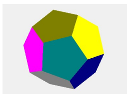
Elementær Matematik

Trigonometriske Funktioner

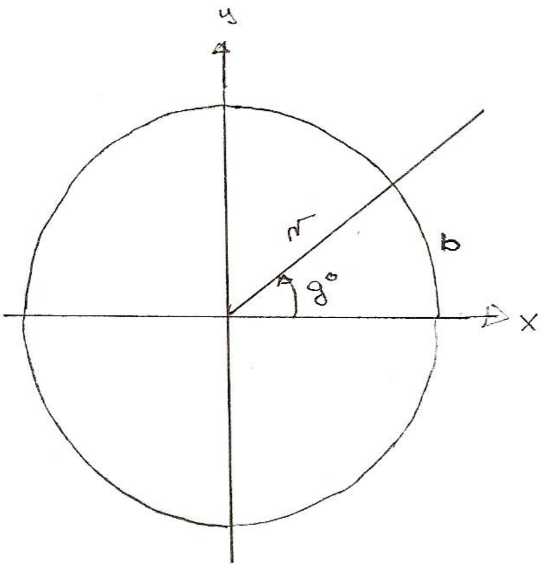


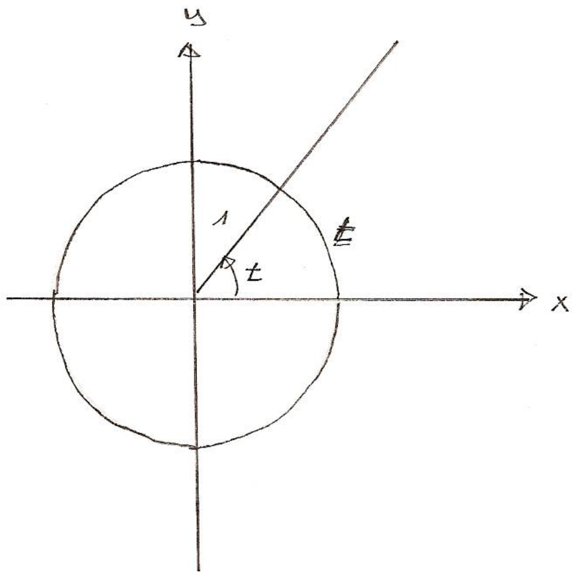
Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. Gradtal og radiantal

Sinus , cosinus og tangens kan betragtes som funktioner af et generaliseret vinkelmål.
Hvis man skal tegne graferne for *sin*(x)*, cos*(x) *og tan*(x), er det imidlertid ikke hensigtsmæssigt at måle vinklerne i grader. Dette hænger sammen med at 1^0 ikke er en *længde*, men netop angiver størrelsen af en vinkel målt på en bue med vilkårlig radius.
Af denne (og mange andre) grunde, indfører man et andet måltal for en vinkel, som kaldes *radian* eller *radiantallet*.





I den første figur har vi tegnet en cirkel med centrum i vinklens toppunkt og vilkårlig radius r. Vinklen afskærer buen b på cirklen.

Ved radiantallet for en vinkel, forstår man buen som vinklen afskærer på en vilkårlig cirkel med centrum i vinklens toppunkt, målt med radius som enhed.

Kaldes radiantallet for t, gælder der således: $t = \dfrac{b}{r}$.

Hvis specielt cirklen er en *enhedscirkel,* som vist på den anden figur, er radius r = 1, så $t = b$*,* og man kan formulere en alternativ definition af radiantallet:

Ved radiantallet for en vinkel, forstår man buen som vinklen afskærer på enhedscirklen.

