# Lidt Om Fibonacci tal

Indhold



Ole Witt-Hansen 2008

## 1. Definition af Fibonacci tallene

Fibonacci tallene er opkaldt efter den italienske matematiker Leonardo Fibonacci.
De betegnes f.eks. $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ med $a_0 = 0$ *og* $a_1 = 1$. De opfylder følgende rekusionsligning:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Med $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$ finder man let:

$a_2 = 0 + 1 = 1$
$a_3 = 1 + 1 = 2$
$a_4 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = 3 + 2 = 5$
$a_6 = 5 + 3 = 8$
$a_7 = 8 + 5 = 13$
$a_8 = 13 + 8 = 21$
$a_9 = 21 + 13 = 34$
$a_{10} = 34 + 21 = 55$

Det forlyder, at tallene første gang dukker op i en lille afhandling om kaninavl.

## 2. Kaninavl

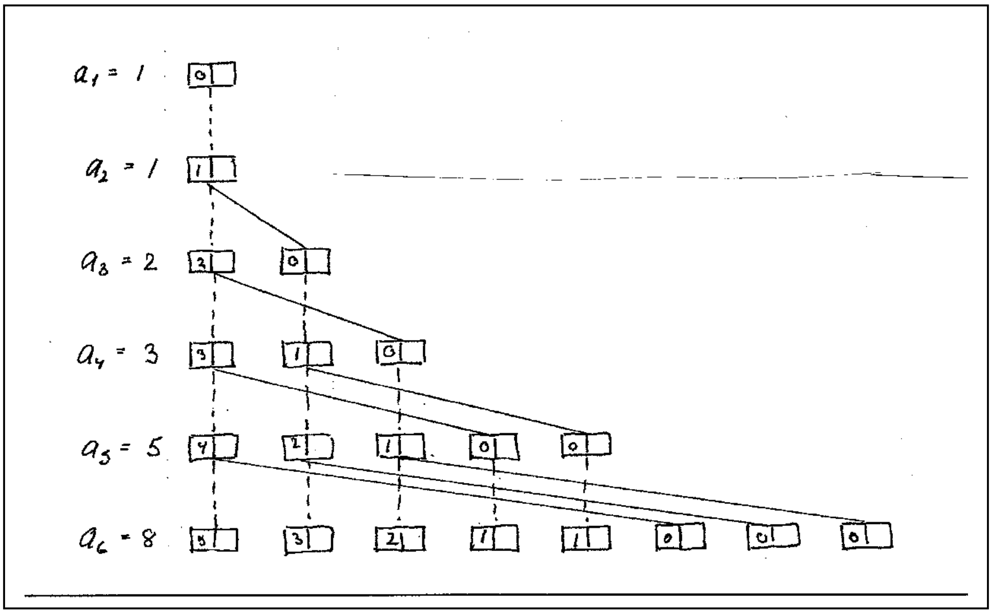
Vi antager, at der forløber et tidsrum $T$ fra en kanin bliver født til den er kønsmoden og endvidere, at der forløber det samme tidsrum $T$ fra et kønsmodent kaninpar får unger. Det antages, at et kaninpar altid får netop to unger og at de fortsætter med dette med perioden $T$.

For at bestemme antallet af *kaninpar* efter $n$ perioder ($t = nT$), opstiller man følgende ræsonnement:
$a_n$ betegner antallet af kaninpar efter $n$-1 perioder.
Vi begynder med et kaninpar, så $a_1$=1. Efter 1 periode $T$, er kaninparret blevet kønsmodne, men der er endnu ikke blevet født unger så $a_2$=1. Efter 2 perioder er der blevet født to unger, så antallet af kaninpar $a_3$=2. Efter endnu en periode, har det første kaninpar fået endnu to unger, så $a_4$=3.

