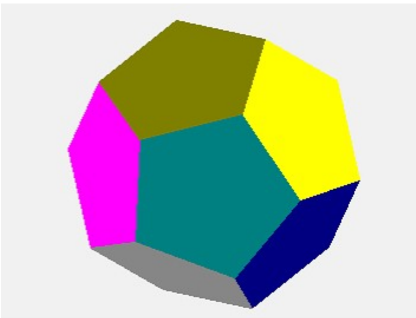
Elementær Matematik

Integralregning



Ole Witt-Hansen 2008

Indhold

Kap 1 Stamfunktion og integral

1. Stamfunktion

Definition:
F siges at være en stamfunktion til f, hvis og kun hvis differentialkvotienten af $F(x)$ er lig med $f(x)$.

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{eller blot} \qquad F' = f$$

Bestemmelse af stamfunktion til en funktion, kaldes også for *integration*. Det kan betragtes som den omvendte regningsart til differentiation, så en nødvendig betingelse for at kunne integrere er, at man behersker differentialregningen.
Integration er imidlertid ikke en "håndværk" , der kan læres på samme måde som differentiation. Integration er mere at betragte som kvalificeret gætteri, suppleret med en række tricks, som vi senere skal se nærmere på.

Ligningen $F'(x) = f(x)$, kaldes for *integrationsprøven.*

Eksempel
Vi ønsker at bestemme en stamfunktion til $f(x) = x^2$. Vi skal altså finde en funktion, der differentieret giver "noget med" x^2. Det gør x^3 , idet $(x^3)' = 3x^2$. Det er derfor let at indse, at en stamfunktion til $f(x) = x^2$ er $F(x) = 1/3\ x^3$, hvilket også let vises ved integrationsprøven.
Bemærk i øvrigt, at også funktionerne $F(x) = 1/3\ x^3 + k$, hvor k er en vilkårlig reel konstant er en stamfunktion til x^2. Dette vises ved integrationsprøven, idet $F'(x) = (1/3\ x^3 + k)' = x^2 + 0 = x^2$.

Vi vil dernæst finde en stamfunktion til $f(x) = \sin x$. Vi skal altså tænke på en funktion som differentieret "giver noget med $\sin x$". Vi ved at $(\cos x)' = -\sin x$, så den søgte stamfunktion må være $F(x) = -\cos x$, hvilket let vises ved integrationsprøven. Alle funktionerne $F(x) = -\cos x + k$, $k \in$ R, ses i øvrigt at være stamfunktioner til $\sin x$.

Disse to eksempler kan give udseende af, at stamfunktionsbestemmelse er relativt nemt, blot man kan differentiere. Men det er langt fra tilfældet. Det vil man kunne indse, hvis man forsøger at finde en stamfunktion til $\tan x$.
Ligegyldigt hvor længe man gætter, vil man på nuværende tidspunkt næppe finde svaret.
Svaret er iøvrigt $F(x) = -\ln(\cos x)$ (Hvis $\cos x > 0$).
Integrationsprøven giver, idet vi anvender reglerne for differentiation af sammensat funktion:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Vi skal senere se på nogle metoder (integration ved substitution), som gør det muligt at "gætte" sådanne stamfunktioner.

Til slut vil vi forsøge at finde en stamfunktion til $f(x) = \exp(-½x^2)$, hvor $\exp(x) = e^x$. Ligegyldig hvor længe man forsøger, vil man aldrig finde den. Det er *ikke,* fordi f ikke har en stamfunktion, men fordi stamfunktionen ikke kan udtrykkes ved allerede kendte funktionstegn. Stamfunktionen til $\exp(-½x^2)$ (på nær en faktor) betegnes med $\Phi(x)$, en funktion fra sandsynlighedsregningen, som findes tabuleret, under navnet fordelingsfunktionen for normalfordelingen.

Kan man se på en funktion, om den har en stamfunktion, der kan udtrykkes ved allerede kendte funktionstegn?
Svaret er desværre nej.
Findes der funktioner, som ikke har en stamfunktion? Det gør der, men man kan vise at alle kontinuerte funktioner har en stamfunktion.
Kontinuitet er en tilstrækkelig, men ikke en nødvendig betingelse for at en funktion har en stamfunktion.

Vi vil nu vise følgende lille, men vigtige sætning:

- Samtlige stamfunktioner til en funktion f kan skrives som $F + k\ ,\ k \in R$, hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f. Konstanten k betegnes som en *arbitrær konstant*.

Sætningen indebærer, at har man blot fundet én stamfunktion, så har man fundet samtlige stamfunktioner. Sætningen skal vises begge veje. Vi begynder med at vise, at $F + k$ er en stamfunktion til f, hvis F er det. Integrationsprøven giver

$$(F + k)' = F' + 0 = f$$

Dernæst viser vi, at hvis G er en stamfunktion til f, så kan G skrives som $G = F + k$, hvor F er en vilkårlig stamfunktion ti f. Vi ser da på funktionen $G - F$, som vi differentierer

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$G - F$ er altså en funktion, hvis differentialkvotient er *identisk* 0, men så ved vi fra differentialregningen, at så er G-F en konstant. Altså $G - F = k \quad \Leftrightarrow \quad G = F + k$, hvorefter sætningen er vist.

2. Integration

I matematikken skrives stamfunktioner ved brug af det såkaldte integraltegn $\int$, som er et stiliseret S. En stamfunktion F til f, skrives således

$$F(x) = \int f(x)dx$$

f betegnes som *integranden*, og bestemmelsen en stamfunktion kaldes at *integrere*.
Med denne skrivemåde opnår man et symbol for stamfunktionen, udtrykt ved funktionen selv.

Et godt spørgsmål er altid, hvorfor man tilføjer et dx efter integranden. Dette kræver en længere forklaring, så på dette tidspunkt, vil vi nøjes med at konstatere, at der står et dx efter $f(x)$, og en dag ”vil man blive glad for det” (fordi det giver en simpel formulering af nogle regneregler for integration).

Eksempel
Med indførelsen af integraltegnet, kan vi skrive vores tidligere eksempler på en mere direkte måde og uden et bogstav symbol F.

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + k$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + k$$
$$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + k$$

Ved brug af integraltegnet betyder integrationsprøven, at man ved differentiation af højresiden (*stamfunktionen*) *skal få integranden* (*det som står under integraltegnet*).

2.1 Historisk note

Vi minder om, at man i differentialregningen har to betegnelser for differentialkvotienten til en funktion *f*, nemlig:

$$f'(x) \;\; og \;\; \frac{dy}{dx} \qquad \text{idet} \qquad y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

I differentialregningen indførte vi egentlig blot dy/dx, som en anden betegnelse for $f'(x)$.
Differentialet af y er givet ved definitionen: $dy = f'(x)dx$, Af dette følger, at for $y = x$ er $dy = dx = 1 \cdot dx = dx$. (så $dx = dx$ ifølge definitionen). Men dette er ikke hele sandheden.
Årsagen til brugen af differentialer ligger i at man ved differentiation ser på grænseværdien af forholdet mellem funktionstilvæksten $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ og tilvæksten Δx (som vi for kortheds skyld tidligere har kaldt h), når Δx går imod nul. Altså grænseværdien for $\Delta y/\Delta x$, når Δx går imod 0.
I grænsen er såvel Δx som Δy lig med nul, og Leibnitz, (som er en af differentialregningens fædre), indførte betegnelserne dx og dy for *grænseværdierne* af Δx og Δy. dx og dy blev betegnet som *infinitesimale* (dvs. uendelig små) tilvækster, svarende til de endelige tilvækster Δx og Δy.
Leibnitz selv (og i ca. 200 år efter) regnede ubekymret med infinitesimale størrelser, men moderne matematikere har ikke været så begejstrede for at regne med dem af flere grunde. F.eks. indebærer det, at man ganger og dividerer med størrelser, der faktisk er nul.
Regnereglerne for infinitesimale størrelser er dog også lidt anderledes, end regning med reelle tal.
Hvis der *f*.eks. står $dx + (dx)^2$ så er det lig med dx, fordi $(dx)^2$ er 0 af højere orden! Hvilket betyder, at det går imod nul, ved division med dx efterfulgt af $dx \to 0$
Regning med infinitesimale størrelser kommer ud på det samme, som at regne med endelige tilvækster og så til slut dividere med Δx og så tage grænseværdien.
Som sagt, så ynder moderne matematikere ikke regning med infinitesimale størrelser, men alligevel har man bevaret symbolerne dx og dy. Derfor er indførelsen af symbolerne dy og dx altid lidt ulden i alle elementære fremstillinger af infinitesimalregningen. Nogle steder vil der *f*.eks. stå: Hvis vi ubekymret regner med symbolerne dx og dy, som om de var tal….så viser det sig at man uhyre let kan bevise en række sætninger. Der følger dog næsten altid et betydeligt mere tungt, men matematisk korrekt bevis.
I fysikken og andre naturvidenskaber regner man derimod fuldstændig ubekymret med infinitesimale størrelser, fordi det er langt hurtigere, mere elegant og overskueligt end det tunge, men stringente grænseværdibegreb.

3. Simple regneregler for integration

Der gælder - ikke særligt overraskende - følgende to regneregler for integration. De kan formuleres som følger:

- Man kan sætte en konstant faktor udenfor integraltegnet
- Man kan integrere en sum/differens af funktioner ledvis.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Beviset for disse sætninger er en konsekvens af, at der gælder de *samme* regler for differentiation.. Vi viser sætningerne ved integrationsprøven, idet vi differentierer højresiderne, og viser at det er lig med integranden på venstresiden. Højresiderne differentieres efter regnereglerne for differentiation.

$$(k\int f(x)dx)' = kf(x)$$

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x)$$

Vi ser at integrationsprøven passer, så sætningen er bevist.
Bemærk, at vi i beviset har anvendt sætningen om at man kan differentiere ledvis.

Eksempel
Først noterer vi os dog to meget vigtige stamfunktioner.

