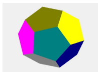
# Laurent rækker, residue-sætningen og udregning af konturintegraler

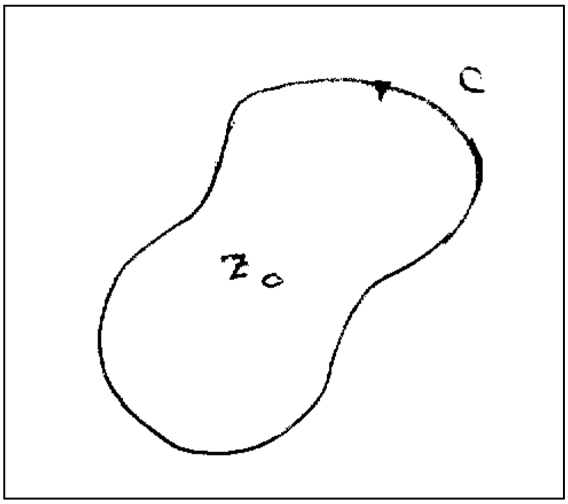


Ole Witt-Hansen 2018

Indhold

## 1. Cauchy's Integralsætninger

Vi indleder med at minde om nogle egenskaber for analytiske funktioner af en kompleks variabel (holomorfe funktioner).
Disse egenskaber er beskrevet i olewitthansen.dk/Matematik/Analytiske_funktioner.pdf.




*Første integralsætning*: I en kompakt mængde, hvor $f(z)$ er analytisk er integralet af $f(z)$ langs en vilkårlig lukket kurve $C$ lig med nul.

(1.1) $$\oint_C f(z)dz = 0$$

*Anden integralsætning*: Funktionsværdien $f(z_0)$ kan bestemmes som integralet langs en lukket kurve, som omslutter $z_0$:

(1.2) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Laver i et variabelskift i udtrykket (1.2) $z_0 \to z \;\; and \;\; z \to \varsigma$ bliver formlen:

(1.3) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$$

Ved at differentiere (1.3) efter $z$, får man:

(1.4) $$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z)^2}$$

Og ved at differentiere $n$ gange.

(1.5) $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z)^{n+1}}$$

## 2.Taylor's formel for analytiske funktioner

Enhver analytisk funktion kan rækkeudvikles, ifølge Taylors formel, ud fra et punkt $z_0$ i et område, hvor den er regulær.

(2.1) $$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \ldots$$

Det er direkte at se, at:

(2.2) $$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

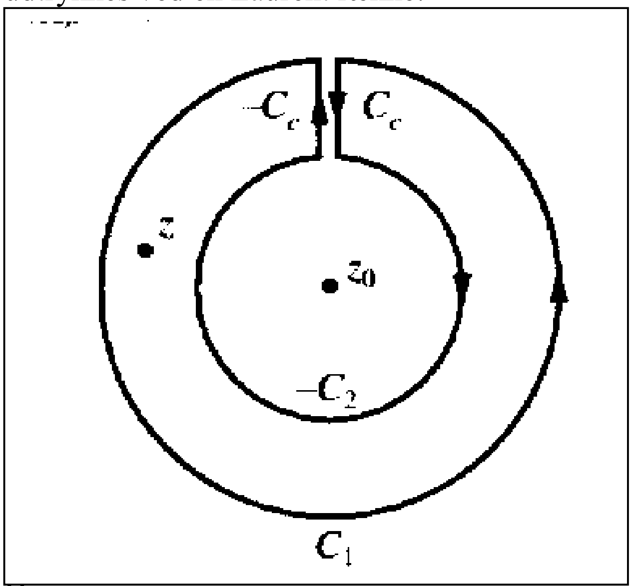
Så Taylor rækken også kan skrives:

(2.3) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

Rækken vil konvergere i en cirkelskive, hvor $|z-z_0|<R$, hvor $f(z)$ er holomorf.
Kriterierne for konvergens af rækkerne, kan direkte overtages fra Taylor rækkerne for de reelle funktioner. Se f.eks. olewitthansen.dk/Matematik/TaylorsFormel.pdf

