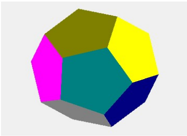
Komplekse tal



Ole Witt-Hansen 1981 (2018)

Indhold

1. De komplekse tals legeme.......... 1
1.1 de Moivres formel. Kompleks eksponentialfunktion.......... 3
2. Ligninger med komplekse tal. Den binome ligning.......... 6
2.1 Løsning til andengradsligningen med reelle koefficienter.......... 6
3. Algebraens fundamentalsætning.......... 7

1. De komplekse tals legeme.

Vi skal begynde med at vise at talparrene (a_1,a_2) hvor a_1 og a_2 er vilkårlige reelle tal udgør et tal legeme, som kaldes de komplekse tal. Først skal talparrene dog forsynes med nogle valgte kompositioner for "addition" og "multiplikation"

Vi skriver $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2)$, etc. Nogle vælger at skrive tal parret (a, b) , men det gør det mere vanskeligt at identificere tallet med et enkelt bogstav.

Ved en *komposition* $*$ indenfor en mængde M, forstår man en afbildning f: $M \times M \to M$.
I stedet for $f(a,b) = c$, skriver man : $a * b = c$. F.eks. $a + b = c$ eller $ab = c$
Vi betegner kompositionerne "addition" og "multiplikation for talpar med de sædvanlige plus og gangetegn, selv om det ikke er det samme som addition og multiplikation af reelle tal.
Endvidere nævner vi for alle *a,b,c* som tilhører *M*:

(1.1)
Kommutative lov: $a * b = b * a$
Associative lov: $(a * b) * c = a * (b * c)$

For at en mængde C med kompositionerne "plus" (+) og "gange" ($\cdot$) kan siges at udgøre et legeme, skal begge kompositioner i mængden opfylde betingelserne for at være en gruppe, derudover skal gælde den distributive lov, hvor *a, b, c* er vilkårlige elementer i C.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vi indfører først en komposition for addition, som blot er addition af hver af komponenterne.

(1.2) $$a + b = (a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Da regnereglerne for de reelle tal gælder for hver af komponenterne, er denne komposition både kommutativ og associativ.
Det neutrale element er indlysende $(0,0)$, og det modsatte element til $a = (a_1,a_2)$ er $(-a_1,-a_2)$, som vi også skriver som $-a = -(a_1,a_2)$.
Differensen $a - b = (a_1,a_2) - (b_1,b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

Mens udtrykkene for addition er de samme som for reelle tal, er kompositionen for *multiplikation* anderledes.

(1.3) $$a \cdot b = (a_1,a_2) \cdot (b_1,b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Denne komposition er indlysende kommunikativ, men før vi viser den associative og distributive lov, skal vi indføre den imaginære enhed *i*. Vi udregner derfor:

(1.4) $$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \text{ eller } (0,1)^2 = (-1,0)$$

Det komplekse tal $(0,1)$ betegnes *i*, og det fremgår at $i^2 = -1$.

Idet ethvert komplekst tal (a_1, a_2) kan skrives som $(1{,}0)a_1 + (0{,}1)a_2 = a_1 + ia_2$, vil vi fra nu af droppe betegnelserne $z = (x,y)$ og i stedet skrive:

(1.5) $$z = x + iy$$

For et vilkårligt komplekst tal.
Skal man udregne produktet af to komplekse tal gøres det på samme måde som ved regning med reelle tal, idet man blot adskiller den imaginære del fra den reelle del og husker at $i^2 = -1$.

(1.6) $$\begin{aligned} &a \cdot b = (a_1 + ia_2)\cdot(b_1 + ib_2) = a_1b_1 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2a_2b_2 = \\ &a_1b_1 - a_2b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Som genkendes som den komposition vi allerede har indført for komplekse tal (naturligvis).
Det er ligetil, men lidt langstrakt, at vise at multiplikationen er associativ.
Vi vil dog vise, at multiplikationen af komplekse tal er distributiv med hensyn til addition:

$$c(a+b) = ca + cb \quad \Leftrightarrow \quad (c_1 + ic_2)(a_1 + b_1 + i(a_2 + b_2)) = (c_1 + ic_2)(a_1 + ia_2) + (c_1 + ic_2)(b_1 + ib_2)$$