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \text{ for } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$

Med de to regneregler kan vi så integrere et polynomium:

$$\int (2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 2)dx = \tfrac{2}{5}x^5 - x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + k$$

4. Vanskeligere regneregler for integration

De to regneregler fra forrige afsnit var baseret på de tilsvarende regneregler for differentiation, nemlig at man kan sætte en konstant udenfor ved differentiation, og at man kan differentiere ledvis.
Der findes to mere komplicerede differentiationsregler, nemlig reglen for differentiation af et produkt, og reglen for sammensat differentiation. Disse to regneregler giver anledning til tilsvarende regler for integration, som betegnes henholdsvis *partiel* (*eller delvis*) *integration* og *integration ved substitution*.

Det er lettest at anvende formlerne, hvis man anvender *differentialer*. Vi minder derfor om definitionen på *differentialet* af en funktion. (Lad være med at spekulere for meget over, hvad dx er! Det er differentialet af x).

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

Man kan regne med differentialer på nøjagtig samme måde, som man regner med differentialkvotienter. Den eneste forskel er, at man tilføjer et dx. Men det er netop det man gør, hver gang man opskriver et integral, og det er præcis grunden til at anvende differentialer i integralregningen.
Betragt ligningen:

$$\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x)$$

Det sidste led er korrekt, fordi $f(x)$ er en stamfunktion til $f'(x)$. Det man indser således, at *differential*- og *integraltegn* ophæver hinanden. (og ikke *differentialkvotient* og *integraltegn*).
Dette vil vi gøre brug i det følgende.

4.1 Delvis integration

Vi minder om regnereglen for differentiation af et produkt af to funktioner.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Flytter vi lidt om på leddenes rækkefølge og tager integralet på begge sider, finder man

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Den sidste ligning er regnereglen for *delvis integration*. Hvis vi har en funktion, der kan skrives som venstresiden af ligningen, og hvor vi ikke umiddelbart kan finde en stamfunktion, så kan vi omskrive det til højresiden. Vi har ikke fundet en stamfunktion, men i nogle tilfælde er integralet på højresiden lettere at udregne. Vi er kommet et skridt på vejen til at finde stamfunktionen, heraf navnet delvis integration.
Regnereglen er dog lettest at huske, hvis man opskriver den med differentialer.

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

Eller blot som huskeregel

$$\int fdg = fg - \int gdf \qquad \text{hvor man husker at } df = f(x)dx$$

Regnereglen for delvis integration, kan skrives på mange forskellige måder. I formelsamlingen for gymnasiet står den f.eks. som:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

Hvor F er en stamfunktion til f. Formlen er den samme, som man kan se ved substitutionerne:
$g'(x) \to f(x)$, $g(x) \to F(x)$ og $f(x) \to g(x)$.
Fordelen ved den første version af formlen er, at den er symmetrisk i f og g, og at der ikke optræder en stamfunktion, som ikke er givet ved et integraltegn, og den derfor er nem at huske.
I den første version, opstår der heller ikke så let tvivl om, hvilken af de to funktioner i integranden, der er f og hvilken der er g.
Fordelen ved den anden version er, at der står to funktioner og ikke en funktion og en differentialkvotient og en funktion. Hvilken af de to formler, man vælger er en temperamentssag.

Eksempler
Vi vil udregne integralerne nedenfor med anvendelse af delvis integration. Vi anvender differentialer.

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + k$$

Vi har sat $f(x) = x$ *og* $g'(x) = \cos x$ og i øvrigt regnet med differentialer.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + k$$

I dette tilfælde har vi sat $f(x) = \ln x$ og $g'(x) = 1$.

Det er kun en bestemt type integraler, der eger sig til at blive løst ved delvis integration. Typisk en funktion, der er et produkt af en rationel funktion, f.eks. et polynomium og en transcendent funktion (sin, cos, tan, ln og exp).

4.2 Integration ved substitution

Denne regneregel, anses med rette for den vanskeligste at anvende. Vi minder om regnereglen for differentiation af sammensat funktion, som vi opskriver den på følgende måde, (hvor F betegner en stamfunktion til f) .

$$(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Hvis vi læser ligningen fra *højre* mod *venstre* og tager integralet på begge sider, får man følgende ligning:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))'dx = F(g(x)) + k$$

Hvilket er regnereglen. Har man et integral, der kan skrives som venstresiden, og kender man en stamfunktion F til f, så kan det løses.

Integration ved substitution er ikke altid særlig umiddelbart, fordi det kan være svært at afgøre, hvad man skal sætte lig med f, og hvad man skal sætte lig med g.
På samme måde, som da man introducerede sammensat differentiation, - altså differentiation af en funktion $f(g(x))$ - for overskuelighedens skyld satte $g(x) = u$ (eller et andet bogstav), så vil man ret konsekvent lave en tilsvarende *substitution* (erstatning), idet man i integralregningen ofte benytter bogstavet t i stedet for u.
Stillet over for et integral, forsøger man sig altså med en *substitution* $t = g(x)$. Formlen for integration ved substitution bliver så, idet substitutionen er anført på linien under integraltegnet.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + k = F(g(x)) + k$$
$$t = g(x) \Rightarrow dt = g'(x)dx$$

Bemærk brugen af differentialer. Det er f.eks. vigtigt, at man ikke glemmer dx.

Eksempler
Vi demonstrerer teknikken ved at udregne følgende integraler ved substitution:

$$\int (2x+4)^7\,dx = \int t^7\,\tfrac{1}{2}dt = ½\int t^7\,dt = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{8}t^8 + k = \tfrac{1}{16}t^8 + k = \tfrac{1}{16}(2x+4)^8 + k$$
$$t = 2x+4 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = ½dt$$

$$\int \sqrt{\cos x}\,\sin x dx = -\int \sqrt{t}dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + k = -\tfrac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + k = -\tfrac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x} + k$$
$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

Da man lærte regnereglen for sammensat differentiation, indførte man en hjælpevariabel y, idet man f.eks. skrev formlen:

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) \quad ;\text{hvor} \quad y = f(x)$$
$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(y)y' = g'(f(x))f'(x)$$

Begrundelsen for at indføre hjælpevariablen y er, at det er mere overskueligt, end at betragte funktionsudtrykket $y = f(x)$, som en *variabel*. Efterhånden holder de fleste dog op med at anvende hjælpevariablen, fordi det er overflødigt og øger omfanget af regningerne.
Noget helt tilsvarende kan man gøre ved integration ved substitution, men i dette tilfælde er det ikke altid så gennemskueligt.
For at undlade hjælpevariablen, er det imidlertid nødvendigt, at opskrive integrationsformlen ved hjælp af differentialer.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + k$$

Man har undladt at sætte $t = g(x)$, men betragter $g(x)$ som en integrationsvariabel.

Nedenfor er teknikken illustreret med et par eksempler. Man opfordres til selv at kontrollere regningerne ved passende substitutioner.

Eksempler

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d\cos x = -\tfrac{1}{4}\cos^4 x + k$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d\ln x = \tfrac{1}{2}\ln^2 x + k$$

Vi har i de to eksempler implicit lavet substitutionerne $t = \cos x$ og $t = \ln x$.

Det er ikke altid, at en substitution forløber så uproblematisk som i eksemplerne ovenfor. For det første skal man vælge "den rigtige" substitution. Man kan ikke opstille regler for at vælge den rigtige substitution, men kun henvise til at integralet skal kunne skrives på en form, som svarer til venstresiden i substitutionsformlen. Vi ser nu på et eksempel, der kan løses ved substitution, men som kræver lidt større regninger.

Eksempel

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{(\frac{1}{2}(t-1))^2}{\sqrt{t}} \tfrac{1}{2} dt = \tfrac{1}{8}\int \frac{t^2+1-2t}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \tfrac{1}{8}\int (t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}})dt =$$
$$(t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx) \Leftrightarrow (x = \tfrac{1}{2}(t-1) \wedge dx = \tfrac{1}{2}dt)$$
$$\tfrac{1}{8}(\tfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} - \tfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}) + k = \tfrac{1}{8}(\tfrac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{4}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}) + k$$

Pointen er den, at man kan blive nødt til at løse ligningen $t = g(x)$ med hensyn til x for at gennemføre substitutionen i hele integranden. Det var ikke nødvendigt i de første eksempler.

4.3 Avancerede metoder

Det er ikke alle integraler, der kan udregnes ved substitution. Nogle kan imidlertid udregnes ved at anvende substitutionsformlen "den modsatte vej". Det vil sige, i *stedet* for at sætte $t = g(x)$ (et funktionsudtryk i x), så kan man sætte $x = g(t)$ et funktionsudtryk i t. Gør man dette, må man dog i almindelighed stille det krav til g, at den *er en monoton differentiabel funktion*. Vi skal ikke komme ind på den nøjere begrundelse for dette, blot understrege, at *g skal* kunne erstatte en almindelig uafhængig variabel x. Formlen bliver, idet F stadig betegner en stamfunktion til f:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + k = F(x) + k$$

$$x = g(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = g'(t)dt, \quad \text{hvor g(t) er en differentiabel monoton funktion}$$

Eksempler

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{d\tan t}{1+\tan^2 t} = \int \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt = \int dt = t + k = \tan^{-1} x + k$$

$$x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt \;\; ; \;\; t = \tan^{-1} x \quad \text{(Den omvendte funktion til tan i } \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[\text{)}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + k \;\; ; x = \sin t$$

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \; ; \; t = \sin^{-1} x \quad \text{(Den omvendte funktion til sin i } \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[\text{)}$$

Kap 2. Areal og Stamfunktion

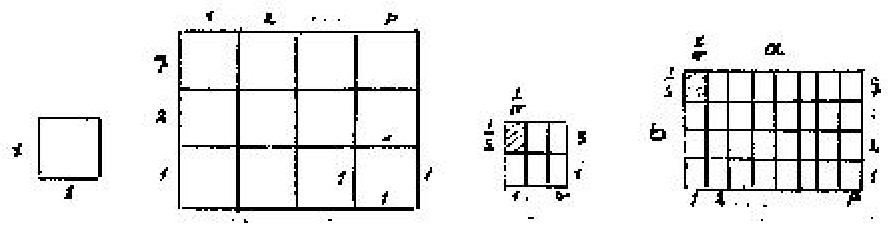
1. Areal af polygoner

Vi skal i det følgende beskæftige os med relationen mellem areal og stamfunktion, og vise nogle grundlæggende sammenhænge mellem disse to begreber.
Først vil vi kort rekapitulere, hvorledes arealbegrebet bliver indført i matematikken.
Areal af plane geometriske områder er et specialtilfælde af et generelt *mål begreb*, som indføres i matematikken, og den generelle teori er temmelig omfattende. Vi vil dog kun beskæftige os med areal af plane områder.
Arealet af en *punktmængde* P i planen, som kan være en trekant, cirkelskive eller linie betegnes $A(P)$. Vi gør tre simple forudsætninger:

