele, anvender vi for bilerne brøkerne: 1/25, 1/34 og 1/22,5
Samt for traktorerne: 1/35, 1/17, 1/15.
Lad $x$ være antallet af producerede biler og $y$ være antallet af producerede traktorer.

Idet summen af de brøkdele, hvormed en afdeling belastes skal være mindre end eller lig med 1, kan vi opstille følgende uligheder.

A: $\frac{x}{25} + \frac{y}{35} \le 1$ B: $\frac{x}{25} + \frac{y}{35} \le 1$ C: $\frac{x}{25} + \frac{y}{35} \le 1$

Fællesmængden af disse halvplaner danner en polygon.
Antager vi at firmaet tjener 30.000 per færdigsamlet bil og 25.000 per færdigsamlet traktor, ønsker vi under betingelserne ovenfor at bestemme $x$ og $y$ , så overskuddet bliver så stort som muligt.

Indtegnes linien $f(x, y) = 30x + 25y$ de tilsvarende linier for ulighederne ovenfor i et koordinatsystem, får vi følgende figur, som vist nedenfor
En (blå) niveaukurve er tegnet nær koordinatsystemets begyndelsespunkt, og den lyseblå linie, er normalen til niveaukurverne. Vi ønsker at finde den maksimale projektion på normalvektoren for punkterne i polygonen. Det eneste skæringspunkt mellem de liniestykker, som afgrænser polygonen og som ikke er et skæringspunkter med akserne, er (20,7). Og ud fra figuren ses, at dette også har den maksimale projektion. Der skal altså produceres 20 biler og 7 traktorer for at opnå den største fortjeneste. Fortjenesten bliver: 775.