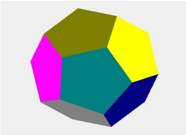
Newtons og Lagranges interpolationsformler

This is an article from my homepage : www.olewitthansen.dk



Ole Witt-Hansen 2021

Indhold

1. Newtons og Lagranges interpolationsformler

For n+1 indbyrdes forskellige punkter $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ findes der ét og kun et polynomium af grad n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \text{, hvor } y_k = p(x_k), \quad k = 0...n.$$

Der kan kun være ét polynomium med denne egenskab, for hvis der fandtes et andet polynomium $q(x)$ med de samme egenskaber, så ville $p(x) - q(x)$ have n+1 rødder $x_0, x_1, ..., x_n$, i strid med, at et polynomium af grad n har højst n rødder. Koefficienterne $a_0, a_1, ...a_n$ kan i princippet bestemmes ved at løse de n+1 ligninger:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0$$
$$....$$
$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n$$

Dette har imidlertid kun teoretisk interesse.

Heldigvis har nogle af de største matematikere fundet metoder til at bestemme et n'te grads polynomium, som går gennem n +1 punkter, uden at beregne polynomiets koefficienter direkte. Disse polynomier kaldes for interpolationsformler.

1.1 Newtons interpolationsformel

I Newtons interpolationsformel skrives polynomiet på formen:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

hvor koefficienterne findes successivt:

$$c_0 = y_0 \ , \ c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}, \ c_2 = \frac{y_2 - (c_0 + c_1(x_2 - x_0))}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} ...$$
$$c_n = \frac{y_n - (c_0 + c_1(x_n - x_0) + ... + c_{n-1}(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-2}))}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_{n-1})}$$

… og sådan fremdeles.

Vi har kun inkluderet Newtons interpolationsformel for fuldstædighedens skyld, idet den er langt mindre praktisk anvendelig end:

1.2 Lagranges interpolations formel

Lagranges interpolations formel kan formelt skrives:

$$p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + ... + y_n p_n(x),$$

hvor

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)} \qquad p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} \ \dots$$

$$p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

På denne måde opnår vi nemlig:

$$p_0(x_0) = 1,\ \ p_0(x_1) = p_0(x_2) = \dots = p_0(x_n) = 0$$

$$p_1(x_1) = 1,\ \ p_1(x_0) = p_1(x_2) = \dots = p_1(x_n) = 0$$

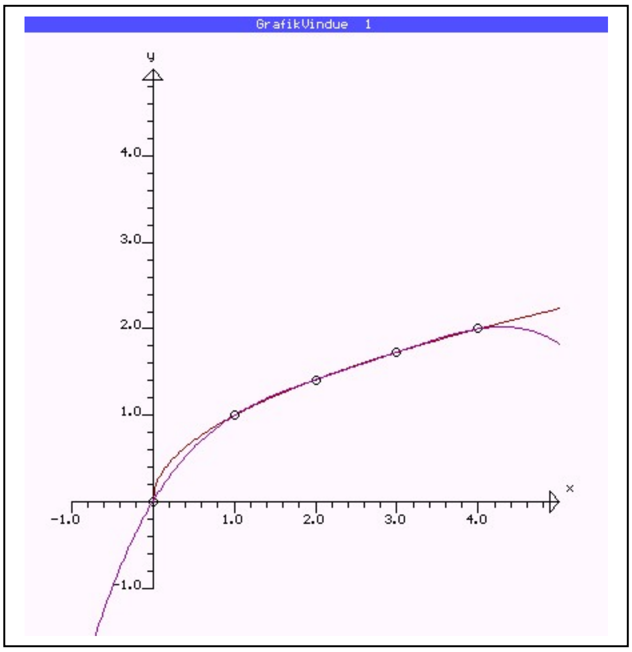
$$p_n(x_n) = 1,\ \ p_n(x_0) = p_n(x_2) = \dots = p_n(x_{n-1}) = 0$$

Derfor vil der for polynomiet $p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \dots + y_n p_n(x)$ gælde:

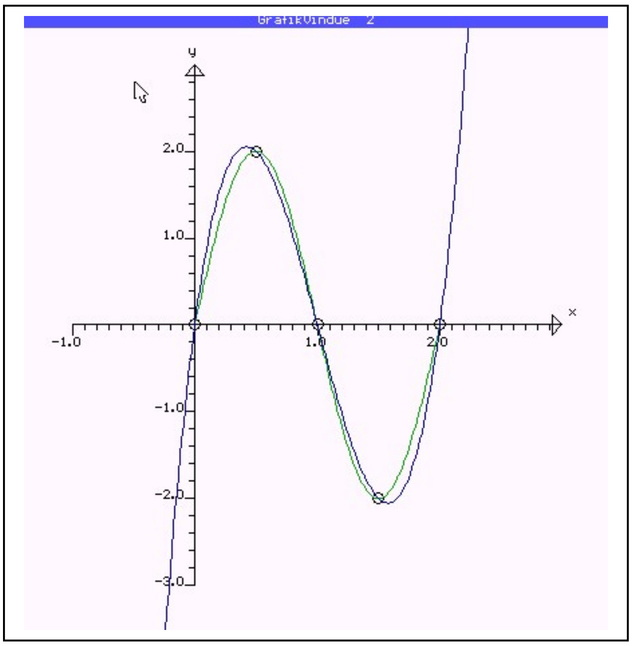
$$p(x_0) = y_0 p_0(x_0) = y_0$$
$$p(x_1) = y_1 p_1(x_1) = y_1$$
$$\dots$$
$$p(x_n) = y_n p_n(x_n) = y_n$$

Hermed er Lagranges interpolationsformel bevist.

Grafen for $f(x) = \sqrt{x}$, sammen med et 4. ordens Lagrange polynomium.



Grafen for $f(x) = 2\sin(\pi x)$, sammen med et 4. ordens Lagrange polynomium



Skønt interpolationen kan være acceptabel inden for området af de 5 punkter, så er en ekstrapolation uden for dette område ikke meningsfuld. Anvendelse af et polynomium af højere grad, vil ikke forbedre dette, tværtimod. Faktisk er 3. grads polynomier dem som giver den bedste approximation.

Reference: Hand written Lectures notes from professor Børge Jessen. University of Copenhagen 1965