Udregner vi det sidste udtryk, ses at vi får:

$$\begin{aligned} &c_1a_1 + ic_1a_2 + ic_2a_1 - c_2a_2 + c_1b_1 + ic_1b_2 + ic_2b_1 - c_2b_2 = \\ &c_1(a_1 + b_1) + ic_2(a_1 + b_1) + ic_1(a_2 + b_2) + ic_2i(a_2 + b_2) = \\ &(c_1 + ic_2)(a_1 + b_1 + i(a_2 + b_2)) \end{aligned}$$

Det *konjugerede tal* til et komplekst tal $a = a_1 + ia_2$ skrives $\overline{a} = a_1 - ia_2$. Man ser at:

(1.7) $$a\overline{a} = |a|^2 = (a_1 + ia_2)(a_1 - ia_2) = a_1^{\,2} + a_2^{\,2}$$

Hvor $|a| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$ betegnes som den numeriske værdi eller modulus af et komplekst tal.
Der gælder nogle små sætninger om de konjugerede tal.

(1.8) $$\begin{aligned} &\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b} \\ &\overline{a - b} = \overline{a} - \overline{b} \\ &\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \end{aligned}$$

Vi nøjes med at vise den sidste:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_1 - ia_2)(b_1 - ib_2) = a_1b_1 - a_2b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$\overline{ab} = \overline{(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)} = \overline{a_1b_1 - a_2b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1b_1 - a_2b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Det inverse tal til et komplekst tal *a*, hvor *a* er forskellig fra 0 er:

(1.9)
$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{a\bar{a}} = \frac{a_1 - ia_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Der er en tradition for, at man ikke skriver et komplekst tal i nævnerne af en brøk, men altid angiver det på formen: $a + ib$. Et komplekst tal i nævneren af en brøk, kan altid reduceres ved at gange med det komplekst konjugerede tal til nævneren.

Ligningen: $ax = b$, hvor a og b er komplekse tal, har løsningen:

(1.10)
$$x = \frac{b}{a} = \frac{\bar{a}b}{\bar{a}a} = \frac{(a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2)}{a_1^2 + a_2^2}$$

1.1 de Moivres formel. Kompleks eksponentialfunktion.

Det komplekse tal $a = a_1 + ia_2 = (a_1, a_2)$ kan afsættes som et punkt i planen.

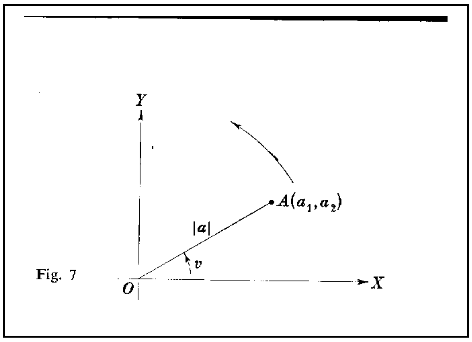


Fig. 7

(1.11)
$$r = |OA| = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Hvor $|OA|$ betegner afstanden fra O til punktet A. Herefter kan $a = (a_1, a_2)$ skrives som:

(1.12)
$$a = r_a(\cos v, \sin v) = r_a(\cos v + i \sin v)$$

Hvor v er en retningsvinkel for OA. Hvis b er et andet komplekst tal:

$$b = r_b(\cos u, \sin u) = r_b(\cos u + i \sin u)$$

Så kan vi udregne produktet:

$$a \cdot b = r_a r_b(\cos v + i \sin v)(\cos u + i \sin u) = r_a r_b(\cos u \cos v - \sin u \sin v + i(\cos u \sin v + \sin u \cos v))$$

Vi minder om additionsformlerne:

$\cos(u\text{-}v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$

$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

$\sin(u\text{-}v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$

$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$

Heraf kan vi se at:

(1.13)
$$a \cdot b = r_a r_b(\cos(u+v) + i \sin(u+v)$$

Specielt hvis $a = b$ så er $a^2 = r^2(\cos 2v + i \sin 2v)$

Og ved at fortsætte argumentet, finder man de Moivres berømte formel:

