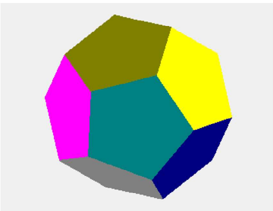
Legendre polynomier og de associerede Legendre polynomier

Dette er en artikel fra min hjemmeside: www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen (2020)

Indhold

1. Legendres differentialligning

Legendres differentialligning optræder hyppigt i fysikken, og især til at finde energi niveauerne i hydrogen (brint). Vedrørende ligningens løsninger, så er Legendres differentialligning en del af de fleste tekstbøger om matematisk fysik.
Teorien for Legendre polynomierne er imidlertid temmelig omfattende og kompleks matematik, og af den grund, er det i almindelighed kun resultaterne, og ikke de detaljerede udledninger, som medtages i de fleste lærebøger i fysik. Legendres differentialligning er:

(1.1) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

Der findes to lineært uafhængige klasser af løsninger til differentialligningen $P_n(x)$ og $Q_n(x)$, men vi skal kun beskæftige os polynomierne $P_n(x)$, som også kaldes Legendre polynomier.
Den mest kompakte måde at udtrykke Legendre polynomierne på er ved hjælp af Rodrigues formel:

(1.2) $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

Desværre er det ikke muligt ved en simpel indsættelse i differentialligningen at vise at Rodrigues formel er en løsning.

Løsningen til Legendres ligning kan enten fremstilles ved en rækkeudvikling, eller man kan anvende binomialformlen på Rodrigues formel. Ingen af delene kan dog gennemføres uden ret omfattende algebraiske operationer.
Som vi demonstrerer nedenfor kan Rodrigues formel imidlertid vises ved at anvende nogle avancerede matematiske tricks.
Især ved anvendelse i fysikken erstattes n ofte med l, som er den almindelige betegnelse for impuls kvantetallet, hvorimod n i almindeighed betegner energikvantetallet. I forbindelse med rækkeudviklinger, så er denne substitution faktisk nødvendig, hvis n også som sædvanlig skal betegne eksponenten i x^n. Så vi skriver herefter Legendres differentialligning:

(1.3) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0$$

2. Løsningen, givet ved en rækkeudvikling.

Antag at foretager en rækkeudvikling af løsningen y.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$
$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

$$(1-x^2)y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$
$$-(2a_2x^2+6a_3x^3+12a_4x^4+\ldots+n(n-1)a_nx^n+\ldots$$
$$-2xy'=-2xa_1-4a_2x^2-6a_3x^3-8a_4x^4+\ldots+-2na_nx^n+\ldots$$
$$n(n+1)y=n(n+1)a_0+n(n+1)a_1x+n(n+1)a_2x^2+n(n+1)a_3x^3+n(n+1)a_4x^4+\ldots+n(n+1)a_nx^n+\ldots$$

Vi indsætter de tre udtryk i differentialligningen og samler leddene med den samme potens af x. Da højresiden af differentialligningen er identisk nul, må samtlige koefficienter til potenserne af x også være nul. Det er et ret omfattende algebraisk arbejde, at identificere koefficienterne direkte ved at opskrive alle leddene, så det undlader vi. Nedenfor er derimod en tabel, hvor det er gjort for konstantleddet, de første 3 koefficienter, samt for det n'led.

	konstantled	x	x^2	x^3	x^n
y''	$2a_2$	$6a_3$	$12a_4$	$20a_5$	$(n+2)(n+1)a_{n+2}$
$-x^2y''$			$-2a_2$	$-6a_3$	$-n(n-1)a_n$
$-2xy'$		$-2a_1$	$-4a_2$	$-6a_3$	$-2na_n$
$l(l+1)y$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_1$	$l(l+1)a_2$	$l(l+1)a_3$	$l(l+1)a_n$

For de første 4 koefficienter får vi:

konst: $2a_2+l(l+1)a_0=0 \;\Rightarrow\; a_2=-\dfrac{l(l+1)}{2}a_0$

x: $6a_3-2a_1+l(l+1)a_1=0 \;\Rightarrow\; a_3=-\dfrac{(l-1)(l+2)}{6}a_1$

x^2: $12a_4-2a_2-4a_2+l(l+1)a_2 \;\Rightarrow\; a_4=-\dfrac{(l-2)(l+3)}{12}a_2=-\dfrac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}a_0$

x^3: $20a_5-12a_3+l(l+1)a_3 \;\Rightarrow\; a_5=-\dfrac{(l+4)(l-3)}{20}a_3$

$$=-\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}a_1$$

x^n:
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(l^2+l-n^2-n)a_n=0 \;\Leftrightarrow$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(l-n)(l+n+1)a_n=0$$

(2.1) $$a_{n+2}=-\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Løsningen deler sig op i to rækker, én for lige potenser af x og én for ulige potenser af x. svarende til $P_l(x)$ for de lige og ulige værdier af l.

$$y = a_0\left(1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4 - ...\right) +$$
$$a_1\left(x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5 - ...\right)$$

Det er vigtigt at notere sig, at for heltallige l er løsningerne til Lagranges differentialligning polynomier. Dette følger af rekursionsligningen:

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

For $n = l$ er $a_{n+2} = 0$, og heraf følger at $a_{n+4} = a_{n+6} = a_{n+8} = \ldots = 0$.