- Et område begrænset af en *kontinuert* lukket kurve har et areal
- Hvis man deler et område op i to ved at trække en kurve, som forbinder to punkter af periferien, er arealet af området lig med summen af arealerne af de to områder, det er opdelt i.
- Hvis man har to punktmængder i planen P og Q, og $P \subseteq Q$ så er $A(P) \leq A(Q)$

Arealbegrebet bygger på eksistensen af et *enhedskvadrat*, altså et kvadrat med sidelængden 1.
Dette kvadrat siges at have arealet 1.
Har man nu et rektangel, som har de *heltallige* sidelængder $a = p$ og $b = q$, kan dette deles op i p enheder på den ene side og q enheder på den anden side, hvilket i alt giver en opdeling i $p \cdot q$ enhedskvadrater, så arealet A er ifølge den anden grundforudsætning lig med $A = p \cdot q \cdot 1 = p \cdot q$.
Det er den sædvanlige sætning om arealet af et rektangel som *længde* gange *bredde*. Se figur 1

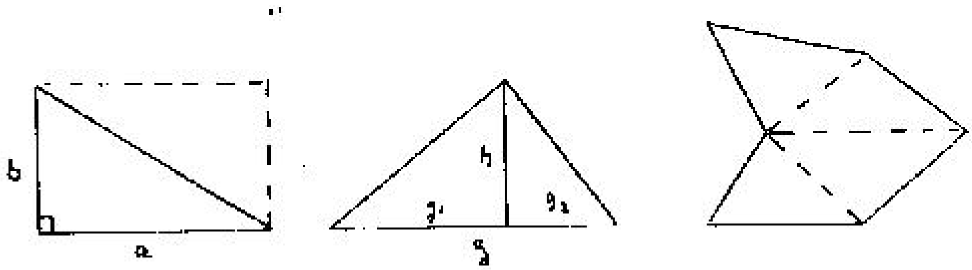
Figur 1



Hvis længden a og bredden b af rektanglet ikke er hele tal, men rationale tal (brøker), f.eks. $a = \frac{p}{r}$ og $b = \frac{q}{s}$, kan man dele *enhedskvadratet* op i r stykker, hver af længden $\frac{1}{r}$ på den ene led, og s stykker, hver af længden $\frac{1}{s}$ på den anden led. Hermed er enhedskvadratet opdelt i $r \cdot s$ rektangler. Da de tilsammen har arealet 1, så må arealet af hvert rektangel være lig $\frac{1}{rs} = \frac{1}{r}\frac{1}{s}$.
Vi opdeler da vort rektangel med siderne $a = \frac{p}{r}$ og $b = \frac{q}{s}$ i p stykker af længden $\frac{1}{r}$ på den ene led og q stykker, hver af længden $\frac{1}{s}$ på den anden led. Rektanglet er nu opdelt i $p \cdot q$ små rektangler med

siderne $\frac{1}{r}$ og $\frac{1}{s}$. Arealet af hvert af de små rektangler er ifølge det foregående $\frac{1}{rs}$, og rektanglets areal er følgelig $A = pq\frac{1}{rs} = \frac{p}{r}\frac{q}{s} = ab$ (lig med produktet af siderne).
Vi har nu vist, at arealet af et vilkårligt rektangel med siderne a og b, hvor a og b er rationale, kan udregnes som $a{\cdot}b$.
Vi skal ikke fortabe os i at bevise, at formlen stadig gælder, når siderne er vilkårlige reelle tal. Beviset er lidt teknisk, resultatet ikke særlig overraskende, og det kræver mere talteori end vi er i besiddelse af. I stedet vil vi nu redegøre for, hvorledes man kan finde arealet af en vilkårlig polygon.

Figur 2



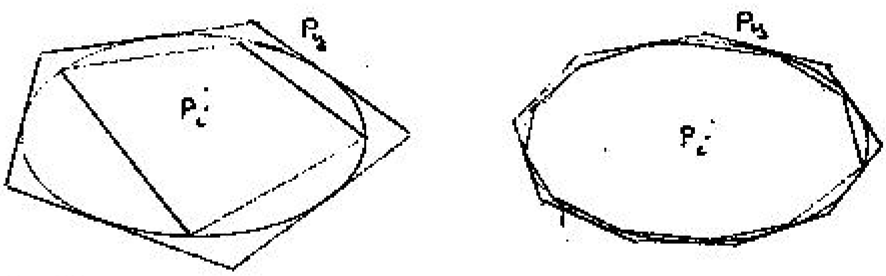
Vi begynder med en *retvinklet trekant*. En retvinklet trekant kan opfattes som et halvt rektangel, delt af en diagonal. Er a og b kateterne i trekanten er a og b sider i rektanglet, og arealet af trekanten det halve af rektanglets areal, så $A = ½a{\cdot}b$. (Det halve produkt af kateterne).
For en trekant, som ikke er retvinklet, kan den opdeles i to retvinklede trekanter, som vist på figuren. Arealet af trekanten er summen af de to retvinklede trekanters arealer.

$$A = ½h{\cdot}g_1 + ½h{\cdot}g_2 = ½h\cdot(g_1 + g_2) = ½h{\cdot}g.$$

Som er den velkendte formel for arealet af en trekant.
Da enhver polygon kan opdeles i trekanter, kan vi hermed finde arealet af alle polygoner.

2. Arealer af plane områder begrænset af en lukket kurve

Figur 3



For et plant område begrænset af en kurve, og som ikke er en polygon stiller sagen sig lidt anderledes. Det er ikke muligt at definere et areal (et mål) for et sådant område uden at gøre brug af et *grænseværdibegreb*.
Skulle man bestemme arealet af området - som vist på figuren ovenfor - vil de fleste nok efter nogen omtanke vælge den fremgangsmåde, som også danner grundlaget for den matematiske teori.
Man indskriver en polygon - *en indre polygon* P_i - i området. Da polygonen ligger helt i området er arealet af P_i - kaldet A_i - mindre end eller lig arealet A af området. Der må gælde: $A_i \le A$.

Tilsvarende kan man omskrive området med *en ydre polygon* P_y - med arealet A_y - og der vil gælde $A_y \geq A$. Der gælder således.

$$A_i \leq A \leq A_y$$

Hvis forskellen på polygonerne og området ikke er ret store, kan man forvente, at der ikke er ret stor forskel på A_i og A_y, og man vil kunne tilnærme områdets areal med $A \approx ½(A_i + A_y)$. Denne værdi vil i almindelighed afhænge af de valgte polygoner, og er i almindelighed ikke den eksakte værdi.

For et finde den eksakte værdi, kunne man lade siderne på de indre og ydre polygoner bliver mindre (gå imod 0), samtidig med at antallet af hjørner går imod uendelig. Den *fælles grænseværdi*, - hvis den eksisterer - vil man herefter definere som arealet af området.
Man har i matematikken en lang tradition for at lade ε (epsilon) betegne et lille positivt tal. Ved anvendelse af et ε, kan ovenstående mere løse beskrivelse til at definere arealet af en punktmængde formuleres matematisk på følgende måde:

Definition

- For en vilkårlig punktmængde i planen - altså ikke blot et område begrænset af en pæn glat lukket kurve - siger man, at det har et *areal* (er måleligt), hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en indre polygon P_i med areal A_i og en ydre polygon P_y med areal A_y, således at

$$A_y - A_i < \varepsilon$$

Forskellen mellem *arealet* af en ydre og en indre polygon skal kunne gøres mindre en et vilkårligt lille epsilon. Definitionen skulle ifølge de indledende betragtninger helst være indlysende rimelig.

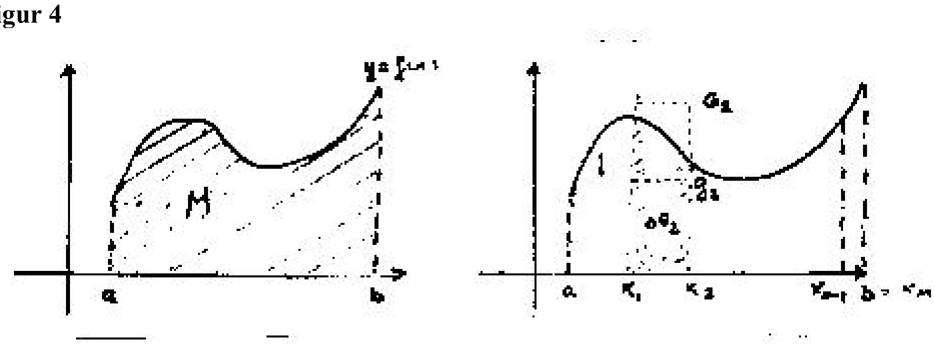
3. Areal under grafen for en funktion

Vi skal nu indskrænke os til at se på arealer under grafen for en ikke negativ funktion, givet ved ligningen $y = f(x)$. Helt præcist arealet af punktmængden:

$$M = \{(x,y) / a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Punktmængden M er begrænset af 3 rette linier, nemlig x-aksen og to lodrette linier $x = a$ og $x = b$, samt en kurve, som er givet ved grafen for en - vil vi antage - kontinuert funktion $y = f(x)$.
Vi vil da vise, hvorledes man kan udregne dette areal ved hjælp af en stamfunktion til f.

Figur 4



Vi begynder med at indføre nogle betegnelser.

Vi ønsker at finde arealet af funktionen i intervallet fra a til b ved at omskrive den med en ydre polygon og indskrive den i en indre polygon. Til dette foretager vi en *inddeling I*, af intervallet $[a, b]$ ved at vælge delepunkter $x_0, x_1, x_2,...x_{n-1}, x_n$ med $x_0 = a$ og $x_n = b$.
Antallet n, og placeringen af delepunkterne kan være vilkårlig. Intervallet $[a,b]$ bliver da opdelt i n delintervaller. Bredden af det i'te delinterval $[x_{i-1},x_i]$ vil vi betegne med $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Et *overtal G* for en funktion i et interval er et tal, hvorom, der gælder $f(x) \le G$ for alle x i intervallet. Tilsvarende defineres et *undertal g*, ved at $f(x) \ge g$ for alle x i intervallet.