(1.14)
$$a^n = r^n(\cos nv + i \sin nv)$$

Af de Moivres formel følger Eulers formel, som er en af de vigtigste formler i matematikken. Vi definerer:

(1.15) $$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Og dermed

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

For at denne definition skal være meningsfuld skal e^{z} opfylde eksponentialligningens funktionalligning:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

(1.16) $$e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}$$

Men dette har vi allerede vist ved hjælp af additionsformlerne ovenfor, blot med andre betegnelser:

$$a = r_a(\cos v + i\sin v) \text{ og } b = r_b(\cos u + i\sin u) \quad \Rightarrow$$
$$a \cdot b = r_a r_b(\cos(u+v) + i\sin(u+v))$$

Eller

$$e^{z_1} = e^{x_1+iy_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \quad og \quad e^{z_2} = e^{x_2+iy_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \quad \Rightarrow$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$
$$e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

Af (1.15) følger umiddelbart:

(1.17) $$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad og \quad \sin x = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

De komplekse trigonometriske funktioner defineres derfor:

(1.18) $$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad og \quad \sin z = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Definitionen af de hyperbolske funktioner er derimod uændret

(1.19) $$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \quad og \quad \sinh z = \tfrac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

Hvoraf vi ser, at:

(1.20) $$\cosh z = \cos iz \quad og \quad i\sinh z = \sin iz$$

Alle regneregler og differentialkvotienter for de reelle trigonometriske funktioner kan direkte overføres til de komplekse trigonometriske funktioner.

1.17 Eksempel. Harmonisk svingning.

I fysikken findes der mange lineære differentialligninger, der fører til en harmonisk svingning, dvs. en løsning af formen:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Her kan det være endda meget fordelagtigt i stedet at anvende den komplekse eksponentialfunktion, idet differentiering reduceres til multiplikation med en (kompleks) konstant.
Det er klart, at det kun er realdelen, der er løsningen, men så længe ligningerne er lineære er det ikke noget problem.

Ser vi på den klassiske differentialligning for en masse *m* i en fjeder med fjederkonstant *k*:

(1.18) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Forsøger vi os med løsningen:

$$x = Ae^{i\omega t}$$

Får vi: $$-\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\frac{k}{m}Ae^{i\omega t} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

For denne ligning er fordelene til at overse, da den let kan løses ved at gætte på $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Anderledes forholder det sig, hvis man forsøger at løse en differentialligning, der svarer til en dæmpet harmonisk svingning. En sådan ligning kan reduceres til

(1.19) $$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \quad \text{hvor} \quad b > 0 \text{ og } c > 0$$

Denne ligning er ret omstændelig at løse med traditionelle metoder.
Vi forsøger da med $x = e^{z \cdot t}$, hvor *z* er et komplekst tal. Det følger så.

$$\frac{dx}{dt} = z \cdot e^{z \cdot t} \quad og \quad \frac{d^2x}{dt^2} = z^2 \cdot e^{z \cdot t}$$

Indsættes dette i (5.4) og bortforkorter man $e^{z \cdot t}$ får man 2.gradsligningen:

$$z^2 + b \cdot z + c = 0$$

Diskriminanten: $d = b^2 - 4 \cdot c$. Hvis $d > 0$ har 2. gradsligningen de to reelle løsninger.

(1.20) $$z = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2} \vee z = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

Hvis $d < 0$ har andengradsligningen derimod ingen reelle løsninger, men til gengæld de to komplekse løsninger:

(1.21) $$z = -\frac{b}{2} + i\frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2} \vee z = -\frac{b}{2} - i\frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2} ,$$

Idet vi sætter $\omega = \frac{\sqrt{4 \cdot c - b^2}}{2}$ får vi fra den første løsning:

$$x = Ae^{zt} = Ae^{-\frac{b}{2}t + i\omega t} = Ae^{-\frac{b}{2}t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

Den fysiske løsning er da realdelen, hvor vi tilføjer en fase φ, så vi har to integrationskonstanter *A* og φ.

.(1.22) $$x = Ae^{-\frac{b}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Af indlysende grunde kaldes (1.22) for løsningen til en dæmpet harmonisk svingning.