De første 4 Legendre polynomier: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$ er

(2.2)
$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \tfrac{1}{2}(3x^2-1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)
\end{aligned}$$

Legendre polynomierne bliver især i fysik, men skrevet med $x = \cos\theta$ i stedet for med x. Legendre polynomiernes normaliserings og ortogonalitets egenskaber er derfor defineret i intervallet [-1,1]. Ortonormalitetsligningen er vist nedenfor, men vi undlader beviset for dette, da det er ret ”teknisk”.

(2.3)
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Som eksempel, kan man f.eks. let vise:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_0(x)^2 dx = \int_{-1}^{1} 1dx = [x]_{-1}^{1} = 2 \\
&\int_{-1}^{1} P_1(x)^2 dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \tfrac{2}{3} \\
&\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(3x^3 - x)dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Som det fremgår af ligningen:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0$$

Har Legendre polynomierne egenværdierne $l(l+1)$. Idet Legendre polynomierne er en uendelig række af ortonormale funktioner, kan "enhver" funktion udvikles på dem.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x) \qquad \text{hvor} \qquad c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n(x)f(x)dx$$

3. Rodrigues formula

(3.1) $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n$$

Vi påstår, at Rodrigues formel er en løsning til Legendres differential ligning.
Det er desværre ikke muligt at verificere dette ved direkte at indsætte i differentialligningen uden at differentiere til bunds for et givet n.
Der kan imidlertid angives andre metoder. En metode er at anvende binomialformlen til at udvikle $(x^2-1)^n$ i potenser af x^2, og differentiere n gange, men det giver også anledning til ret omfattende algebraiske omformninger.
En tredje mulighed, som ganske vist heller ikke er særlig ligetil er at tage udgangspunkt i funktionen:

$$v(x)=(x^2-1)^n \quad \Rightarrow \quad (x^2-1)\frac{dv}{dx}=(x^2-1)n2x(x^2-1)^{n-1}=2nx(x^2-1)^n=2nxv$$

Så vi har at:

(3.2) $$(x^2-1)\frac{dv}{dx}=2nxv$$

Vi differentierer så denne identitet $n+1$ gange for at vise at $\frac{d^nv}{dx^n}$ faktisk er en løsning til Legendres differentialligning, som det også burde være ifølge Rodrigues formel.

3.1 Om at differentiere et produkt *n* gange

Vi skal først udlede en general formel for resultatet af at differentiere et produkt af to funktioner n gange.

For den k'te afledede $\frac{d^kf}{dx^k}$, skriver vi $f^{(k)}$, og vi sætter $f^{(0)}=f$

For at lede os hen til formlen, begynder vi med produktreglen for differentiation af to funktioner.

$$(fg)'=f'g+fg'=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(1-k)}g^{(k)}$$

$$(fg)''=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}f^{(2-k)}g^{(k)}$$

$$(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg^{(3)}$$
$$= f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} f^{(3-k)} g^{(k)}$$

Som leder os til formlen:

(3.2) $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Denne tentative udledning af formlen, kan naturligvis bekræftes ved induktion. Det er imidlertid kun nødvendigt at se på to led, som følger efter hinanden.

$$\ldots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \binom{n}{k+1} f^{(n-k-1)} g^{(k+1)} + \ldots$$

Og når vi differentierer, får vi:

$$\binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \binom{n}{k+1} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \binom{n}{k+1} f^{(n-k+1)} g^{(k+2)}$$

Produktet af de to differentierede funktioner er det samme i det andet og tredje led, så vi holder de to binomialkoefficienter sammen.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right)$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Og det giver så det k + 1'te led som det skulle:

$$\binom{n+1}{k+1} f^{(n-k)} g^{(k+1)}$$

3. Bevis for Rodrigues formel

Vi vender tilbage til beviset for Rodrigues formel, hvor $v = (x^2 - 1)^n$, ved at differentiere ligningen

$$(x^2 - 1)\frac{dv}{dx} = 2nxv \qquad n + 1 \text{ gange.}$$

Vi sætter $f = (x^2 - 1)$, $g = \frac{dv}{dx}$, og erstatter n med n+1 i formlen (3.2) så vi har:

(3.3) $$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

Idet $f(x) = (x^2 - 1)$, noterer vi at:

$f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2,\ \ f^{(3)}(x) = 0$, så $f^{(n+1-k)} = 0$ når $n + 1 - k > 2 \Leftrightarrow k < n - 1$,

Så den nedre grænse for k er n -1, så det er derfor kun de 3 øverste led, som giver et bidrag forskelligt fra nul.