Radiantallet er en længde, der er uafhængig af hvilken cirkel, man måler den på. Forholdet mellem omkredsen og radius i en cirklen er nemlig konstant lig med 2π og derfor er forholdet mellem buen b (som er en brøkdel af omkredsen) og radius også konstant. Hvis man skal omregne fra grader til radian, bemærker man blot, at omkredsen af en cirkel er $2\pi \cdot r$, som på enhedscirklen bliver til 2π, og dette svarer til 360^0. Vi kan derfor skrive:

$$2\pi \;\; radian \;\; = \;\; 360^0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi \;\; radian \;\; = \;\; 180^0$$ Heraf følger:

$$1 \ radian = \frac{180^0}{\pi} \qquad \text{og} \qquad 1^0 = \frac{\pi}{180} radian$$

$$t \ radian = \frac{180^0}{\pi} t \qquad \text{og} \qquad g^0 = \frac{\pi}{180} g \ \ radian$$

Man omregner således fra grader til radian ved at gange med $\frac{\pi}{180}$ og omvendt.
1 *radian* $\approx 57{,}30^0$ og $1^0 = 0{,}0175$

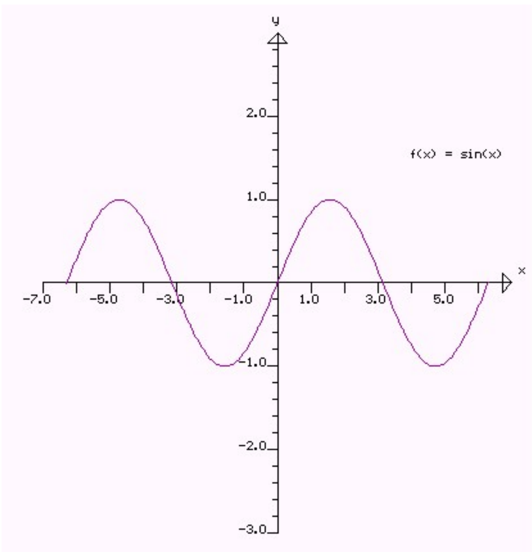
Der er nogle radiantal, som er nyttige at huske, men som også let kan udledes af $\pi = 180^0$:

$$2\pi = 360^0, \quad \pi = 180^0, \quad \frac{\pi}{2} = 90^0, \quad \frac{\pi}{3} = 60^0, \quad \frac{\pi}{6} = 30^0$$

I et koordinatsystem) kan radiantallet uden besvær udvides til at omfatte alle reelle tal.

2. *sin x, cos x og tan x*

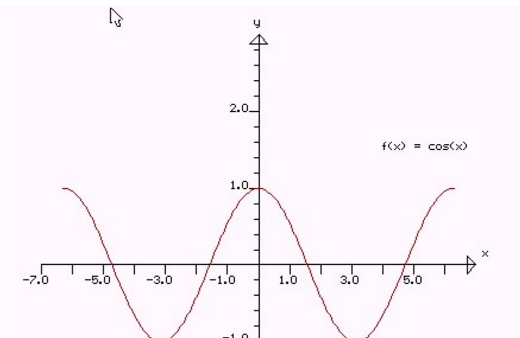
Når man taler om *sin*(*x*)*, cos*(*x*) *og tan*(*x*), som *funktioner*, så er *x* altid radiantallet og ikke gradtallet for en vinkel. Nedenfor er tegnet graferne for de tre funktioner i intervallet fra [-2*π,* 2*π*]



På figuren er grafen for *f*(*x*) = *sin*(*x*).
Sinus har definitionsmængden *R* og værdimængden *Vm*(*sin*) = [-1*,* 1].
Hvis vinklen *x* forøges (eller formindskes) med 360^0 , svarende til 2*π,* så er *sin*(*x*) og *cos*(*x*) uforandrede.
Man siger, at *sin* og *cos* er *periodiske* med perioden 2*π.* Mere præcist formuleret, så gælder der for alle *x*:

sin(*x* + 2*π*) = *sin*(*x*) og *cos*(*x* + 2*π*) = *cos*(*x*)
sin(*x*) skærer 2. aksen i 0, og den skærer 1. aksen i punkterne: 0, π….

$$\sin(x) = 0 \iff x = p \cdot \pi \ ; \ \ p \in Z$$



f(*x*) = *cos x* har ligesom *sin x* definitionsmængden *R*, og værdimængden [-1, 1].