## 3. Laurent rækker

Lad os antage at $f(z)$ er regulær i en ring beliggende mellem to koncentriske cirkler $C_1$ og $C_2$ med centrum $z_0$.
Vi vil da vise, at hvis $z$ ligger mellem de to koncentriske cirkler, kan $f(z)$ på entydig måde udtrykkes ved en Laurent række:




(3.1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Hvor $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

For at undgå negative indeks deler vi rækken op i to dele:

(3.2) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

Hvor nu

(3.3) $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{og} \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z-z_0)^{n-1}f(z)dz$$

Vi laver da et snit i ringen, så de to cirkler $C_1$ og $C_2$ bliver til en kontur $C$ som vist på figuren.
Da $z$ er et indre punkt i denne kontur, hvor $f(z)$ er holomorf, gælder der ifølge Cauchy's integralsætning:

(3.4) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$$

Vi deler nu konturen op som vist på figuren: $C = C_1 + C_c +(-C_2) + (-C_c)$ og udregner integralet langs de fire kurvestykker.

(3.5) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_c}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_c}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$$

De to bidrag fra $C_c$ og ($-C_c$) vil gå ud mod hinanden, og vi finder herefter:

(3.6) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$$

Vi omskriver nu nævneren i de to integraler.

(3.7) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)-(z-z_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)-(z-z_0)}$$

Som vi yderligere omskriver

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(z-z_0)\left(\dfrac{\varsigma-z_0}{z-z_0}-1\right)}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\varsigma-z_0}{z-z_0}\right)}$$

Nu er begge brøker: $\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}<1$ og $\dfrac{\varsigma-z_0}{z-z_0}<1$ , og vi kan yderligere omskrive integralerne:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1}{1-\dfrac{\varsigma-z_0}{z-z_0}}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(z-z_0)}$$

For en uendelig $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ kvotientrække med kvotient $|q|<1$ gælder formlen: $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\dfrac{1}{1-q}$

Vi anvender derfor denne formel læst fra højre mod venstre på de to faktorer:

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)^n \quad \text{og} \quad \frac{1}{1-\dfrac{\varsigma-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varsigma-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

Og vi flytter dernæst de led, som ikke afhænger af $\varsigma$ udenfor integraltegnet.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\varsigma-z_0}\right)^n\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varsigma-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(z-z_0)}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{-n}}$$

Eller ved at flytte lidt rundt på faktorerne:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{-n}}(z-z_0)^{-n-1}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n}$$

Hvis vi i det andet udtryk erstatter *n* med *–n* får vi:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Herefter kan de to summer sammenfattes i et udtryk:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

(3.8) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad \text{hvor} \qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}$$

Bemærk især, at: $$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}f(\varsigma)d\varsigma$$

Hvis $f(z)$ er regulær i det område som begrænses af den lukkede kurve *C*, så er $a_{-1}=0$ ifølge Cauchy's integralsætning, i modsat tilfælde kaldes $a_{-1}$ for residuiet for $f(z)$.

Vi minder om: At hvis vi har en cirkelskive $F=\{z \mid |z-z_0|\le r\}$, der som rand har $C=\{z \mid |z-z_0|=r\}$ med positivt omløb, og udregner vi integralet langs randen for heltalligt *n*, så får man:

(3.3) $$\int_{C}(z-z_0)^n dz=\begin{cases}0 & for \quad n\neq -1\\ 2\pi i & for \quad n=-1\end{cases}$$

Anvender vi nemlig parameterfremstillingen: $z-z_0=re^{it} \quad 0\le t\le 2\pi$, får vi da:

(3.4) $$\int_{C}(z-z_0)^n dz=\int_0^{2\pi}r^n e^{\text{int}} rie^{it}dt=r^{n+1}i\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt=\begin{cases}0 & for \quad n\neq -1\\ 2\pi i & for \quad n=-1\end{cases}$$

Hvis vi udregner kontur integralet af $f(z)$ langs en lukket kurve *C*, som har $z_0$ som indre punkt, finder vi:

(3.5) $$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{2\pi i}2\pi i = a_{-1}$$

Denne sætning viser sig at have overordentlig stor betydning ved udregning af *kontur* integraler.

Hvis *Laurent* rækken ikke indeholder negative eksponenter *n* af $(z-z_0)^n$, er $f(z)$ regulær i hele området indenfor den ydre cirkel.