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=n-1}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} f^{(2)} g^{(n-1)} + (n+1) f' g^{(n)} + f g^{(n+1)}$$

(3.4) $$= \frac{n(n+1)}{2} 2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + (n+1)2x \frac{d^n}{dx^n} \frac{dv}{dx} + (x^2 - 1) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \frac{dv}{dx}$$

$$= n(n+1) \frac{d^n v}{dx^n} + (n+1)2x \frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + (x^2 - 1) \frac{d^{n+2} v}{dx^{n+2}}$$

$$= (x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right) + 2x(n+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right) + n(n+1) \frac{d^n v}{dx^n}$$

Derefter ser vi på højresiden i ligningen: $(x^2 - 1)\frac{dv}{dx} = 2nxv$, idet vi anvender $f = 2nx$ og $g = v$, i

formlen: $$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} .$$

Idet $f(x) = 2nx$ er $f'(x) = 2n$ og $f''(x) = 0$, og vi kan derfor se, at hvis : $n+1- k > 1 \Leftrightarrow k < n$, så er $f^{(n+1-k)} = 0$, så den nedre grænse for k må være n.

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=n}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} =$$

(3.5) $$2n(n+1) f' g^{(n)} + f g^{(n+1)}$$

$$= 2n(n+1) \frac{d^n v}{dx^n} + 2nx \frac{d}{dx} \frac{d^n v}{dx^n}$$

Vi har således, at ligningen

$$(x^2 - 1)\frac{dv}{dx} = 2nxv$$

medfører

$$(x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right) + (n+1)2x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right) + n(n+1) \frac{d^n v}{dx^n} = 2n(n+1) \frac{d^n v}{dx^n} + 2nx \frac{d}{dx} \frac{d^n v}{dx^n}$$

$$\Leftrightarrow$$

(3.6) $$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)+2x\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)-n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n}=0$$

Hvis vi sætter $y=\frac{d^n v}{dx^n}$ finder vi:

(3.7) $$(x^2-1)\frac{d^2 y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0$$

Deraf kan vi se, at $y=\frac{d^n v}{dx^n}$ faktisk er en løsning til Lagranges differentialligning, idet

(3.8) $$v(x)=(x^2-1)^n \qquad \text{og} \qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

Det følger således, at Rodrigues polynomierne $P_n(x)$ er en løsning til Lagranges diferentialligning.

4. Associerede Legendre polynomier

Legendre polynomierne:

(4.1) $$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

Er løsninger til Legendres differentialligning:

(4.2) $$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

Den associerede Legendre differentialligning er:

(4.3) $$(1-x^2)y''-2xy'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

Vi skal nu søge at bevise at ligningen (4.3) har løsningen:

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

Det er imidlertid langt fra simpelt at vise dette, og i de fleste tekst bøger om emnet, nøjes man da også med at anføre resultatet. Vi indleder med at forsøge os med en løsning af formen.

(4.4) $$y=(1-x^2)^n u$$

For at lette regningerne har vi sat $n=\frac{m}{2}$. Først laver vi nogle indledende regninger

$$y'=n(1-x^2)^{n-1}(-2x)u+(1-x^2)^n u'=-2nx(1-x^2)^{n-1}u+(1-x^2)^n u'$$

$$y''=-2n(1-x^2)^{n-1}u+4n(n-1)(1-x^2)^{n-2}x^2u-2xn(1-x^2)^{n-1}u'-2xn(1-x^2)^{n-1}u'+(1-x^2)^n u''$$

$\Leftrightarrow$

$$y''=-2n(1-x^2)^{n-1}u+4n(n-1)(1-x^2)^{n-2}x^2u-4xn(1-x^2)^{n-1}u'+(1-x^2)^n u''$$

Hvilket vi indsætter i den associerede Lagrange ligning.