2. Ligninger med komplekse tal. Den binome ligning.

Vi skal se på løsningen af ligningen, hvor $z = |z|(\cos x + i\sin x)$

(2.1) $$z^n = a \quad \Leftrightarrow \quad |z|^n(\cos nx + i\sin nx) = |a|(\cos v + i\sin v)$$

Retningsvinklerne for a er: $v + p2\pi, \quad p = 0,1,2...$

Dette giver umiddelbart:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \text{ og } nx = v, v+2\pi, v+4\pi, v+(n-1)2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \text{ og } x = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}, \quad p = 0,1,2...,(n-1)$$

Så den fuldstændige løsning er

(2.2) $$|z| = \sqrt[n]{|a|}(\cos(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n})), \quad p = 0,1,2...,(n-1)$$

Ligningen: $z^n = a$ har derfor (for a forskellig fra 0) altid n løsninger.

2.1 Løsning til andengradsligningen med reelle koefficienter.

Inden for de reelle tals legeme har andengradsligningen

(2.3) $$ax^2 + bx + c = 0$$

Ingen, en eller to løsninger, afhængig af om $d < 0$, $d = 0$ eller $d > 0$, hvor $d = b^2 - 4ac$ *er* diskriminanten.

Vi vil nu vise, at indenfor de komplekse tal, har ligningen:

(2.4) $$az^2 + bz + c = 0$$

altid mindst én og højst to løsninger.

For a forskellig fra nul, foretager vi de samme omskrivninger, som for den reelle andengradsligning:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{d}{4a^2}$$

Hvis $d \geq 0$ har ligningen én eller to løsninger, som kan bestemmes af løsningsformlen:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}\ ,\ hvor \quad d = b^2 - 4ac$$

I tilfældet $d < 0$, findes der som bekendt to tal, hvis kvadrat er -1, nemlig i og $-i$, så løsningerne bliver:

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{d}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)=\frac{\pm i\sqrt{-d}}{2a} \quad \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-d}}{2a}\ ,\ hvor \quad d = b^2 - 4ac$$

Hvis a, b, c er komplekse, er det ikke muligt at opskrive en general løsningsformel. Omskrivningen:

$$az^2+bz+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{d}{4a^2}$$

er fortsat gyldig, men den sidste ligning, må i de enkelte tilfælde løses som en binom ligning.

3. Algebraens fundamentalsætning

Vi betragter et polynomium i det komplekse tals legeme.

(3.1) $$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z+a_0$$

hvor $n = 1, 2...$ og koefficienterne $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ er vilkårlige komplekse tal, som ikke alle er lig med 0. Algebraens fundmentalsætning udsiger da:

(3.2)	Et polynomium af grad n har netop n rødder

Vi vil føre et "bevis" for denne sætning, ved først at vise, at et polynomium af grad n altid har mindst en rod. Vi minder om, at der for et komplekst tal:

$$a = (a_1, a_2) = a_1 + \mathrm{i}a_2$$

gælder

$$|\mathrm{a}| = \sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\ ,$$

som er lig med afstanden $|OA|$, hvor $A = (a_1, a_2)$.

Tilsvarende for to komplekse tal

$$a = (a_1, a_2) \text{ og } b = (b_1, b_2),$$

svarende til punkterne A og B, er

$$|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

lig med afstanden $|AB|$.

Hvis $a_0 = 0$ har polynomiet roden $z = 0$, så vi skal antage at $a_0 \neq 0$.

Hvis $z = x + iy$, så fremstiller ligningen $|z| = r$ en cirkel med centrum O i den komplekse plan, idet: $|z| = r \iff x^2 + y^2 = r^2$

Når z gennemløber en cirkel C_r med radius r, så vil $P(z)$ gennemløbe en kurve C_P.
Vi viser så, at $P(z)$ har en rod, ved at vise, at der må findes en værdi af r, hvor C_P går gennem O.
Idet vi lader M betegne tallet:

$$M = \max\{1, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$$

Har vi for $|z| > 1$:

$$|P(z) - z^n| = |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0| \leq$$
$$|a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \leq$$
$$M(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + |z| + 1) \leq Mn|z|^{n-1}$$