Hvis der er et endeligt antal *m* af negative eksponenter, er der én af 2 muligheder.

Hvis $f(z)$ er regulær ligegyldig, hvor lille radius vi vælger på den inderste cirkel, siger vi at $f(z)$ har en isoleret pol i $z_0$ af *m*'te orden, og $(z-z_0)^m f(z)$ vil være regulær i omegnen af $z_0$.

For eksempel har $f(z) = 1/\sin^2 z$ poler af orden 2 for $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$

Hvis $f(z)$ har uendelig mange negative eksponenter af $(z-z_0)$, siger vi at $f(z)$ har en essentiel pol (singularitet) i $z_0$.

For eksempel har $e^{\frac{1}{z}}$ en essentiel singularitet i 0.

Hvis $f(z)$ har en isoleret pol i $z_0$, gælder der som beskrevet ovenfor, at

(3.6) Residuet i $z_0$ er: $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\varsigma)d\varsigma$$

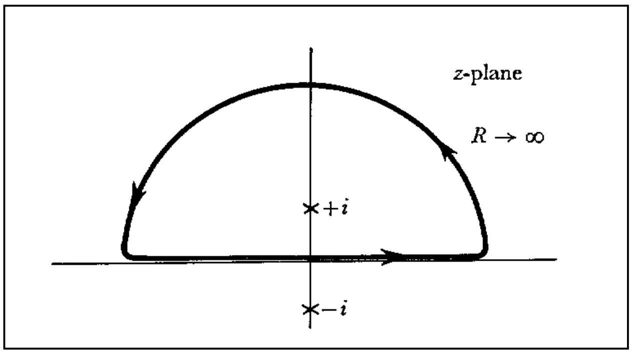
Hvis $f(z)$ har flere isolerede poler inden for den lukkede kurve *C*, gælder residuesætningen.

(3.7) $$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum residuer$$

Denne sætning kan vise sig overordentlig nyttig til udregning af bestemte integraler af en reel funktion.

## 4. Kontur integraler

Vi skal illustrere metoden ved nogle eksempler:




**Eksempel**

(4.1) $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Dette integral kan imidlertid også løses ved traditionelle metoder ved at anvende substitutionen $x = \tan t \Rightarrow dx = 1 + \tan^2 t$

(4.2) $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

Idet integranden $\frac{1}{1+x^2}$ er en lige funktion har vi: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Vi ser dernæst på den lukkede kurve vist ovenfor og på konturintegralet $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$.

Bidraget fra halvcirklen vil gå imod 0, når radius $R$ går imod uendelig.
Vælger vi nemlig parameterfremstillingen: $z = R\,e^{i\theta}$ , $0 \le \theta \le \pi$ , og udregner vi integralet over halvcirklen får vi:

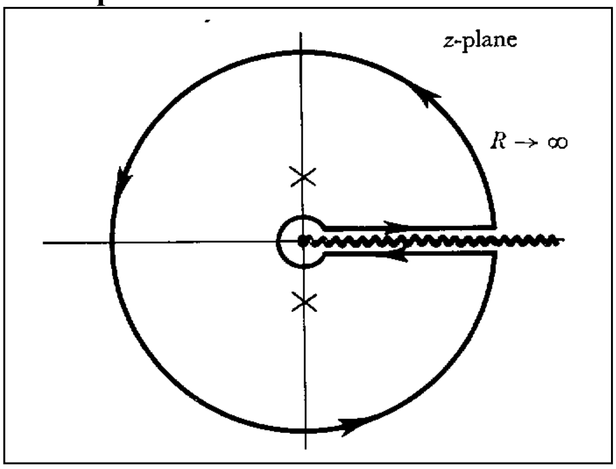
$$\int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{1+R^2e^{i2\theta}} \approx \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{i2\theta}} = \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{-i\theta}d\theta \to 0 \quad for \quad R \to \infty$$

Vi udregner da kontur integralet ved hjælp af residue sætningen: $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum residuer$

$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ har polen $z = i$, som er den eneste pol som ligger indenfor konturen og residuet er $\frac{1}{2i}$. Ifølge residue sætningen er integralet er derfor lig med $\frac{1}{2}2\pi i\frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}$.