Da den valgte funktion f er forudsat kontinuert, kan man vælge et overtal G_i og et undertal g_i for funktionen i hvert af intervallerne $[x_{i-1},x_i]$. Arealet ΔA_i under funktionen i dette interval, ses at ligge mellem arealerne af de to rektangler med arealerne $g_i \cdot h_i$ og $G_i \cdot h_i$.
Der gælder altså:

$$g_i \cdot h_i \le \Delta A_i \le G_i \cdot h_i$$

4. Undersummer oversummer og middelsummer

Ved en *undersum* s_I svarende til inddelingen I, forstår man *summen* af arealerne $g_i \cdot h_i$ af alle de små rektangler. Tilsvarende er en *oversum* S_I *summen* af arealerne $G_i \cdot h_i$ af alle de store rektangler.
En *undersum* s_I og en *oversum* S_I er således det samme som arealerne af en indre og en ydre polygon for punktmængden M (dvs. området under grafen).

$$s_I = \sum_{i=1}^{n} g_i h_i = g_1 h_1 + g_2 h_2 + ... + g_n h_n \quad og \quad S_I = \sum_{i=1}^{n} G_i h_i = G_1 h_1 + G_2 h_2 + ... + G_n h_n$$

Betegnes arealet under kurven (arealet af punktmængden M) for $A(M)$, må der på grund af uligheden $g_i \cdot h_i \le \Delta A_i \le G_i \cdot h_i$ for ethvert af delintervallerne, og $A(M) = \sum \Delta A_i$ gælde:

$$s_I \le A(M) \le S_I$$

Foruden *oversum* og *undersum*, vil vi også indføre en *middelsum* m_I. Middelsummen fås ved til en given inddeling at vælge et vilkårligt tal t_i i hvert af intervallerne $[x_{i-1},x_i]$, udregne $f(t_i)$, og så danne summen af $f(t_i) \cdot h_i$ for alle intervallerne. Middelsummen vil da være summen af arealerne for alle de små rektangler med bredde h_i og højde $f(t_i)$.

$$m_I = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) h_i = f(t_1) h_1 + f(t_2) h_2 + ... + f(t_n) h_n$$

På grund af uligheden $g_i \le f(t_i) \le G_i$ for hvert af intervallerne i inddelingen, vil der for enhver inddeling gælde

$$s_I \le m_I \le S_I$$

Da såvel arealet $A(M)$, som middelsummen m_I "er klemt inde mellem" en undersum og en oversum, (dvs. klemt mellem arealet af en indre polygon og en ydre polygon), er middelsummen en tilnærmelse til arealet under kurven. Helt præcist vil der gælde uligheden:

$$|A(M)-m_I|<S_I - s_I \quad \Rightarrow \quad A(M) \approx m_I.$$

Hvor god tilnærmelsen er, afhænger af inddelingen. Ofte anvender man imidlertid en middelsum til en tilnærmet udregning af et areal.
Det er herefter klart, at svarende til en *bestemt* inddeling, er enhver *undersum* mindre eller lig med enhver *middelsum*, som er mindre eller lig enhver *oversum*.
Der gælder imidlertid det mere vidtgående (som ikke umiddelbart følger af definitionen), at svarende til *forskellige inddelinger er enhver undersum mindre eller lig med enhver oversum*. Dette vil vi ikke bevise formelt, men henholde os til den geometriske fortolkning af undersum og oversum, som arealer af indre og ydre polygoner. Da arealet af en indre polygon aldrig kan blive større end arealet af en ydre polygon, er sætningen indlysende ud fra et geometrisk synspunkt.

Selv om sætningen forekommer indlysende er beviset lidt omstændeligt. Først viser man at, en oversum eller undersum svarende til en given inddeling, også vil være en oversum eller undersum for enhver videredeling af intervallet. (dvs ved tilføjelse af nye delepunkter, men med de samme overtal og undertal). For en oversum og undersum svarende til forskellige inddelinger, tilføjer man da blot delepunkter, så oversum og undersum bliver oversum og undersum for foreningsmængden af de to inddelinger. Da de to tal oversum og undersum nu er oversum og undersum for den samme inddeling er sætningen bevist.

Det bemærkes, at noget tilsvarende *ikke* er tilfældet for middelsummer, dvs. at uligheden $s_I \leq m_J \leq S_K$ ikke gælder uden indskrænkning, for *over*-, *under*- og *middelsummer* svarende til forskellige inddelinger (*K,I og J*).

5. Integrabilitet

Vi har tidligere defineret, at et område - en punktmængde M - har et areal, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en indre polygon med areal A_i og en ydre polygon med areal A_y, således at

$$A_i \leq A(M) \leq A_y \quad og \quad A_y - A_i < \varepsilon.$$

Med de betegnelser vi har anvendt kan denne sætning formuleres:
Området under kurven har et areal, hvis og kun hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en undersum s og en oversum S, således at,

$$S - s < \varepsilon$$

Når enhver undersum er mindre eller lig med enhver oversum, så findes der - ifølge et af aksiomerne for de reelle tal - mindst et tal T, som skiller (tal)mængden af undersummer fra (tal)mængden af oversummer. Vi indfører da følgende *Definition:*

- *En funktion f kaldes integrabel i et interval* $[a,b]$*, hvis der kun findes ét tal T, som skiller mængden af undersummer fra mængden af oversummer.*

Som det vil blive begrundet snart, kaldes T for det bestemte integral af $f(x)$ og skrives:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Symbolet "læses", som *det bestemte integral af* $f(x)$ *fra a til b*. *a* kaldes for *nedre grænse* og *b* kaldes for *øvre grænse*.
Det burde være indlysende - og vi vil ikke bevise det formelt - at definitionen på, at der findes et areal under kurven (forskellen mellem en oversum og undersum kan gøres vilkårlig lille) og at funktionen er integrabel (der findes kun et tal, som skiller mængden af undersummer fra mængden oversummer) udtrykker det samme. De to definitioner er ækvivalente.
For at bestemme arealet, vil vi derfor vende os til definitionen af integrabilitet, og vise, hvorledes arealet kan bestemmes ved hjælp af en stamfunktion til *f*.

Bemærkning 1: Vi har i det foregående - af hensyn til den geometriske fortolkning af integraler som arealer, indskrænket os til at betragte kontinuerte, ikke negative funktioner *f*. For teorien dvs. indførelsen af undersummer og oversummer, kan man imidlertid nemt droppe disse betingelser og blot antage at *f* er begrænset i intervallet fra *a* til *b*.
Som vi skal se på senere, har integralet en langt bredere anvendelse end til udregning af arealer.

Bemærkning 2**:** Det er relativt nemt at vise, at enhver monoton funktion er integrabel, og dermed en stor klasse af funktioner, idet alle funktioner, der kan opdeles i stykkevis monotone funktioner, vil være integrable. Det er lidt vanskeligere at vise, at enhver kontinuert funktion er integrabel. Vi vil ikke føre bevis for nogen af disse sætninger.

Vi er nu klar til at vise hovedsætningen om sammenhængen mellem integral og stamfunktion. Vi viser først sætningen, så denne sammenhæng træder klart frem, senere skal vi se at sætningen om areal og stamfunktion, kan vises simplere.
Sætning

- *Lad f være en kontinuert* (*så den har en stamfunktion*) *ikke negativ funktion i et interval* [*a,b*], *arealet af punktmængden:* $M = \{(x,y)/a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ *er da givet ved integralet af f, fra a til b og kan udregnes som F*(*b*) - *F*(*a*)*, hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f.*

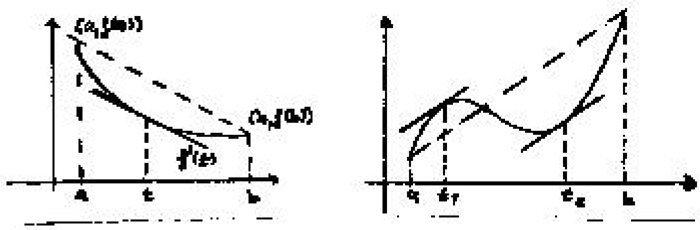
$$A(M) = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Den firkantede parentes efter integraltegnet er en traditionel forkortet skrivemåde for *F*(*b*) - *F*(*a*).

Vi skal anvende *middelværdisætningen*, som er kendt fra differentialregningen.
Lad f være differentiabel i det åbne interval fra a til b og kontinueret i det lukkede, så findes der mindst et tal t i det åbne interval, således at

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$

Geometrisk betyder middelværdisætningen, at grafen for *f* har mindst en tangent, som er parallel med den linie, der forbinder endepunkterne (*a*,*f*(*a*)) *og* (*b*,*f*(*b*)) for kurven. Se figuren nedenfor.



Bevis for hovedsætningen om Integral og Stamfunktion:

Vi beviser hovedsætningen ved at vise det ret overraskende,:

- For *enhver* inddeling af intervallet $[a,b]$, er tallet $F(b) - F(a)$ en *middelsum*.

Lad der derfor være givet en *vilkårlig* inddeling af intervallet $[a,b]$. $I: a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$.
Vi laver da følgende (teleskopiske) omskrivning:

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(a) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + ... + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(b) - F(x_{n-1})$$

Da F er en stamfunktion til f, er F *differentiabel* og dermed *kontinuert* og i hvert af intervallerne $[x_{i-1},x_i]$. Vi kan derfor anvende middelværdisætningen på F i hvert af disse intervaller.
I ethvert af intervallerne vil der ifølge *middelværdisætningen* findes et $t_i \in [x_i, x_{i-1}]$ således at:

$$F'(t_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Leftrightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Anvendt på alle intervallerne i summen:

$$F(b) - F(a) = F'(t_1)(x_1 - a) + F'(t_2)(x_2 - x_1) + F'(t_3)(x_3 - x_2) + ... + F'(t_{n-1})(x_{n-1} - x_n) + F'(t_n)(b - x_{n-1})$$

Idet vi husker, at $F'(t_i) = f(t_i)$ og $h_i = x_i - x_{i-1}$ finder vi således:

$$F(b) - F(a) = f(t_1)h_1 + f(t_2)h_2 + f(t_3)h_3 + ... + f(t_{n-1})h_{n-1} + f(t_n)h_n$$

Hvoraf ses, at tallet $F(b) - F(a)$ er en middelsum svarende til inddelingen I.

