Implicit differentiation
Med eksempler

Indhold

Ole Witt-Hansen 2012

1. Implicit differentiation

I sidste nummer af LMFK bladet, var der en artikel om ortogonale tangenter til en ellipse.
Da jeg gik i gymnasiet var formlen for tangent til ellipse og hyperbel en del af det obligatoriske pensum i analytisk geometri, (som ganske vidst er udgået af gymnasiets matematikpensum), og jeg husker stadig med en vis ærefrygt, at formlerne blev udledt ved anvendelse af implicit differentiation. Grundlaget for implicit differentiation blev først rigtig klart for mig til Børge Jessens forelæsninger på matematik 2 i 1965 (KU).

Løseligt formuleret, så hvis man har en ligning $f(x,y) = c$, så er y implicit en funktion af x. At isolerer y, kan godt vise sig at være særdeles besværligt – eller umuligt. Men i mange tilfælde kan man alligevel godt finde et udtryk for dy/dx ved *implicit* at antage, at $y=y(x)$.
Opskriver man differentialet af $f(x,y) = c$, får vi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Ved division med dx:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

som kan løses mht. dy/dx. (Og eventuelt løses mht. $dy/dx = 0$)

2. Tangent til ellipse og hyperbel

En ellipse, som har "centrum" i (x_0,y_0) og halvakser a og b. har som bekendt ligningen:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Hvis (x_1,y_1) er et punkt på ellipsen, er $\dfrac{dy}{dx}$ udregnet i x_1 lig med hældningskoefficienten for tangenten i x_1.
For at bestemme dy/dx differentierer vi ellipsens ligning implicit.

$$\frac{2(x-x_0)}{a^2} + \frac{2(y-y_0)}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

som løses mht. dy/dx til at give.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}$$

Ligningen for en linie gennem (x_1,y_1) og med hældning a er: $y - y_1 = a(x - x_1)$.

Indsættes ovenstående udtryk for dy/dx, som er hældningen taget i x_1, finder man:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1 - x_0)}{(y_1 - y_0)}(x - x_1)$$

som omskrives til

$$\frac{(x - x_1)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_1)(y_1 - y_0)}{b^2} = 0$$

Man finder altså et simpelt udtryk for tangentligningen, som minder bemærkelsesværdigt om ”ellipsens ligning”

.
For en hyperbel, som har ligningen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

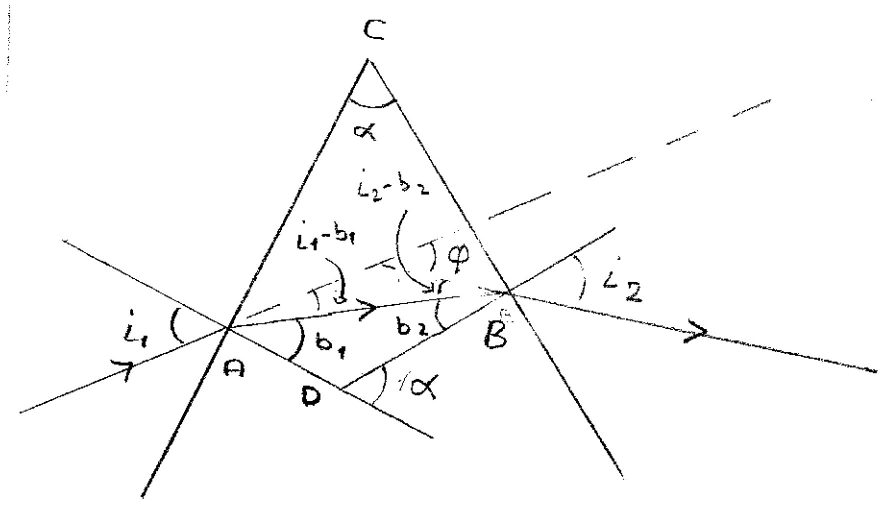
den eneste forskel til tangentligningen for ellipsen er, at minustegnet følger med

$$\frac{(x - x_1)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_1)(y_1 - y_0)}{b^2} = 0$$

3. Prisme i hovedstillingen

Da jeg for en del år siden skrev et hefte om Geometrisk optik til brug som valgfrit emne i gymnasiet, skulle jeg anvende det kendte resultat, at afbøjningen i et prisme er mindst i hovedstillingen, altså der hvor strålegangen er symmetrisk omkring prismet, og det burde jo være nemt nok at vise ud fra brydningsloven?

Det er muligt, at der kan findes en simpel analytisk forklaring, men jeg kunne ikke finde den, men efter at have opgivet at løse problemet med almindelige analytiske metoder, kom jeg til at tænke på implicit differentiation. Simpelt? Nej! Men det kan gennemføres, som vist nedenfor.