(4.3) $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

**Eksempel**:




Vi vil forsøge at udregne integralet:

(4.4) $$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$$

Der findes, (i modsætning til det første eksempel), ingen sædvanlige metoder til at udregne dette integral.
Vi vil i stedet anvende residuesætningen på konturen som vist på figuren til venstre.
Integralet langs den ydre cirkel, kan tilnærmes med $\frac{\sqrt{R}\,2\pi R}{1+R^2} \to 0 \quad for \quad R \to \infty$

Summen af to integraler langs den reelle akse er: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} - \int_\infty^0 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

Funktionen: $$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} = \frac{\sqrt{z}}{(z-i)(z+i)}$$

har polerne $z = i$ og $z = -i$ inden for konturen med de to residuer: $\frac{\sqrt{i}}{2i}$ $og$ $\frac{\sqrt{-i}}{-2i}$

$\sqrt{z}$ er for komplekse $z$ ikke et entydigt tal, men står for én af de to løsninger til den binome ligning:

$$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad e^{2ix} = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \tfrac{5\pi}{4},$$

så

$$z = \cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4} \quad \vee \quad z = \cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad z = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Tilsvarende fås for ligningen:

$$z^2 = -i \quad \Leftrightarrow \quad e^{2ix} = e^{-\frac{\pi}{2}i} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \tfrac{3\pi}{4}$$

$$z = \cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}) \quad \vee \quad z = \cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad z = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

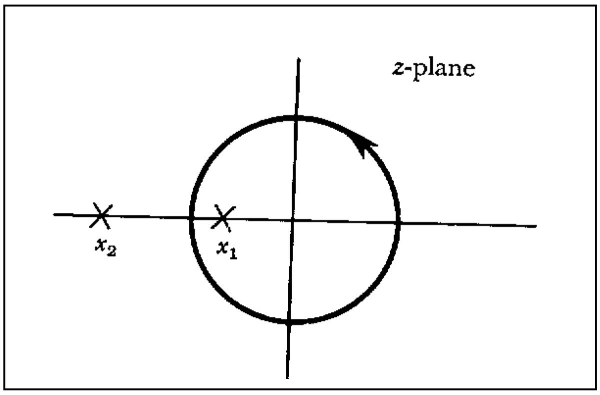
Vi skal da anvende løsningen i 1. kvadrant for det første residue $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2i}$ og løsningen i 2. kvadrant for det andet residue $\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2i}$ summen af de to residuer bliver så:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2i}$$

$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum residues \; = 2\pi i \dfrac{\sqrt{2}}{2i} = \pi\sqrt{2}$ , og vi finder derfor:

$$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} = \pi\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**Eksempel**




Vi vil forsøge at udregne integralet:

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}, \quad \text{hvor } a > b > 0$$

Integranden er en lige funktion, så

$$2I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$$

Vi integrerer da langs med enhedscirklen, som vist på figuren ovenfor, idet vi anvender parameterfremstillingen:

$$z = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = ie^{i\theta}d\theta\,. \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \tfrac{1}{2}(z + \tfrac{1}{z})$$

Vi får da:

$$2I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \oint_C \frac{dz/(iz)}{a + b/2(z + 1/z)} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

Integranden har polerne, som er nulpunkter for nævneren:

$$bz^2 + 2az + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\,,$$

Rødderne er reelle, idet *a* > *b*. Den største rod ligger indenfor konturen, mens den mindste ligger uden for.
Hvis $\alpha$ *og* $\beta$ er rødder i polynomiet $ax^2 + bx + c$, så gælder der:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Residuet er derfor: $\frac{2}{i}\frac{1}{b(z_2 - z_1)} = \frac{2}{i}\frac{1}{2b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} = \frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$$2I = 2\pi i \sum residuer = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

## 4.1 Kontur integraler, hvor polen ligger på konturen

Integralet $\int_2^4 \frac{dx}{x - 3}$ er ikke defineret matematisk, for at undgå at integrere over polen for $x = 3$, kan vi betragte integralerne:

$$\int_2^{3-\delta} \frac{dx}{x - 3} = \ln|-\delta| - \ln|-2| = \ln\delta - \ln 2 \qquad \text{og} \qquad \int_{3+\delta}^{4} \frac{dx}{x - 3} = \ln 4 - \ln\delta$$