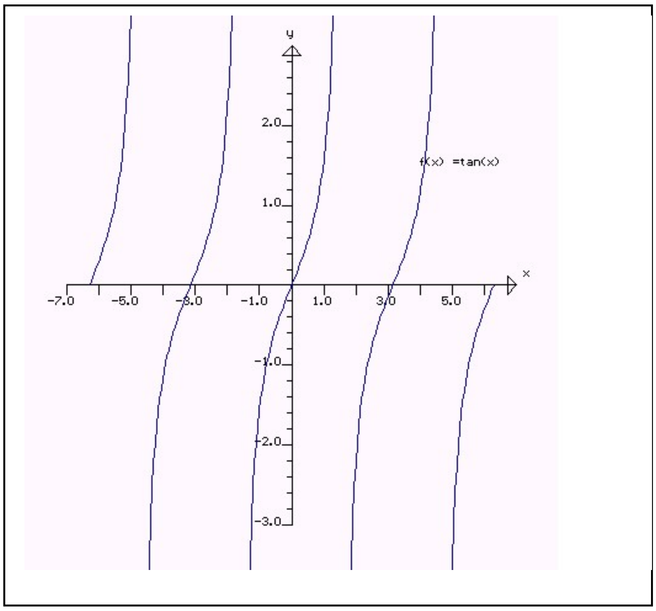
Den er ligesom *sin x* periodisk med perioden 2π. Skæring med akserne:

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \tfrac{\pi}{2} + p\pi;\ \ p \in Z$$

På grund af relationen $\cos(x - \tfrac{\pi}{2}) = \sin x$, ses det, at grafen for *sin x* er den samme som grafen for *cos x,* blot forskudt $\tfrac{\pi}{2}$.



Grafen for

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

adskiller sig en del fra graferne for *sin x* og *cos x*.
tan x er nemlig ikke defineret for nulpunkterne for *cos x*. Dem fandt vi ovenfor, så

$$Dm(\tan):\ x = \tfrac{\pi}{2} + p\pi;\ \ p \in Z$$

tan x er periodisk med perioden π. Dette følger af:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Værdimængden for *tan x* er *R*

3. Trigonometriske ligninger

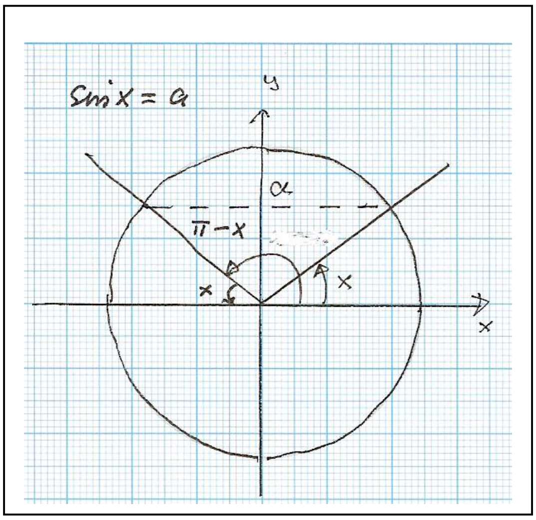
En trigonometrisk ligning er en ligning, der indeholder *sin x, cos x* eller *tan x.*

Vi skal først løse de 3 trigonometriske grundligninger:

$$\sin x = a\ ;\ \ a \in [-1{,}1] \qquad \cos x = a\ ;\ \ a \in [-1{,}1] \qquad \tan x = a; \quad a \in R$$

At løse en ligning betyder, at undersøge, hvorvidt den har løsninger, og i givet fald finde dem alle sammen. Ligningerne kan derfor i almindelighed ikke løses blot ved brug af en lommeregner. Enten må man lære løsningsformlerne udenad eller også må man tegne løsningerne ind på en enhedscirkel og aflæse samtlige løsninger grafisk.

Nedenfor løser vi de 3 ligninger med et taleksempel, men metoden er helt generel.