I almindelighed kan vi ræsonnere således. Antallet af kaninpar efter $n$+1 perioder, $a_{n+2}$ er lig med antallet af kaninpar efter $n$ perioder $a_{n+1}$ plus, hvad der er kommet af unger. Men antallet af unger er det samme som antallet af kaninpar $a_n$ to perioder tidligere. Derfor får vi:

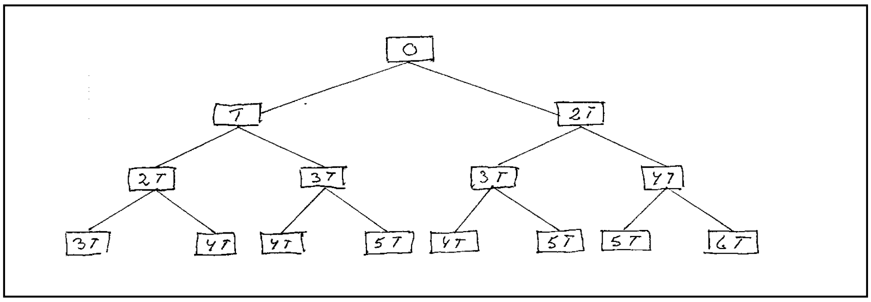
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dette er netop rekursionsligningen for Fibonacci tallene. Ræsonnementet er anskueliggjort nedenfor. For hvert kaninpar er angivet, hvor mange unger det har fået




## 3. Telefonkæder.

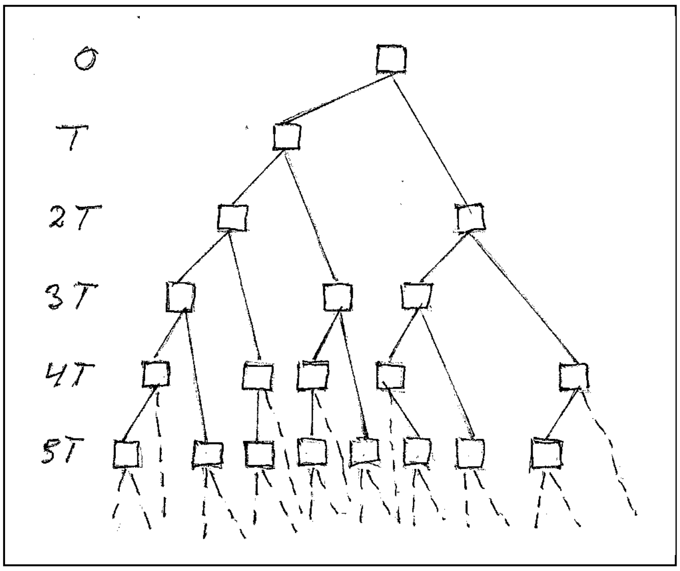
Fibonacci tallene dukker op i mange problemstillinger, for eksempel, når man skal optimere en telefonkæde. Optimere, betyder i denne sammenhæng, at alle i en telefonkæde, får den samme besked i den kortest mulige tid.
Vi gør nogle rimelige antagelser, nemlig at der går et konstant tidsrum $T$ (f.eks. 1 min)fra man bliver ringet op til man igen kan ringe videre og det samme tidsrum til at gennemføre en opringning.
I en traditionel telefonkæde, har man 1 i det første niveau, 2 i det næste, $2^2 = 4$ i det tredje, osv.
Telefonkæden er vist nedenfor:




På figuren er der 4 niveauer 0 til 3. For hver person i telefonkæden er angivet det antal perioder, som der går før personen får beskeden. Problemet er åbenlyst, idet der er én i det 3. niveau der får beskeden til $t = 3T$, og en der først får beskeden efter $t = 6T$.
I almindelighed vil den sidste person i det n'te niveau få beskeden $(n\text{-}1)T$ senere end den første person i det $n$'te niveau.
Sammenhængen mellem antallet af personer $N$ og antallet af niveauer $n$ er:

$$N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \qquad \text{altså } N = 2^n - 1 \text{ eller } n = \log_2(N+1)$$

I eksemplet ovenfor er $n$ = 4, så $N$ = 15.