Vi ved, at for en given inddeling I gælder uligheden: $s_I \leq m_I \leq S_I$, altså *middelsummen* ligger mellem *undersummen* og *oversummen*.
Ovenfor er vist, at det *samme* tal $F(b) - F(a)$ er en middelsum for enhver inddeling. Men dette betyder at $F(b) - F(a)$ er et tal, der skiller mængden af undersummer fra mængden af oversummer. Hvis funktionen er integrabel, er der imidlertid kun ét tal med denne egenskab, nemlig integralet. Altså er $F(b) - F(a)$ lig med integralet af f i intervallet $[a,b]$, og dermed lig med arealet under kurven, hvilket var at bevise.

Det bemærkes, at tallet $F(b) - F(a)$ er uafhængig af, hvilken stamfunktion F er.
Vi har nemlig vist, at enhver stamfunktion F_1 til f, kan skrives som $F_1(x)=F(x)+k$, hvor k er en konstant. Når vi udregner differensen $F_1(b) - F_1(a)$, går konstanten k ud, så man får det samme tal som $F(b) - F(a)$.

Bemærkning: Vi har antaget at $f(x)$ var kontinuert for at sikre, at f har en stamfunktion, men det viser sig, at dette *ikke* er en nødvendig betingelse for at den er *integrabel*. (Dvs. at der kun findes et tal som skiller mængden af oversummer fra mængden af undersummer).

Det er relativt nemt at vise, at for en *monoton*, (men ikke nødvendigvis kontinuet funktion), kan man gøre forskellen mellem en oversum S (arealet af en ydre polygon) og en undersum s (arealet af en indre polygon), vilkårlig lille, blot man vælger inddelingen fin nok, dvs. gør alle delintervallerne tilstrækkelig små. Altså for et vilkårligt ε er $S - s < \varepsilon$.

Eksempler
Vi ønsker at finde arealet under grafen for funktionen $f(x) = \ln x$, fra e til e^2. Vi opskriver integralet.

$$\int_e^{e^2} \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_e^{e^2} = e^2\ln e^2 - e^2 - (e\ln e - e) = 2e^2 - e^2 - e + e = e^2$$

En stamfunktion til $\ln x$ er $x\ln x - x$, hvilket vi fandt under eksemplerne på delt integration.
Det man gør er, at man finder en stamfunktion $F(x)$ til integranden, og sætter den i en firkantet parentes.
Derefter udregner man F af øvre grænse minus F af nedre grænse.

Vi vil dernæst finde arealet af en halvcirkel. Først vil vi dog nøjes med at bestemme arealet af en halv enhedscirkel.
Arealet af en cirkelskive med radius r, kan da bestemmes som arealet af en enhedscirkel gange r^2.
Arealet af en halv enhedscirkel kan bestemmes, som arealet under grafen for $y = \sqrt{1-x^2}$ fra $x = -1$ til $x = 1$.
For at udregne integralet foretager vi en (omvendt) substitution $x = \sin t$ og skifter grænser.

$$A = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt \quad x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}\,;\, x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

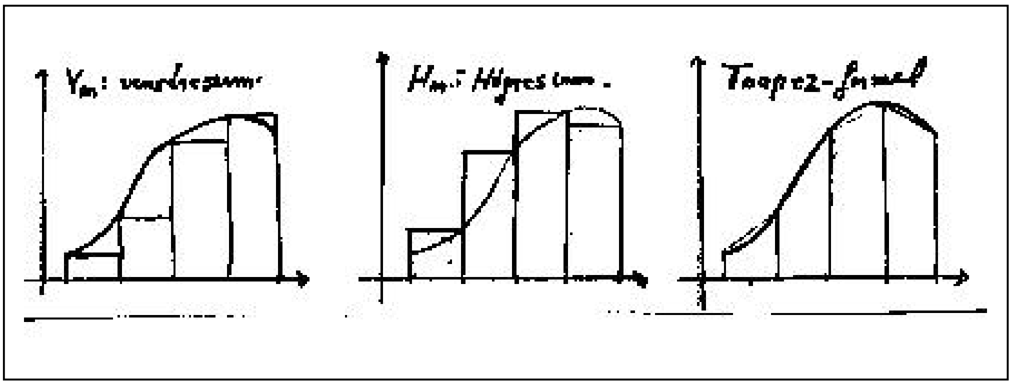
Heraf følger at arealet af enhedscirklen er π. Og dermed arealet af en cirkel med radius r: $A_{cirkel} = \pi r^2$, som er den velkendte formel.

6. Integralet som grænseværdi for en sum

Da en *middelsum* ligger mellem en *oversum* og en *undersum*, svarende til den samme inddeling vil middelsummen være en tilnærmelse til integralet, og dermed til arealet under kurven.
Vi kan således skrive:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)h_i \approx \int_a^b f(x)dx$$

Problemet med at anvende middelsummen er imidlertid, *hvorledes* man skal vælge tallene t_i, da dette kan gøres på uendelig mange forskelle måder.



En mulighed er konsekvent at vælge t_i som det venstre endepunkt i hvert af delintervallerne. Herved fremkommer en såkaldt *venstresum***.** En *venstresum* er i almindelighed ikke nogen god tilnærmelse til integralet, hvis inddelingen ikke er meget fin.
En anden mulighed er at vælge t_i som det højre endepunkt i hvert af delintervallerne. Herved fremkommer en såkaldt *højresum***.** En *højresum* er i almindelighed heller ikke nogen god tilnærmelse til integralet, hvis inddelingen ikke er meget fin.
En tredje mulighed er at vælge t_i som midtpunktet i hvert af delintervallerne. Herved fremkommer en såkaldt *midtsum*. En *midtsum* er i almindelighed en bedre tilnærmelse til integralet.

Ingen af de tre sum typer bruges dog i almindelighed til at udregne integraler, (som ikke kan udregnes analytisk, dvs. ved stamfunktionsbestemmelse). I stedet tilnærmer man funktionen i hvert af delintervallerne med en simpel funktion, hvor det er let at finde integralet.

Det mest simple er at tilnærme funktionen f med en konstant funktion. Herved får man en middelsum.
Den næste tilnærmelse er en lineær funktion, der forbinder endepunkterne af kurven i delintervallet. Hvis interval delepunkterne er x_{i-1} og x_i og $h_i = x_i - x_{i-1}$ er arealet under kurven i dette delinterval et lille trapez, med bredde h_i og siderne $f(x_{i-1})$ og $f(x_i)$ og arealet af den lille strimmel er derfor

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))h_i$$

Foretager man en inddeling af intervallet $[a,b]$ i n delintervaller, hvor alle delintervaller har samme bredde h, finder man formlen

$$A = \tfrac{1}{2}h(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)) \qquad \text{(Trapezformlen)}$$

Grunden til at der optræder et 2-tal foran alle led, undtagen endepunkterne er, at funktionsværdien optræder som endepunkt for to delintervaller undtagen for de to endepunkter.
Formlen kaldes for *trapezformlen*, og er i almindelighed en god tilnærmelse til integralet.
Bemærk i øvrigt, at trapezformlen er middeltallet af venstresum og højresum for inddelingen.

6.1 Simpsons formel.

For at opnå en bedre tilnærmelse til integralet kunne man tilnærme funktionen $y = f(x)$ med en parabel i stedet for en ret linie.
Gør man dette, finder man en meget nøjagtig og meget anvendt formel, som kaldes for Simpsons formel.
For en inddeling med kun tre punkter a, b og c og intervalbredde h er formlen

$$A = T = \tfrac{1}{3}h(f(a) + 4f(b) + f(c)) = \tfrac{1}{3}h(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h))$$

Er intervallet inddelt i n dele, hver med bredden h, og venstre endepunkt a, anvendes formlen ovenfor blot gentagne gange.

$$T = A = \tfrac{1}{3}h(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \ldots + 2f(a+(n-2)h) + 4f(a+(n-1)h) + f(a+nh))$$

Simpsons formel er desværre en del vanskeligere at udlede end trapezformlen. Nedenfor giver vi en summarisk udledning, som dog er betydelig mere enkel end den direkte, at bestemme et 2.grads polynomium, der går gennem $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ og $(c,f(c))$ og integrere det fra a til c. Vi antager i det følgende, at $b = a + h$ og $c = b + h$.

Lagranges interpolationsformel er en direkte formel for et polynomium af grad n-1, som går gennem n punkter.

Nedenfor er Lagranges interpolationsformel opskrevet for de tre givne punkter $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$

$$p(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Ved inspektion ses, at $p(x)$ er et 2.grads polynomium, hvor $p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$ og $p(c) = f(c)$. $p(x)$ har således de samme værdier som $f(x)$ i de 3 punkter, og tilnærmer derfor funktionen.
Vi mangler da blot, at integrere denne funktion fra a til $c = a+2h$. Vi betragter det første led, og ser vi kun på den del, som ikke er konstant. For at bevare faktorerne udregner vi integralet med en delvis integration:

$$\int_a^{a+2h}(x-b)(x-c)dx = \int_a^{a+2h}\tfrac{1}{2}(x-c)d(x-b)^2 = \left[\tfrac{1}{2}(x-c)(x-b)^2 - \tfrac{1}{2}\int(x-b)^2dx\right]_a^{a+2h} =$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(x-c)(x-b)^2 - \tfrac{1}{6}(x-b)^3\right]_a^{a+2h} = \tfrac{1}{2}h^2 0 - \tfrac{1}{6}h^3 - (\tfrac{1}{2}(-h)^2(-2h) - \tfrac{1}{6}(-h)^3) = \tfrac{2}{3}h^3$$

Nævneren $(a - b)(a - c) = 2h^2$, så det første led bliver $\frac{1}{3}h\,f(a)$. På samme vis integreres de to andre led, som giver: $\frac{4}{3}hf(b)$ og $\frac{1}{3}hf(c)$. Alt i alt finder man:

$$A \approx \tfrac{1}{3}h(f(a) + 4f(b) + f(c))$$

hvilket skulle vises.