Summen af de to integraler er imidlertid ln4 - ln2 uafhængig af $\delta$, og derfor er:

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\int_2^{3-\delta} \frac{dx}{x - 3} + \int_{3+\delta}^{4} \frac{dx}{x - 3}\right) = \ln 4 - \ln 2$$

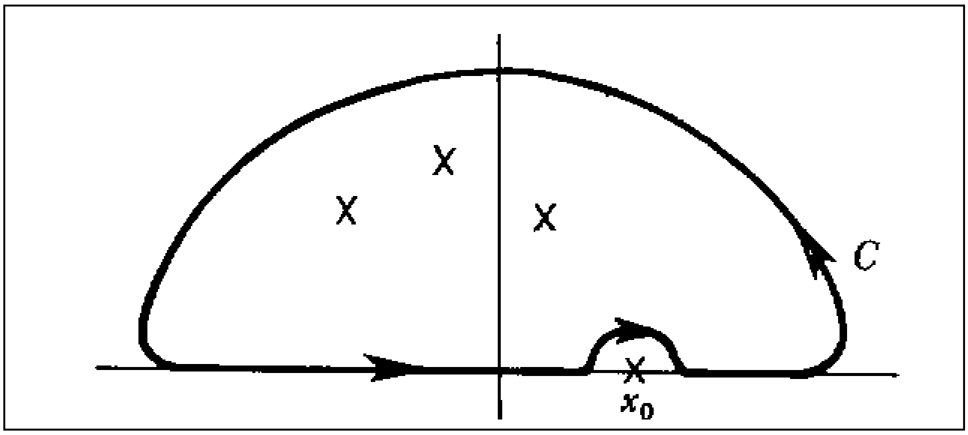
Denne værdi kaldes for Cauchy's principal værdi af integralet, og skrives med et foranstillet *P*.

Dette er der sådant set intet forunderlig ved idet summen af de numerisk meget store tal $\ln\delta$, går ud mod hinanden. Dette vil derfor også være tilfældet i grænsen $\delta \to 0$

Mere generelt, så definerer man Cauchy's principalværdi på følgende måde, hvor $f(x)$ er defineret og integrabel i intervallet $[a, b]$.

$$P\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0}dx = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{x_0-\delta}\frac{f(x)}{x-x_0}dx + \int_{x_0+\delta}^{b}\frac{f(x)}{x-x_0}dx\right)$$

Integrationsvejen for Cauchy's principal værdi, kan være del af et kontur integral, for hvilket enderne $x_0 \pm \delta$ er forbundet med en lille halvcirkel med radius $\delta$. Se figuren nedenfor.




Hvis vi antager at integralet af den halve storcirkel går imod nul når $R$ går imod uendelig, vil konturintegralet være lig med $2\pi i\sum residuer$.
Vi kan imidlertid direkte udregne integralet af den lille halvcirklen, som har centrum i $x_0$ og radius $\delta$.
Hvis vi lader $\delta$ gå imod nul, er $f(z)$ i omegnen af $x_0$ givet ved $f(z)\to \dfrac{a_{-1}}{z-x_0}$,
hvor $a_{-1}$ er residuet ved polen $z = x_0$.

Vi anvender parameterfremstillingen: $z-x_0 = re^{i\theta}$ , $dz = rie^{i\theta}d\theta$

$$\int_{havlcirkel} f(z)dz \;\to\; \int_{halvcirkel}\frac{a_{-1}}{z-x_0}dz \;=\; -a_{-1}\int_0^{\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = -ia_{-1}\int_0^{\pi}d\theta = -\pi i a_{-1}$$

Vi finder derfor:

$$\oint_C f(z)dz = P\int f(z)dz - \pi i(residue\ i\ x_0) = 2\pi i\sum(residues\ i\ konturen\ C)$$

Som giver resultatet:

$$P\int f(z)dz = 2\pi i\sum(residuer\ i\ konturen\ C + \tfrac{1}{2}residue\ i\ x_0)$$

**Eksempel**

Vi skal forsøge at udregne integralet: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

Integranden har en pol for $x = 0$, men den fører ikke til uendelige værdier, idet vi ved at

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad for \quad x \to 0 .$$

Vi skal se på kontur integralet

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

med en kontur svarende til figuren ovenfor, men hvor polen er placeret i 0.