Der gælder altså:

(3.3) $$|z| > 1 \Rightarrow |P(z) - z^n| \leq Mn|z|^{n-1}$$

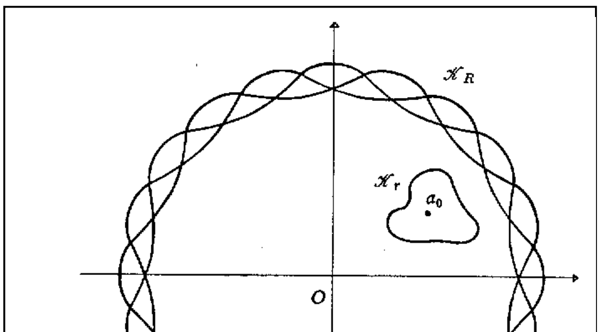
På lignende vis finder man:

(3.4) $$|z| < 1 \Rightarrow |P(z) - a_0| \leq Mn|z|$$

Vi lader nu z gennemløbe en cirkel med centrum O og radius R, hvor $R > 2Mn$.
Vi indsætter da $|z| = R$ i (3.3), den første af ulighederne ovenfor og får:

(3.5) $$|z| > 1 \Rightarrow |P(z) - z^n| \leq Mn|z|^{n-1} < \tfrac{1}{2}RR^{n-1} = \tfrac{1}{2}R^n$$

Når z gennemløber en cirkel med radius R en gang, gennemløber z^n en cirkel med radius R^n n gange. Dette følger af, at hvis $z = R\,e^{iv}$ så er $z^n = R^n e^{inv}$.



På figuren er illustreret et eksempel på forløbet af $P(z)$, når z gennemløber cirklen med radius R^n.

Uligheden (3,3) viser, at afstanden mellem z^n og $P(z)$ er mindre end $\frac{1}{2}R^n$, når $|z|>1$. Derfor vil kurven, som $P(z)$ gennemløber omslutte O.

Hvis $|z|< 1 \;\wedge\; |z|<\dfrac{|a_0|}{2Mn}$ følger det af uligheden (3.4) at: $|P(z)-a_0|\le Mn|z|$,
Således at:

(3.6) $\qquad |P(z)-a_0|\le \frac{1}{2}a_0$

For små radier $|z - a_0| = r$, vil $P(z)$ derfor ligge på en kurve, som ikke omslutter O.

Derfor må den kurve, som $P(z)$ beskriver mellem de to grænser, svarende ulighederne til (3.3) og (3.4) have passeret 0, og derfor må der være en værdi derimellem, hvor $P(z) =0$.

Når det er vist, at ethvert polynomium af grad $n > 0$ har mindst en rod, følger algebraens fundamentalsætning af de sætninger vi kender fra reelle polynomier, som uden indskrænkning kan overføres til komplekse tal.

Hvis α er rod i et polynomium $P(z) \Leftrightarrow P(\alpha)=0$, så er $P(z)$ deleligt med $(z – \alpha)$.

(3.7) $$P(z)=(z-\alpha)Q(z)$$

Hvis $P(z)$ har grad $n > 0$, så har $Q(z)$ grad n-1.

Da vi har vist at ethvert polynomium med grad $n > 0$ har mindst en rod α, kan vi skrive:

(3.8) $$P(z)=(z-\alpha_1)Q_{n-1}(z)$$

Hvor graden af $Q_{n-1}(z)$ er $n – 1$. Hvis graden af $Q_{n-1}(z)$ er større end 0, har $Q_{n-1}(z)$ mindst en rod, således at:

$$Q_{n-1}(z)=(z-\alpha_2)Q_{n-2}(z)$$

og dermed

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_{n-2}(z)$$

Denne proces kan fortsættes indtil graden af Q-polynomiet er lig med nul (en konstant)

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)Q_0, \quad \text{hvor } Q_0 \text{ er en konstant.}$$

Af ovenstående ses at et polynomium af grad n har rødderne $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ og ingen andre, hvilket er indholdet af algebraens fundamentalsætning.

Som det også gælder for de reelle tal, så findes der ingen generelle metoder til at bestemme rødderne i komplekse polynomier af grad større end 4.