7. Regneregler for bestemte integraler. Indskudssætningen

Der gælder nogle regneregler for bestemte integraler. Lad f være en funktion, der er integrabel i et interval og lad a, b og c være vilkårlige tal i dette interval. Hvis $a < b$ og $y = f(x)$ er en kontinuert ikke negativ funktion, så er det bestemte integral et areal under en kurve.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Fra den oprindelige definition af det bestemte integral, (som det tal der skiller mængden af undersummer fra mængden af oversummer), har integralsymbolet kun mening hvis $a < b$.

Man kan imidlertid generalisere symbolet $A = \int_a^b f(x)dx$ til i alle tilfælde at betyde tallet $F(b) - F(a)$, hvor F er en stamfunktion til f. Med denne udvidelse, kan man let vise nogle sætninger om det bestemte integral. Der gælder følgende:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (\textit{Indskudsreglen})$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Bemærkning: Hvis a < c < b følger indskudssætningen af, at arealet under kurven fra a til b er lig med arealet under grafen fra a til c plus arealet fra c til b. (Arealer er additive). Strengt taget har vi ikke formelt bevist, at hvis en kontinuert funktion er integrabel i [a,b] så er den også integrabel i hvert af intervallerne [a,c] og [c,b], men denne undladelse lader vi passere. Beviset ved hjælp af oversummer og undersummer er simpelt, men ikke så interessant.

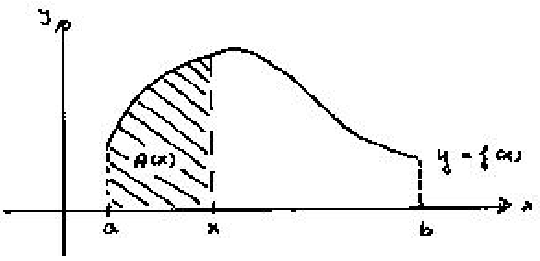
Alle reglerne kan vises, ved anvendelse af en stamfunktion F til f. Vi nøjes med at vise indskudsreglen, idet vi udregner højre side:

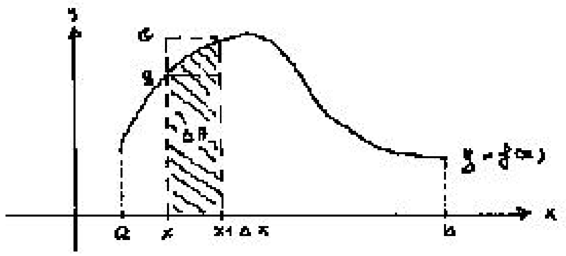
$$\left[F(x)\right]_a^c + \left[F(x)\right]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$$

Da venstre side er lig med $F(b)$ - $F(a)$ er sætningen vist.
Bemærk, at indskudsreglen gælder *uafhængig* af den indbyrdes beliggenhed af a, b og c. De andre sætninger vises helt tilsvarende.

8. En simpel udledning af arealformlen ved et bestemt integral

Vi vil nu vise en alternativ udledning af arealformlen for et bestemt integral. Udledningen inddrager ikke summer, og er derfor simplere. På den anden side knytter den ikke nogen teoretisk sammenhæng mellem integration og summation.





Figuren viser grafen for en ikke negativ, kontinuert funktion. Vi ønsker som før at bestemme arealet af området under kurven fra a til b. Arealet af den *punktmængde*, som vi tidligere har kaldt for M.

Arealet under kurven fra a til x, hvor $x \in [a, b]$ betegner vi med $A(x)$, som kaldes for arealfunktionen. Vi *antager* derfor, at arealfunktionen eksisterer for en kontinuert funktion. Det eneste vi på forhånd ved, er at $A(a) = 0$. For tilvæksten på x skriver vi nu Δx i stedet for h. Arealet af en lille strimmel fra x til $x+\Delta x$ udregnes da som: $\Delta A = A(x+\Delta x) - A(x)$.

Da f er kontinuert har den en størsteværdi G og en mindsteværdi g i intervallet $[x, x+\Delta x]$.
For $\Delta x>0$ er *arealet* af det lille rektangel $g\Delta x$ mindre end eller lig med arealet af strimmelen ΔA, som igen er mindre eller lig arealet $G\Delta x$ af det store rektangel. Der gælder derfor følgende ulighed:

$$g\Delta x \le A(x+\Delta x) - A(x) \le G\Delta x$$

Division med Δx giver for $\Delta x > 0$: ($\Delta x<0$ giver samme resultat, idet man skal erstatte Δx med $-\Delta x$ i udtrykket for arealerne af de små rektangler, samtidig med, at der er byttet om på rækkefølgen af $A(x+\Delta x)$ *og* $A(x)$ i udtrykket for ΔA):

$$g \le \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \le G \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0} G \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) \le \lim_{\Delta x 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \le f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$A'(x) = f(x)$$

Vi har ovenfor benyttet at såvel g som G vil gå imod $f(x)$ for $\Delta x \to 0$, idet f er antaget kontinuert.

Resultatet viser, at $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, nemlig den stamfunktion, som er 0 for $x = a$. En sådan stamfunktion kan skrives $F(x)$ - $F(a)$, hvor F er en vilkårlig stamfunktion. Arealet under kurven fra a til b, kan da skrives $F(b)$ - $F(a)$. Dette har vi allerede skrevet som et bestemt integral.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ulempen ved denne simplere fremstilling er, at den ikke direkte knytter det bestemte integral til grænseværdien af en sum, hvor leddenes antal går imod uendeligt, samtidig med at deres størrelse går imod 0.

Eksempel.
Udledning af en formel for arealet under grafen af en funktion ved anvendelse af differentialer. Hvis vi i figuren i det foregående afsnit lader bredden af strimmelen blive infinitesimal, så $\Delta x \to dx$, så er arealet af strimlen dA arealet af et rektangel med højden $f(x)$ og bredden dx lig med:

$$dA = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dA}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad A'(x) = f(x)$$

Så arealet er den stamfunktion til $f(x)$, som er 0 for $x = a$. Ønsker vi at udregne arealet fra a til b, kan det ifølge det foregående skrives som $A(b)$ - $A(a)$ eller med integraltegn.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

9. Eksistens af den naturlige logaritmefunktion

Vi har hidtil antaget eksistensen af en differentiabel funktion $f(x) = \ln x$, defineret for $x>0$ og som for alle $a,b \in R_+$ opfylder *funktionalligningen*:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Vi vil nu vise, *eksistensen* af logaritmefunktionen, idet $\ln x$ for $x>0$ defineres ved ligningen:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Da $\ln x$ defineret på denne måde, er stamfunktion til $1/x$, er den differentiabel for alle $x > 0$.
Ud fra definitionen kan vi nu vise grundreglen for logaritmefunktioner.
I beviset nedenfor anvender vi først indskudssætningen og dernæst en simpel substitution.

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^{a} \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$$

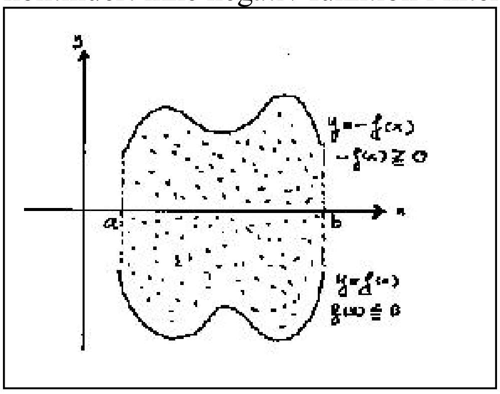
$$= \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \ln a + \int_1^{b} \frac{1}{au} adu$$

$$t = au \Rightarrow dt = adu \quad t = a \Rightarrow u = 1 \quad t = ab \Rightarrow u = b$$

$$= \ln a + \int_1^{b} \frac{1}{u} du = \ln a + \ln b$$

10. Bestemmelse af arealet under en funktionsgraf i andre tilfælde

Forudsætningen for at et areal kan udregnes som et bestemt integral er at funktionen $y = f(x)$ er en kontinuert ikke negativ funktion i intervallet $[a,b]$.

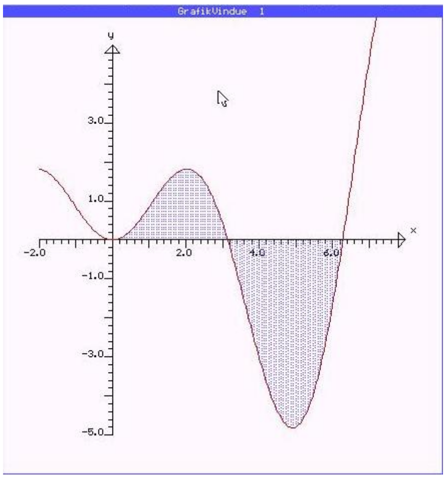


Vi vil først se på det tilfælde, at $f(x) \le 0$ *i intervallet* $[a,b]$.
Vi ønsker at bestemme arealet A, som begrænses af x-aksen, linierne $x = a$, $x = b$ og grafen for $y = f(x)$. Spejler vi $y = f(x)$ i x-aksen får vi funktionen $y = -f(x)$, som er ikke negativ i hele intervallet $[a,b]$. De arealer, som begrænses af x-aksen, linierne $x = a$, $x = b$ og henholdsvis $y = f(x)$ og $y = - f(x)$ er identiske. Se figuren nedenfor.
Det søgte areal kan derfor bestemmes som:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Hvis $y = f(x)$ skærer aksen i intervallet $[a, b]$, må intervallet deles op i delintervaller, hvor $y = f(x)$ overalt har samme fortegn.