Når $z = x + iy$ vil faktoren $e^{-y}$ sikre at integralet langs den store halvcirkel går imod 0 for $R \to \infty$. V anvender da sætningen:

$$\int f(z)dz = 2\pi i \sum (residuer\ i\ konturen\ C + \tfrac{1}{2} residue\ i\ x_0) .$$

$\frac{e^{iz}}{z}$ har ingen poler indenfor konturen, så vi får kun et bidrag fra polen z = 0.

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i e^0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$$

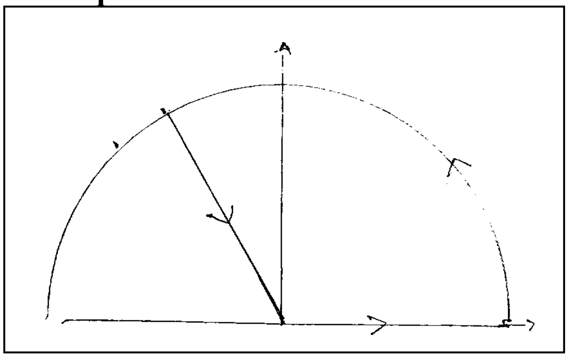
Tager vi realdelen og imaginærdelen på begge sider får vi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Det første integral er trivielt lig med 0, da cos er en lige funktion, og da (sin $x$)/$x$ er en lige funktion følger det at:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \pi$$

**Eksempel**



Nogen gange er man henvist til nogle simple trick for at udregne et integral. Det gælder for eksempel.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$$

Vi vælger en kontur $J$, som vist på figuren bestående af den positive reelle akse, et cirkel segment fra 0 til $2\pi / 3$ og linien $z = e^{i2\pi/3} t, \quad 0 < t < R$.

Hvis vi lader $R \to \infty$, vi integralet langs cirklen gå imod 0. Integralet langs den reelle akse er da det søgte integral og vi udregner derfor integralet langs med linien $z = e^{i2\pi/3} t$:

$$\int_{linie} \frac{dz}{1 + z^3} = -\int_0^{\infty} \frac{e^{i2\pi/3}}{1 + e^{2\pi i} t^3} dt = -e^{i2\pi/3} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^3} dt = -e^{i2\pi/3} I$$

Vi finder derfor

$$J = \int_J \frac{dz}{1+z^3} = \int_{x-akse} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{cirkel} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{linie} \frac{dz}{1+z^3} = I + 0 - e^{i2\pi/3} I$$

$$J = (1 - e^{i2\pi/3})I = (1 + \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})I = \tfrac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$$

På den anden side har $\frac{dz}{1+z^3}$ en enkelt isoleret pol indenfor konturen *J*, som er en løsning til ligningen:

$$z^3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i3x} = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \pi \;\vee\; 3x = \pi + 2\pi \;\vee\; 3x = \pi + 4\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \tfrac{\pi}{3} \;\vee\; x = \pi \;\vee\; x = \tfrac{5\pi}{3}\; (x = -\tfrac{\pi}{3})$$

Kun polen $x = \frac{\pi}{3}$ ligger indenfor konturen *J*, så residuet bliver:

$$\frac{1}{(z_2 - e^{i\pi})(z_3 - e^{i5\pi/3})} = \frac{1}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})} = \frac{2}{(3\sqrt{3} + 3i)}$$

idet $$(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}) = (e^{i\pi/3} + 1)2i\sin\tfrac{\pi}{3} = i(\tfrac{3}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3} = i\tfrac{1}{2}(3\sqrt{3} + 3i)$$

Kontur integralet er derfor:

$$J = 2\pi i \frac{2}{(3\sqrt{3} + 3i)}$$

og samtidig har vi ifølge ovenstående :

$$J = (1 - e^{i2\pi/3})I = \tfrac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})\, I$$

Vi har altså:

$$I = \frac{2J}{(3 - i\sqrt{3})} = \frac{8\pi i}{(3 - i\sqrt{3})i(3\sqrt{3} + 3i)} = \frac{8\pi}{9\sqrt{3} + 9i - 9i + 3\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{12\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Og vi finder endeligt:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$