Forløbet af en influenza epidemi
Med henblik på Corona

Ole Witt-Hansen 2020 (1996)

1. Forløbet af en influenza epidemi

Udbredelse af en epidemi er i almindelighed en meget kompliceret proces, der ofte skyldes tilfældigheder. Den dødelige SARS, der blev udbredt i flere lande, værst i Kina og i det vestlige Canada, skyldes den omstændighed, at en fjerkræ-handler overnattede på et internationalt hotel, hvorefter sygdommen hurtigt blev spredt til flere lande gennem lufthavnsterminaler mv.

Det ligger i sagens natur, at man ikke kan opstille en matematisk model for en sådan udbredelse. Bedre eksempler er de influenza epidemier, der med jævne mellemrum rammer Europa og USA. Her kan man godt opstille en simpel model for udbredelsen i en tæt population med N individer. Det kan f.eks. være en storby.
Da influenza smitte overføres ved dråbe infektion (udånding), er det væsentligt at hele populationen har mulighed direkte eller indirekte at være i fysisk kontakt med hinanden.
Vi indfører først nogle betegnelser:

$R(t)$ = ”Raske: Antallet af personer, der endnu ikke er smittede til tidspunktet t”

$S(t)$ = ”Syge: Antallet af personer, der er smittede, og som kan overføre smitten til tidspunktet t.

$I(t)$ = ”Immune: Antallet af personer, der har været syge, og som er blevet immune tidspunktet t.

Der vil til ethvert tidspunkt gælde: $R(t) + S(t) + I(t) = N$

Da modellen er baseret på et sandsynlighedsargument, indfører vi også de tilsvarende brøkdele:

$r(t) = \dfrac{R(t)}{N}$: Brøkdelen af ”raske” personer.

$s(t) = \dfrac{S(t)}{N}$: Brøkdelen af ”syge” personer.

$i(t) = \dfrac{I(t)}{N}$: Brøkdelen af ”immune” personer.

Der vil til ethvert tidspunkt gælde: $r(t) + s(t) + i(t) = 1$

Som altid angiver differentiation med hensyn til tiden hastigheden, hvormed en størrelse ændres.

Hvis, der er mindst en ”syg” vil $r(t)$ være en aftagende funktion. Hastigheden, hvormed den aftager vil (under den mest simple antagelse), være proportional med sandsynligheden for at en rask møder en syg. Denne sandsynlighed er igen proportional med antallet (brøkdelen) af syge gange (antallet) brøkdelen af raske. Vi kan således skrive, (hvor a er en proportionalitetskonstant):

(1.1)
$$\frac{dr}{dt} = -a \cdot r(t)s(t)$$

Da en syg person efter et tidsrum bliver rask (eller dør), må hastigheden, hvormed man bliver immun være proportional med brøkdelen af syge $s(t)$, (med en proportionalitetskonstant b).

(1.2) $$\frac{di}{dt} = bs(t)$$

For at opstille en differentialligning for s(t), anvender vi "normaliseringsbetingelsen" $r(t) + s(t) + i(t) = 1$, som vi differentierer:

$$\frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{dr}{dt} - \frac{di}{dt}$$

Indsætter vi heri de ovenfor fundne udtryk for $\frac{dr}{dt}$ *og* $\frac{di}{dt}$ finder man:

(1.3) $$\frac{ds}{dt} = a \cdot r(t)s(t) - bs(t)$$

Man kan også direkte indse (1.3), idet en person, der ikke længere er rask, er blevet syg.
Så brøkdelen af syge vokser med en faktor $a \cdot r(t)s(t)$, men aftager samtidig proportionalt med $s(t)$, da en syg bliver rask (eller dør) efter en vis periode.

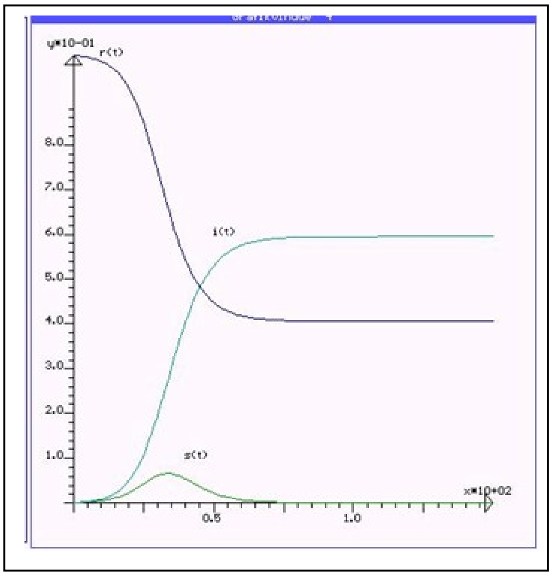
De 3 "koblede" differentialligninger (1.1) – (1.3) har ikke nogen kendt analytisk løsning.
Differentialligningerne løses imidlertid på en computer og et passende matematikprogram.

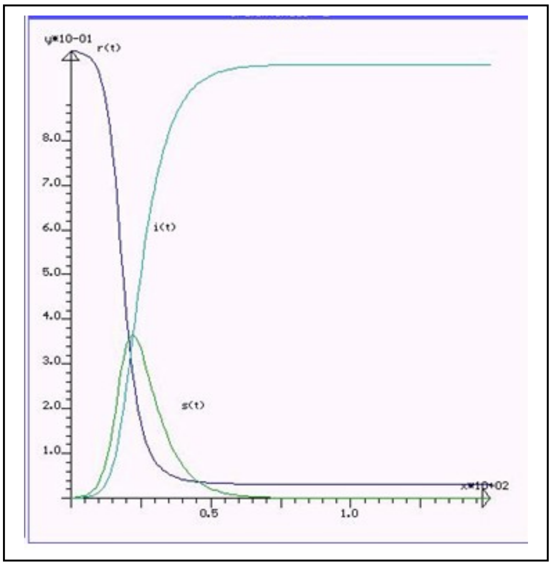
(Programmet, som viser løsningerne på nedenstående grafer, er mit eget, som er DOS-baseret (ikke windows) program, skrevet i Turbo Pascal 7.0. (Kan ikke afvikles på maskiner efter Windows XP)

Fastsættelsen af konstanterne a og b, kan f.eks. ske ved at sammenligne med aktuelle data, og her har vi ret vilkårligt valgt, at sætte a=0.5 og b=0.33. Den sidste konstant kan begrundes ved at en smittet person kan overføre smitte i "3 dage", så en tredjedel=0.333 bliver immune over et døgn.

På den næste graf har vi igen sat a=0.5, men antaget at perioden, hvor man kan smitte er 7 dage, så b=0.141 (=1/7). I begge tilfælde ser man at antallet af syge vokser op, for derefter at falde igen.

Bemærk, at man i modellen antager at sygdommen udvikler sig helt frit, og at man ikke vaccinerer eller isolerer de syge, som det var tilfældet med SARS.
I det første tilfælde er det maximale antal syge 8%, mens det i det andet tilfælde er ca. 38% - en meget væsentlig forskel.
I det første tilfælde bliver ca. 58% smittede, mens det i det andet tilfælde er helt oppe på 96%.
Hvis man justerer på a, får man naturligvis helt andre kurver.





Modellen kan anvendes, hvis man i starten af en epidemi har nok indsamlet data til at kunne skønne over *a* og *b*, så kan man få et skøn over hvor længe epidemien vil vare og hvor mange sygdomstilfælde, man kan forvente.