Eksempel
Vi vil bestemme arealet, der begrænses af x aksen og grafen for $f(x) = x \cdot \sin x$ fra $x = 0$ til $x = 2\pi$. Se figuren nedenfor:
I intervallet $[0, 2\pi]$ har ligningen $f(x) = 0$ løsningerne: $x = 0$ eller $x = \pi$



Vi får brug for at kende en stamfunktion til $x \cdot \sin x$. Denne kan findes ved delvis integration.

$$\int x \sin x dx = -\int x d \cos x = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x$$

Vi finder da

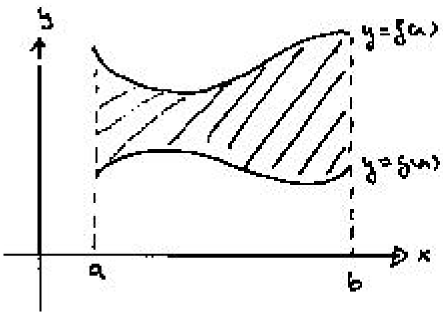
$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx =$$
$$[\sin x - x \cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x \cos x]_{\pi 0}^{2\pi} = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$$

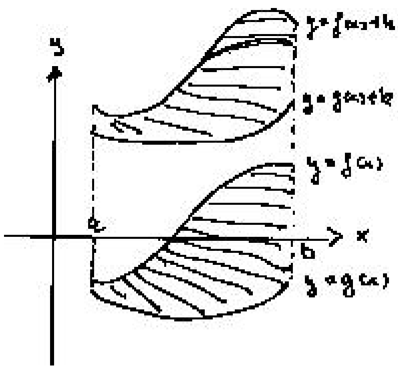
10.1 Arealet mellem to funktionsgrafer

Vi vil nu finde en formel til bestemmelse af arealet begrænset af to grafer, og eventuelt linierne $x = a$ og $x = b$. Se figuren nedenfor. Det antages at f og g er integrable, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ og $f(x) \geq g(x)$ i intervallet $[a, b]$.
Det er nu umiddelbart indlysende, at det søgte areal er arealet under $y = f(x)$ minus arealet under $y = g(x)$ fra a til b. Der gælder således:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Vi dropper nu forudsætningen om, at $f(x) \geq 0$ og $g(x) \geq 0$, men fastholder at $f(x) \geq g(x)$ i intervallet $[a, b]$. Det vil sige: $f(x)$ og $g(x)$ kan godt ligge helt eller delvis under x-aksen, men at $f(x)$ ligger over $g(x)$ i hele intervallet $[a, b]$.



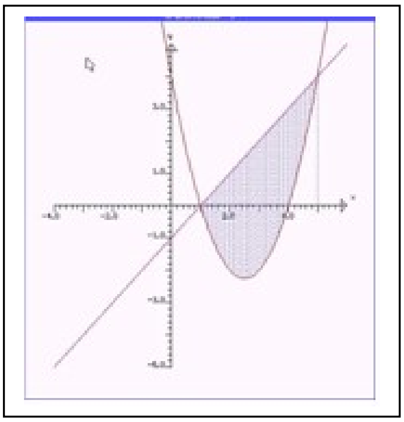


Da g er kontinuert er den også begrænset, og vi kan derfor altid bestemme et reelt tal k, så $g(x)+k \geq 0$ i hele intervallet $[a,b]$. Betragter vi nu i stedet funktionerne $f(x)+k$ og $g(x)+k$, så svarer det blot til en parallelforskydning på k i y-aksen positive retning. Arealet mellem de to grafer er uforandret det samme, og kan beregnes:

$$A = \int_a^b ((f(x) + k) - (g(x) + k))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Vi finder således i alle tilfælde *den samme formel*, uafhængigt af fortegnet for de to funktioner

Eksempel
Vi ønsker at bestemme arealet, der begrænses af de to funktioner $f(x) = x^2 - 5x + 4$ og $g(x) = x - 1$. Se figuren, hvor opgaven er løst med et matematikprogram.



For at finde skæringspunkterne, løser vi først ligningen $x^2 - 5x + 4 = x - 1$. Denne 2.gradsligning har løsningerne $x = 1 \vee x = 5$. Ved at betragte graferne eller udregne *f*.eks. $f(2)$ og $g(2)$, ses, at $g(x)$ ligger over $f(x)$ i intervallet [1,5].
Arealet udregnes derfor som:

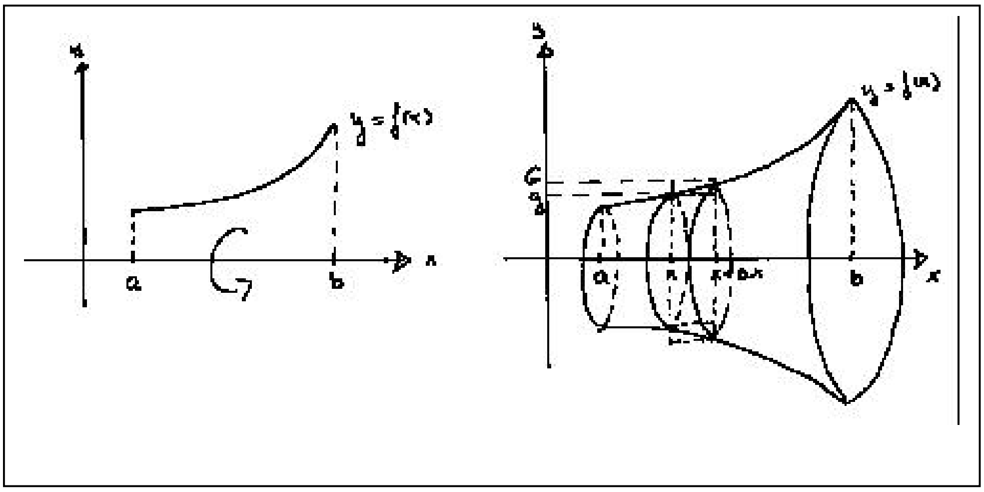
$$A = \int_1^5 (g(x) - f(x))dx = \int_1^5 (x - 1 - (x^2 - 5x + 4))dx =$$

$$= \int_1^5 (-x^2 - 5x - 5)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_1^5$$

$$= \tfrac{125}{3} + 75 - 25 - (-\tfrac{1}{3} + 3 - 5) = 10\tfrac{2}{3}$$

11. Volumen af omdrejningslegeme

Integralregningen har i alle naturvidenskaberne og økonomi langt videre anvendelsesområder end til beregning af arealer. Vi skal nu se på et eksempel, som er knyttet til arealberegning, nemlig beregning af rumfang (volumen) af legemer, (som ikke er kasse eller cylinderformede).
På figuren nedenfor er vist grafen for en kontinuert ikke negativ funktion i et interval $[a,b]$. Hvis funktionen roteres 360^0 om x-aksen, vil arealet under kurven gennemstryge et rumfang – et såkaldt omdrejningslegeme.
Omdrejningslegemet er begrænset af endefladerne med arealer $\pi \cdot f(a)^2$ og $\pi \cdot f(b)^2$, samt den krumme overflade, som fremkommer, når kurven $y = f(x)$ roteres 360^0 om x-aksen.
Vi stiller os nu den opgave at bestemme voluminet V af omdrejningslegemet. På helt samme måde, som vi definerede en arealfunktion $A(x)$, som arealet under kurven $y = f(x)$ fra a til x, definerer vi nu en volumenfunktion $V(x)$, som er rumfanget af omdrejningslegemet fra a til x. Det eneste vi ved, er foreløbig at $V(a) = 0$.
Vi betragter nu for $\Delta x > 0$ en tynd skive, skåret ud vinkelret på x-aksen med snitflader ved x og $x + \Delta x$. Rumfanget af denne skive er $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$.
Da f er kontinuet, har f en størsteværdi G og en mindsteværdi g i intervallet $[x, x + \Delta x]$. Begge afhænger af såvel x som Δx.



Vi udtrykker da, at ΔV er større end rumfanget af cylinderen med radius g, og mindre end rumfanget af cylinderen med radius G. Begge cylindre har højden Δx. Rumfanget af en cylinder med radius r og højde h er $\pi r^2 h$. Der gælder følgelig:

$$\pi g^2 \Delta x \leq V(x+\Delta x) - V(x) \leq \pi G^2 \Delta x$$

Ved division med Δx finder man for $\Delta x > 0$: (Tilfældet $\Delta x < 0$ kan behandles helt tilsvarende og giver samme resultat)

$$\pi g^2 \leq \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} \leq \pi G^2$$

Hvis vi tager grænseværdien af denne ulighed for $\Delta x \to 0$, vil såvel g som G gå imod $f(x)$. Man finder derfor:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \pi g^2 \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} \pi G^2$$

$$\pi f(x)^2 \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} \leq \pi f(x)^2 \Rightarrow$$

$$V'(x) = \pi f(x)^2$$

Den sidste ligning udtrykker, at $V(x)$ er en stamfunktion til $\pi f(x)^2$ nemlig den stamfunktion som er 0 for $x = a$. Dette er det ønskede resultat. Volumenet kan herefter beregnes som et bestemt integral.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Eksempel

Vi vil bestemme *arealet* under kurven $y = 1/x$ fra $x = 1$ til $x = t$, samt *voluminet* af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når det pågældende areal roteres 360^0 om x-aksen. Endelig vil vi undersøge såvel arealet som voluminet, når øvre grænse går mod uendeligt. Først arealet:

$$A = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t$$

Dernæst rumfanget:

$$V = \pi \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \pi\left(-\frac{1}{t} - (-1)\right) = \pi - \frac{\pi}{t}$$

Som det umiddelbart ses, går arealet mod uendelig, når $t \to \infty$, mens rumfanget går imod π, når $t \to \infty$.
Et ret overraskende resultat. En "trompetformet" beholder med et uendeligt stort længdesnitsareal, kan kun rumme en endelig mængde væske.

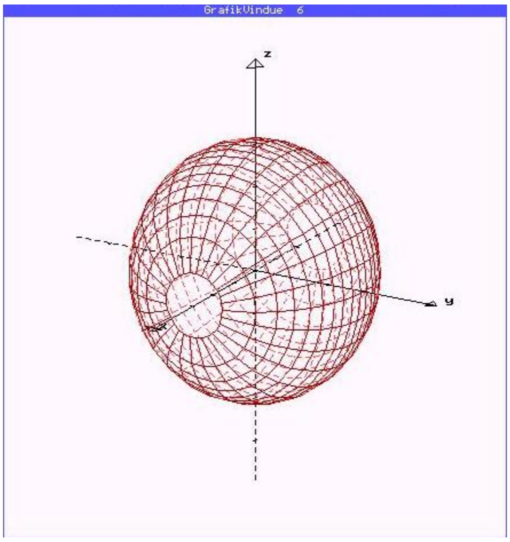
Vi udledte vores formel med den forudsætning, at $y = f(x)$ var ikke negativ i intervallet $[a,b]$. Da der imidlertid gælder, at $(-f(x))^2 = f(x)^2$, kan vi droppe denne forudsætning.