$$(1-x^2)\left(-2n(1-x^2)^{n-1}u+4nx^2(n-1)(1-x^2)^{n-2}u-4xn(1-x^2)^{n-1}u'+(1-x^2)^n u''\right)-$$
$$2x(-2nx(1-x^2)^{n-1}u+(1-x^2)^n u')+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)(1-x^2)^n u=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(-2n(1-x^2)^n u+4nx^2(n-1)(1-x^2)^{n-1}u-4xn(1-x^2)^n u'+(1-x^2)^{n+1}u''\right)$$
$$+4x^2n(1-x^2)^{n-1}u-2x(1-x^2)^n u'+\left(l(l+1)(1-x^2)^n-m^2(1-x^2)^{n-1}\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2n(1-x^2)^n u+4nx^2(n-1)(1-x^2)^{n-1}u-4xn(1-x^2)^n u'+(1-x^2)^{n+1}u''$$
$$+4x^2n(1-x^2)^{n-1}u-2x(1-x^2)^n u'+\left(l(l+1)(1-x^2)^n-4n^2(1-x^2)^{n-1}\right)u=0$$

Ved division med $(1-x^2)^{n-1}$:

$$-2n(1-x^2)u+4nx^2(n-1)u-4xn(1-x^2)u'+(1-x^2)^2u''$$
$$+4x^2nu-2x(1-x^2)u'+\left(l(l+1)(1-x^2)-4n^2\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2n(1-x^2)u+4nx^2(n-1)u-4xn(1-x^2)u'+(1-x^2)^2u''$$
$$+4x^2nu-2x(1-x^2)u'+\left(l(l+1)(1-x^2)-4n^2\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-4xn(1-x^2)u'-2x(1-x^2)u'-2n(1-x^2)u+4nx^2(n-1)u$$
$$+4x^2nu+\left(l(l+1)(1-x^2)-4n^2\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-2x(1-x^2)(2n+1)u'+(-2n(1-x^2)+4nx^2(n-1)$$
$$+4x^2n-4n^2)u+\left(l(l+1)(1-x^2)\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-2x(1-x^2)(2n+1)u'+(-2n(1-x^2)+4n^2x^2$$
$$-4n^2)u+\left(l(l+1)(1-x^2)\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-2x(1-x^2)(2n+1)u'+(-2n(1-x^2)+4n^2x^2$$
$$-4n^2)u+\left(l(l+1)(1-x^2)\right)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-2x(1-x^2)(2n+1)u'-(1-x^2)(2n+4n^2)u+l(l+1)(1-x^2)u=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)^2u''-2x(1-x^2)(2n+1)u'-(1-x^2)(2n+4n^2)u+l(l+1)(1-x^2)u=0$$

Vi dividerer med $(1-x^2)$ og erstatter $2n$ med m.

$$\boxed{(4.5) \qquad (1-x^2)u''-2x(m+1)u'+\big(l(l+1)-(m(m+1)\big)u=0}$$

For m = 0, ser vi at (4.5) er Legendres differentialligning for u.

$$(4.6) \qquad (1-x^2)u''-2xu'+l(l+1)u=0$$

Som har løsningen $u = P_l(x)$. Differentierer vi (4.5) får vi:

$$(1-x^2)(u')''-2x(u')'-2(m+1)u'-2x(m+1)(u')'+(l(l+1)-m(m+1))u'=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)(u')''-2x(m+2)(u')'+(l(l+1)-(m+1)(m+2))u'=0$$

Men det er blot (4.5) med u' i stedet for u, og $m+1$ i stedet for m. Men det er differentialligningen for $u'=\frac{d}{dx}P_l(x)$ med m =1 i stedet for m = 0.

Ved at differentiere endnu en gang, ses at $u''=\frac{d^2}{dx^2}P_l(x)$ er en løsning for m = 2.

Hvis vi vender tilbage til vores tentative løsning: $y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u$, kan vi se at:

$$(4.7) \qquad y=P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$

Er løsningerne til den associerede Legendre ligning.

Udtrykkene (4.7) kaldes derfor for de *associerede Legendre polynomier*.

Nedenfor er vist de første 6 associerede Legendre Polynomier:

$$P_0^0(x)=1 \qquad P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}$$
$$P_1^0(x)=x \qquad P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}$$
$$P_2^0(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_2^2(x)=3(1-x^2)$$

For m = 0 er de associerede Legendre polynomier de samme som Legendre polynomierne.

Som det er tilfældet for Legendre polynomierne, skrives de i fysikken ofte med $\cos\theta$ i stedet for x og som det er tilfældet for Legendre polynomierne er de associerede Legendre polynomier et uendelig sæt af ortonormaliserede polynomier, idet man kan bevise relationen:(Men vi undlader beviset, da det er overordentlig ”teknisk”)

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{kl}$$

Hvis man erstatter x med $\cos\theta$, så er de associerede Legendre polynomier : $P_l^m(\cos\theta)$ den ene halvdel af de såkaldte kuglefunktioner $Y_l^m(\theta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, som anvendes i kvantemekanikken.