Vi ser først på ligningen

$$sin\ x = 0{,}62$$

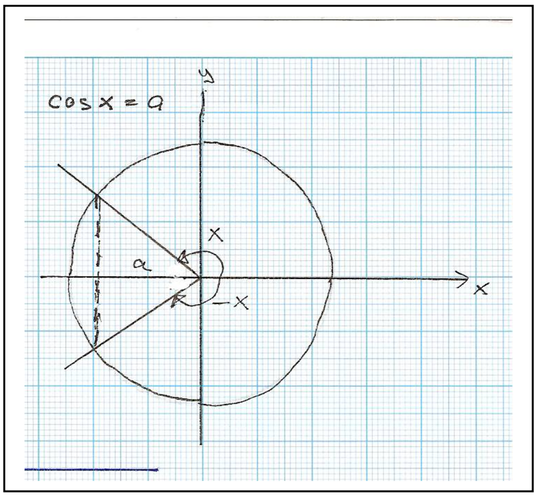
Vi finder en løsning (i radian) på lommeregneren x_0 =0,6687. Vi afsætter da 0,62 på 2. aksen i et koordinatsystem forsynet med en enhedscirkel.
Der er to retningspunkter på enhedscirklen, som har denne sinus.
Man genkender løsningen 0,6687, ($\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$), men det ses, at ligningen også har løsningen $x_1 = \pi - 0{,}6687$

Vi finder derfor samtlige løsninger ved at addere et multiplum af 2π til de to løsninger.

$$x = 0{,}6687 + p2\pi \quad \vee \quad x = \pi - 0{,}6687 + p2\pi \;\; ; \;\; p \in Z$$

Mere generelt, så finder man samtlige løsninger til ligningen *sin x = a*, som

$$x = x_0 + p2\pi \quad \vee \quad x = \pi - x_0 + p2\pi$$, hvor x_0 er en vilkårlig løsning.



På næsten samme måde, vil vi løse ligningen

$$cos\ x = -0{,}75$$

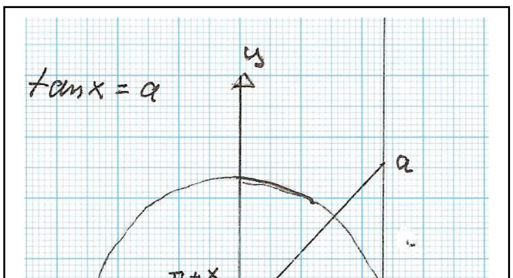
-0,75 afsættes på *x*-aksen, (hvor man aflæser cosinus) og man finder to retningspunkter på enhedscirklen, som har denne cosinus.
Ved opslag finder man: $x_0 = 2{,}419$. man ser, at det svarer til *x* på figuren.

Det andet retningspunkt, svarer til $-x_0$ = -2,419.
Man kan da bestemme samtlige løsninger ved at addere et multiplum af 2π til de to løsninger.

$$cos\ x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2{,}419 + p2\pi \;\; ; p \in Z$$

Mere generelt

$$cos\ x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm x_0 + p2\pi \;\; ; \;\; p \in Z$$, og x_0 er en vilkårlig løsning.



Løs ligningen:

$$tan\ x = 1,2$$

Man afsætter a =1,2 på tangenten i enhedspunktet, (der, hvor man måler tangens)
Ved at tegne en linien gennem begyndelsespunktet, finder man to retningspunkter, som har $tan\ x$ =1,2.
Ved opslag findes $x_0 = 0,8761$.

For at bestemme samtlige løsninger, skal man blot addere et helt multiplum af π, da tangens er periodisk med perioden π.

$$x = 0,8661 + p\pi\ ;\ \ p \in Z$$

Mere generelt:

$$tan\ x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 + p\pi\ ;\ \ p \in Z$$

Eksempel
Nogle ligninger kan omformes til trigonometriske grundligninger. Vi ser på ligningen:

$$6\ sin^2 x + sin\ x - 1 = 0 \quad x \in [0,2\pi]$$

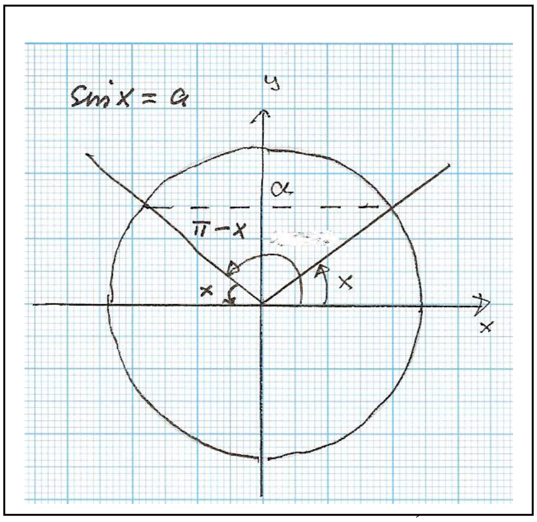
Det er en 2.gradsligning i *sin x*, og vi bestemmer diskriminanten: d = 1 + 24 = 25. Løsningerne er da:

$$\sin x = \frac{-1 \pm 5}{12} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = \frac{1}{3}$$

Ved opslag finder man de to løsninger: x = $\frac{7}{6}\pi$ og $x = 0,3398$. De øvrige løsninger i intervallet $x \in [0,2\pi]$, findes da som $\pi - \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ og x= π – 0,3398 =2,8018.

Ligningen har derfor løsningerne: x = $x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi \vee x = 0,3398 \vee x = 2,8018$

4. Trigonometriske uligheder



Trigonometriske uligheder, kan godt være lidt problematiske, af den grund, at de trigonometriske funktioner er periodiske og sinus og cosinus ikke er monotone i et periodeinterval.
Som det gælder for ligningerne, kan de ikke løses uden en tegning, hvor man grafisk aflæser løsningerne og dette gælder endnu mere udtalt for uligheder.
Vi vælger at anvende de samme taleksempler som ovenfor, blot nu som uligheder. Løs uligheden:

$$sin\ x < \ 0,62\ , \qquad x \in [0,2\pi]$$

For at løse uligheden, løser vi først ligningen $sin\ x$ =

Vi finder som før en løsning (i radian) på x_0 =0,6687.lommeregneren
Vi afsætter da 0,62 på 2. aksen (der hvor man aflæser sinus) i et koordinatsystem forsynet med en enhedscirkel.
Der er to retningspunkter på enhedscirklen, som har denne sinus. Man genkender løsningen 0,6687, men det ses som før af tegningen, at ligningen også har løsningen $x_1 = \pi - 0{,}6687 = 2{,}47$.

Af *tegningen* (og kun af tegningen) kan ses, at i intervallet $x \in [0,2\pi]$, er sin x <0,62, når

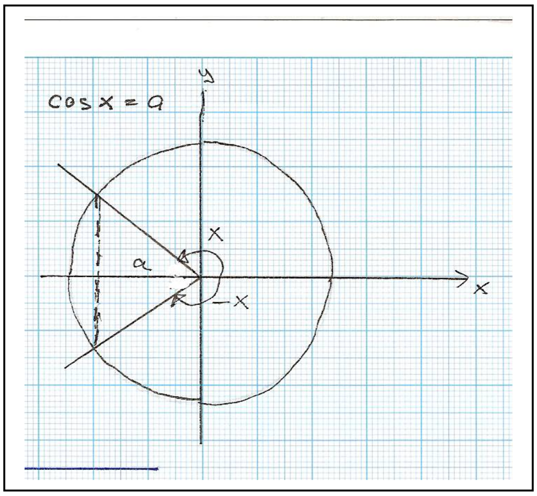
$$0 < x < 0{,}6687 \;\vee\; 2{,}47 < x < 2\pi$$

Hvis man ønsker samtlige løsninger, skal man blot addere et helt multiplum af 2π

$$p2\pi < x < 0{,}6687 + p2\pi \vee\; 2{,}47 + p2\pi < x < 2\pi + p2\pi$$

Som kan sammenfattes til: $2{,}47 + (p-1)2\pi < x < 0{,}6687 + p2\pi$

.



På næsten samme måde, vil vi løse uligheden

$$\cos x > -0{,}75 \quad , \; x \in [0,2\pi]$$

-0,75 afsættes på *x*-aksen, og man finder to retningspunkter på enhedscirklen, som har denne cosinus.
Ved opslag finder man: $x_0 = 2{,}419$. man ser, at det svarer til *x* på figuren.
Det andet retningspunkt, svarer til $-x_0$ = -2,419 som har retningsvinklen 2π - 2,419 =3,864 i intervallet $[0,2\pi]$.