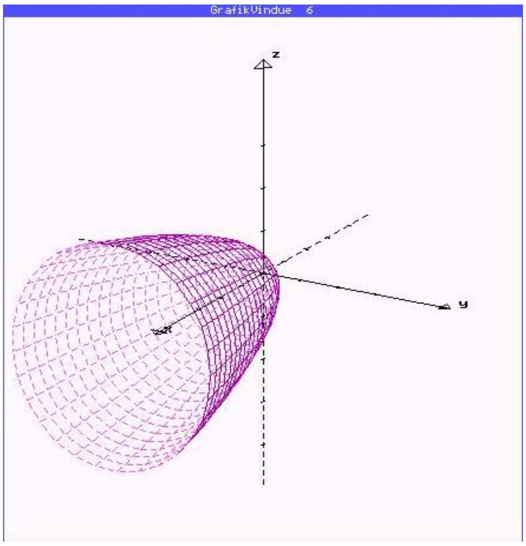
Hvis $y = f(x)$ skærer x-aksen i punktet $x = c$, hvor c ligger mellem a og b, er man hvad angår *arealet* under kurven nødt til at dele integralet op i to dele.

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b (-f(x))dx$$

Dette er imidlertid *ikke* nødvendigt for *rumfanget*, idet integranden $(-f(x))^2 = f(x)^2$.

Eksempler
Vi vil bestemme rumfanget af en kegle, rumfanget af en kugle, og rumfanget af en paraboloide. Nedenfor er vist omdrejningslegemerne for kuglen og paraboloide, tegnet af et matematikprogram





Man kan få en kegle med højden h ved at rotere linien $y = ax$ 360^0 om x-aksen fra $x = 0$ til $x = h$. Radius i grundfladen bliver så $r = ah$.

$$V_{Kegle} = \pi\int_0^h (ax)^2\,dx = \pi a^2\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h^3 = \tfrac{1}{3}\pi(ah)^2 h = \tfrac{1}{3}h\pi r^2 = \tfrac{1}{3}hG$$

Rumfanget af en kegle er 1/3 x højde x grundflade. Formlen gælder i øvrigt også for pyramider også usymmetriske og uafhængigt af antallet af hjørner. Dette vil vi dog ikke bevise.

Vi vil dernæst bestemme rumfanget af en kugle med radius r. Man kan opnå en kugle ved at rotere $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 360^0 om x-aksen fra $x = -r$ til $x = r$.

$$V_{kugle} = \pi\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3 - (-r^3 - \tfrac{1}{3}(-r)^3)) = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Som er den velkendte formel for rumfanget af en kugle.

En paraboloide med højden h kan opnås ved at rotere $y = a\sqrt{x}$ 360^0 om x-aksen fra 0 til $x = h$. Radius i grundfladen vil være $r = a\sqrt{h}$.

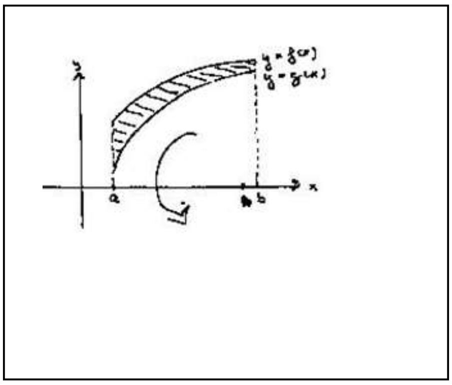
$$V_{Paraboloide} = \pi \int_0^h (a\sqrt{x})^2\,dx = \pi a^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^h = \tfrac{1}{2}a^2h^2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2 hh = \tfrac{1}{2}\pi r^2 h = \tfrac{1}{2}hG$$

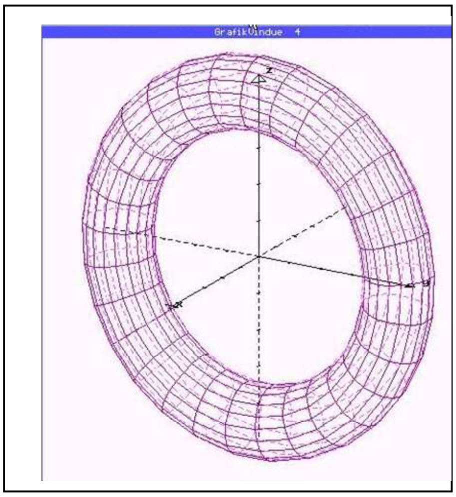
Rumfanget er således ½ højde gange grundflade.

11.1 Omdrejningslegeme begrænset af to grafer

Hvis man vil finde rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når arealet, der begrænses af linierne $x = a$, $x = b$, samt graferne for funktionerne $y = f(x)$ og $y = g(x)$, og hvor $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$, når det roteres 360^0 om x-aksen, svarer det til, at man "udborer" omdrejningslegemet svarende til rotation af $y = f(x)$, med omdrejningslegemet svarende til rotation af $y = g(x)$. Man skal simpelthen subtrahere voluminet af det inderste omdrejningslegeme fra det yderste. Se figuren til venstre nedenfor. Resultatet bliver:

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx - \pi\int_a^b g(x)^2\,dx = \pi\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx$$





Eksempel

En ring (en torus) med radius R og radius r i tværsnittet, fremkommer, når man roterer en cirkel med radius r og centrum C=(0,R) 360^0 om x-aksen. Se figuren ovenfor. Cirklen har ligningen $x^2 + (y - R)^2 = r^2 \Leftrightarrow$

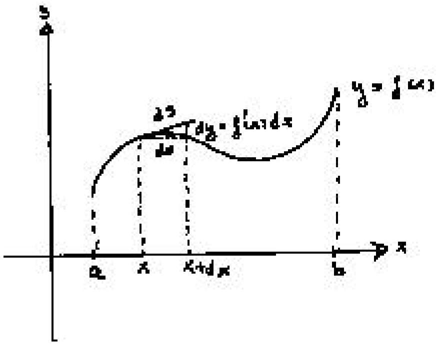
$y = \sqrt{r^2 - x^2} + R \;\vee\; y = -\sqrt{r^2 - x^2} + R$ svarende til de to halvcirkler. Vi kan finde voluminet af en torus, som voluminet, når vi roterer den øverste halvcirkel minus voluminet, når vi roterer den nederste halvcirkel.

$$V_{Torus} = \pi\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 - (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2\,dx = 4\pi R\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\pi R \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2$$

Det sidste integral behøver vi ikke udregne, da det er arealet af en halvcirkel med radius r. Resultatet er nemt at tolke. Hvis vi skar ringen over og rettede den ud, ville vi have en cirkulær cylinder med radius r og højde $2\pi R$. Voluminet er således tværsnit gange omkredsen.

11.2 Kurvelængde for grafen for en funktion

Integralregningen har utallige anvendelser. Her vil vi nøjes med at se på endnu et par matematiske anvendelser. Ved udledningen af formlerne vil vi dog gøre brug af regning med differentialer, som infinitesimale størrelser (dvs. uendelig små størrelser). Selv om dette ikke er matematisk stringent, giver en udledning ved brug af grænseovergang det samme resultat.



Vi er interesseret i at bestemme et udtryk for længden af grafen for en *differentiabel* funktion $y = f(x)$ i intervallet $[a,b]$. Vi ser på længden af grafen i intervallet fra x til $x+dx$. (Se figuren). Hvis dx er infinitesimal er længden ds af grafen i intervallet dx det samme som længden af tangenten til grafen i intervallet dx. Tangentstykket er hypotenuse i en trekant med kateterne dx og $dy = f'(x)dx$. Vi finder derfor:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

og hermed

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

For de fleste funktioner fører denne formel frem til et integral, som ikke kan løses ved elementære metoder. Vi giver derfor kun et eksempel, hvor vi kender svaret, nemlig længden af en cirkelbue. For simpelheds skyld vil vi nøjes med at se på en (halv) enhedscirkel.

Eksempel

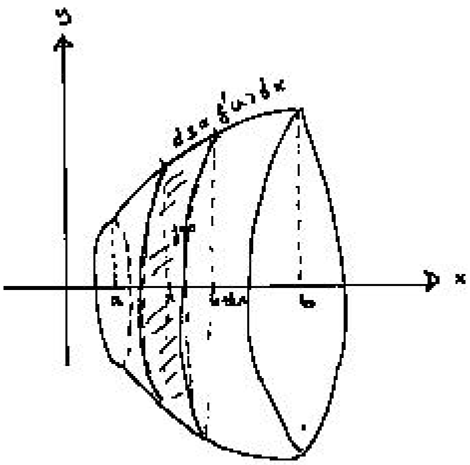
Vi vil finde kurvelængden for funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$ i intervallet fra $x = -1$ til $x = 1$ (Længden af en halv cirkelbue på enhedscirklen. Resultatet skulle blive π.

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}(x)\right]_{-1}^{1} = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Længden af hele cirkelbuen er derfor 2π, og periferien af en cirkel med radius r bliver $2\pi r$.

11.3 Overfladen af et omdrejningslegeme

Vi ønsker at finde en formel til beregning af overfladen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når en ikke negativ differentiabel funktion $y = f(x)$ roteres 360^0 om x-aksen.
Vi betragter først overfladen dO, som befinder sig mellem x og $x+dx$.



Overfladestykket har bredden $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ og radius $f(x)$. man finder derfor

$$dO = 2\pi\, r ds = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \Rightarrow$$
$$O = \int_a^b dO = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Det er de færreste funktioner, hvor det er muligt at finde en stamfunktion. Vi vil kun se på et enkelt eksempel.

Eksempel
Vi vil bestemme overfladen af en kugle med radius r. Svaret er kendt. Det er $4\pi r^2$. Kuglen med radius r, kan fremkomme ved at rotere $y = \sqrt{r^2-x^2}$ 360^0 om x-aksen. Ved differentiation finder man $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ indsætning i formlen giver

$$O = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$
$$O = 2\pi\int_{-r}^{r} r dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$