Vi stiller os nu den opgave, at lave en telefonkæde, så *alle* i samme niveau får beskeden *samtidig.*
På figuren til venstre, markerer hver firkant en person, og linierne er de to personer, der ringes til. Bemærk, at personen i det 0'te niveau først ringer til en i det 1. niveau ($T$), og derefter til en i det 2. niveau ($2T$). I det 2. niveau ringer hver først til en i 3. niveau ($3T$), og derefter til en i 4. niveau ($4T$). Det er herefter klart, at alle i samme niveau, vil få beskeden samtidig. For eksempel, så vil alle i det 4. niveau få beskeden til tidspunktet $4T$. Endvidere ses det, at antallet af personer i den n'te niveau netop er Fibonacci tallet $a_n$.

Dette kan ses ved følgende ræsonnement: De som har fået beskeden i det $n$+2'te niveau $a_{n+2}$, er de som har fået beskeden i det n+1'te niveau $a_{n+1}$ (for de ringer til en i det n+2'te niveau), plus de, som har fået beskeden i det n'te niveau $a_n$ (for de har alle ringet til en i det n+2'te niveau).
Der gælder således:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Som netop er rekursionsformlen for Fibonacci tallene.

Med kun 6 niveauer er forskellen til den traditionelle telefonkæde til at overse. $6T$ reduceres til $5T$. Der er imidlertid ikke det samme antal personer i de to træer (15 og 20). Telefonkæden ovenfor er mest af teoretisk interesse, men den finder anvendelse i datalogien. Antallet af elementer i det n'te niveau, vokser noget nær fordobling, idet der gælder:

$$2\,a_{n+1} > a_{n+1} + a_n > 2\,a_n \;\Leftrightarrow\; 2\,a_{n+1} > a_{n+2} > 2\,a_n$$

## 4. En formel for Fibonacci tallene

Der gælder følgende formel for Fibonaccitallet $a_n$.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Det er let at vise, at formlen gælder for $n$ =0,1,2. For $n$>2, kræver det kendskab til *differensligninger*. En differensligning, kan f.eks. skrives

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

som netop er rekursionsligningen for Fibonacci-tallene. Opgaven er at bestemme funktionen $f$. Erstatter vi $n$ med $x$ og tillader vi at $x$ antager også ikke heltallige værdier, får man ligningen:

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x+2) - f(x+1) - f(x) = 0$$

Vi gætter da (kvalificeret) på en løsning af formen $f(x) = b\cdot a^x$ og indsætter.

$$b\cdot a^{x+2} - b\cdot a^{x+1} - b\cdot a^x = 0$$

Ved division med $b\cdot a^x$ får man den karakteristiske ligning:

$$a^2 - a - 1 = 0 \quad \text{, som har løsningerne:} \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Man kan vise, at den fuldstændige løsning til differensligningen er: $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$, hvor $f_1(x)$ og $f_2(x)$, svarer til hver af de to $a$-værdier, og $c_1$ og $c_2$ bestemmes ud fra betingelserne:

$$a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \text{og} \quad f(1) = 1$$

$$f(x) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \qquad og \quad f(1) = 1 \Leftrightarrow \quad c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

som løses til at give: $c_2 = -c_1 \ \wedge \ c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Hermed får man et udtryk for det $n$'te Fibonacci-tal:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Som nogen måske allerede har bemærket, er $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ det, som man kalder det gyldne snit.

Man kan vise at: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sæt $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Det følger da, at $c < b$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b^n - c^n} = \frac{b - c\left(\frac{c}{b}\right)^n}{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^n} \to b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad for \ n \to \infty \qquad i\text{det} \ \left(\frac{c}{b}\right)^n \to 0 \quad for \ n \to \infty$$