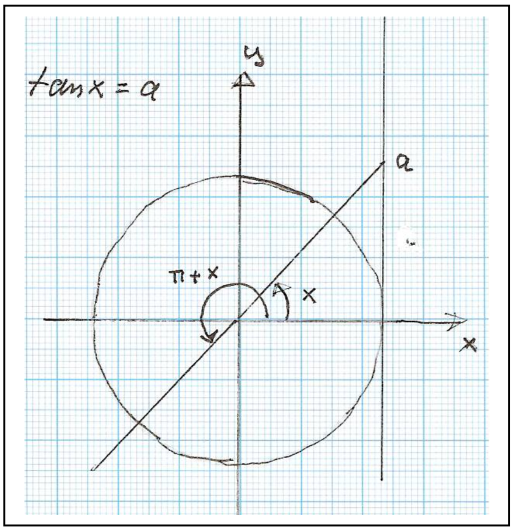
Af *tegningen*, kan nu ses, at *cos x* > -0,75, i intervallet $[0,2\pi]$, hvis

$$3{,}864 < x < 2\pi \;\vee\; 0 \le x < 2{,}419$$

Hvis man ønsker samtlige løsninger, skal man blot addere et helt multiplum af 2π

$$3{,}864 + p2\pi < x < 2\pi + p2\pi \;\vee\; p2\pi \le x < 2{,}419 + p2\pi$$

Som kan sammenfattes til: $3{,}864 + p2\pi < x < 2{,}419 + (p+1)2\pi$



Løs uligheden

$$tan\ x < 1{,}2 \quad , \quad x \in [0{,}2\pi]$$

Som i de tidligere eksempler, løser vi først ligningen *tan x* = 1,2

Man afsætter *a* =1,2 på tangenten i enhedspunktet.

Ved at tegne en linien gennem begyndelsespunktet, finder man to retningspunkter, som har *tan x* =1,2.

Ved opslag findes $x_0 = 0{,}8761$. a tangens er periodisk med perioden π, finder man den anden løsning x = π+0,8661 i intervallet $[0{,}2\pi]$.Af *tegningen* kan nu ses, at i intervallet $[0{,}2\pi]$ er *tan x* < 1,2, når

$$0 \le x < 0{,}8761 \ \vee\ \tfrac{\pi}{2} < x < \pi + 0{,}8661$$

For at bestemme samtlige løsninger, skal man blot addere et helt multiplum af π,

$$p\pi \le x < 0{,}8761 + p\pi \ \vee\ \tfrac{\pi}{2} + p\pi < x < \pi + 0{,}8661 + p\pi$$

Eksempel

Trigonometriske andengradsuligheder. Vi ser på uligheden:

$$6\ sin^2 x + sin\ x - 1 < 0 \quad x \in [0{,}2\pi]$$

Hvis vi sæter $z = sin\ x$, skal vi i første omgang, bestemme hvornår andengradspolynomiet: $6z^2 + z - 1 < 0$.

Ligningen $6z^2 + z - 1 = 0$, har rødderne $z - \frac{1}{2} \ \vee\ z = \frac{1}{3}$.

Vi ved at dette 2.gradspolynomium er negativt mellem rødderne, så løsningen til uligheden er: $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{3}$

Vi har reduceret problemet til en dobbeltulighed i sin x

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ \sin x > -\frac{1}{2} \ \wedge\ \sin x < \frac{1}{3}$$

Disse to uligheder løses for $x \in [0{,}2\pi]$ på samme måde som ovenfor.

$$\left(\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi \ \vee\ 0 < x < \frac{7}{6}\pi\right) \ \wedge\ \left(0 < x < 0{,}3398 \ \vee\ \pi - 0{,}3398 < x < 2\pi\right)$$

Som kan sammenfattes til: $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi \ \vee\ 0 < x < 0{,}3398$

5. Harmoniske funktioner

Ud fra *cosinus* og *sinus*, kan man danne nogle nye funktioner, f.eks. 3 *cos x* eller -5 *sin x*.
I almindelighed

$$f(x) = A\cos x\ ,$$

hvor *A* er et vilkårligt reelt tal forskellig fra 0.