Vi betragter firkanten *ACBD*. Vi anvender at supplementvinklen (180^0 – vinklen) til vinklen i en trekant (indlysende) er lig med summen af de to andre vinkler i trekanten. Dette anvendt på trekant *ABD* og da $A=B=90^0$ fremgår det af figuren (og geometrien):

$$D = 180 - \alpha \;\; og \;\; 180 - D = b_1 + b_2 \Rightarrow \alpha = b_1 + b_2$$

Afbøjningen φ af strålen ses at være

$$\varphi = i_1 - b_1 + i_2 - b_2 = i_1 + i_2 - (b_1 + b_2) = i_1 + i_2 - \alpha$$

Man kan eksperimentelt påvise og teoretisk udlede, at afbøjningen er mindst, når strålegangen er symmetrisk, altså når

$$i_1 = i_2 = i \quad \text{og} \quad b_1 = b_2 = b.$$

Dette kaldes for prismets hovedstilling. I dette tilfælde er

$$\varphi = \varphi_{\min} = 2 \cdot i - \alpha\,, \quad \text{så:} \quad n = \frac{\sin i}{\sin b} = \frac{\sin(\frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \quad \text{og} \quad b = \frac{\alpha}{2}.$$

Anvender man dette i brydningsloven finder man:

$$n = \frac{\sin i}{\sin b} = \frac{\sin(\frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

3.1 Teoretisk argument for hovedstillingen.

Ifølge udledningen ovenfor gælder

$$\varphi = i_1 + i_2 - (b_1 + b_2) \quad and \quad \alpha = (b_1 + b_2)\;,$$

samt ifølge brydningsloven:

$$\frac{\sin i_1}{\sin b_1} = n \quad and \quad \frac{\sin i_2}{\sin b_2} = n \quad \Rightarrow$$
$$\sin i_1 = n \sin b_1 \quad and \quad \sin i_2 = n \sin b_2 = n \sin(\alpha - b_1)$$

Ud fra den sidste ligning kan vi opfatte i_2 som en funktion af b_1 og ud fra den første ligning kan vi opfatte b_1 som funktion af i_1. Dette skriver vi:

$$i_2 = i_2(b_1) \quad og \quad b_1 = b_1(i_1) \quad => \quad i_2 = i_2(b_1(i_1))$$

Den funktionelle afhængighed fremgår implicit ovenfor. Herefter kan vi implicit udtrykke φ som funktion af i_1 og differentiere den for et finde minimum.

$$\varphi = i_1 + i_2 - (b_1 + b_2) \qquad and \qquad \alpha = (b_1 + b_2) \qquad \Rightarrow$$
$$\varphi = i_1 + i_2 - \alpha = i_1 + i_2(b_1(i_1)) - \alpha$$

Ved (implicit) differentiation af den sammensatte funktion med hensyn til i_1 for at bestemme et eventuelt minimum, finder man herefter:

$$\frac{d\phi}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{db_1}\frac{db_1}{di_1}$$

Ved implicit differentiation af ligningerne:

$$\sin i_1 = n \sin b_1 \qquad and \qquad \sin i_2 = n \sin b_2 = n \sin(\alpha - b_1)$$

Finder vi:

$$\cos i_2 \frac{di_2}{db_1} = -n\cos(\alpha - b_1) \qquad and \qquad n\cos b_1 \frac{db_1}{di_1} = \cos i_1$$

Ved at løse disse ligninger for $\frac{di_2}{db_1}$ og $\frac{db_1}{di_1}$ og derefter indsætte i udtrykket for φ, finder man:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{di_1} &= 1 + \frac{di_2}{db_1}\frac{db_1}{di_1} \\ &= 1 - \frac{\cos i_1}{\cos i_2}\frac{\cos(\alpha - b_1)}{\cos b_1} \\ &= 1 - \frac{\cos i_1}{\cos i_2}\frac{\cos b_2}{\cos b_1}\end{aligned}$$

We can now see from above that $\frac{d\phi}{di_1} = 0$ has the solution $i_1 = i_2 \ \wedge \ b_1 = b_2$

Det ses, at $\frac{d\phi}{di_1} = 0$ har løsningen $i_1 = i_2 \ \wedge \ b_1 = b_2$, idet begge de to cosinus brøker bliver lig med 1.

Dette er netop betingelsen for hovedstillingen af prismet, hvilket var det vi ville vise. At det er et minimum og ikke et maximum er indlysende af fysiske grunde.