Da cosinus varierer mellem -1 og 1, og alle funktionsværdier bliver multipliceret med A, vil

$f(x) = A\cos x$, variere mellem $-A$ og A.

Man kunne også betragte funktioner som $f(x) = \cos(2x)$ eller $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$. Mere generelt

$f(x) = \cos(kx)$ eller $f(x) = \sin(kx)$

$\cos(kx)$ og $\sin(kx)$ er også periodiske, men de har en anden periode. Hvad den er, kan findes ud fra følgende betingelse, idet sinus og cosinus er uforandret, når argumentet kx er blevet forøget med 2π.
Vi betegner perioden med T.

$$k(x + T) = kx + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad kT = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \text{Perioden } T = \frac{2\pi}{k}$$

$\sin(2x)$ har derfor perioden π, og $\sin(\frac{1}{2}x)$ har perioden 4π.

Man kan også se på en parallelforskydning af sinus eller cosinus:

$f(x) = \cos(x+2)$ eller $f(x) = \sin(x-3)$

Den første er en parallelforskydning af $\cos(x)$ på – 2 langs x-aksen, og den anden er en parallelforskydning af $\sin(x)$ på +3 langs med x-aksen.

Endelig kunne man kombinere alle tre ting, og skrive en generel trigonometrisk funktion som:

$$f(x) = A\cos(kx + \varphi)$$

I fysikken kalder man A for *amplituden*, k for *vinkelhastigheden* (skrives oftest som ω i stedet for k), $kx + \varphi$ kaldes for *fasen,* og φ kaldes for *begyndelsesfasen*.
I fysikken repræsenterer funktionen ovenfor en *svingning*, og x betegner da tiden t.
Funktionen skrives da.

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Perioden T i svingningen er givet ved $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Alle funktioner, der kan udtrykke på den ovenfor beskrevne måde, har form som en sinus eller cosinus funktion. De kaldes for *harmoniske funktioner.*

Vi behøver kun at opskrive udtrykket for cosinus, idet $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, så en lignende sinus funktion, kan altid omskrives til en cosinus, ved at tilføje en fase på $-\pi/2$.

Man kunne også lave en funktion som en *linearkombination* af $\cos(kx)$ og $\sin(kx)$.

$$f(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)$$

hvor *a* ,*b* og *k* er vilkårlige reelle tal. Det viser sig imidlertid, at disse funktioner altid kan omskrives til en svingning givet ved: $f(x) = A\cos(kx+\varphi)$

Hvis *a* og *b* opfattes som et koordinat par (*a,b*), er det er nemlig altid muligt, at bestemme et tal *A* og en vinkel φ, således, at

$$a = A\cos\varphi \quad \text{og} \quad b = A\sin\varphi$$

Man finder umiddelbart at: $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Hvis man kvadrerer ligninger og lægger dem sammen finder man endvidere:

$$a^2+b^2 = A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = A^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = A^2 \;\Rightarrow A = \sqrt{a^2+b^2}$$

$f(x)$ kan derfor skrives

$$f(x) = A\cos\varphi\cos(kx) + A\sin\varphi\sin(kx) = A(\cos\varphi\cos(kx)+\sin\varphi\sin(kx))$$

I vektorregningen, vil vi udlede de såkaldte additionsformler. En af dem lyder:

$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$$

Anvender vi denne additionsformel, kan udtrykket for $f(x)$ omskrives til

$$f(x) = A(\cos\varphi\cos(kx)+\sin\varphi\sin(kx)) = A\cos(kx-\varphi)$$

For at opnå præcis det samme udtryk som tidligere, kan vi blot erstatte φ med – φ i udtrykket ovenfor.

Nedenfor er tegnet graferne for

$f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \sin\tfrac{1}{2}x$, $h(x) = -2\cos(2x)+3\sin(2x)$, $i(x) = 4\cos(\tfrac{1}{3}x+2)$.