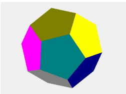
Elementær Matematik

Tal og Algebra



Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. De naturlige tal

Tælle-tallene 1, 2, 3, ….har været kendt af alle kulturer. De kaldes i matematikken for de *naturlige tal*, og betegnes med *N*. Vi skriver tallene ved hjælp af 10 symboler "0", "1" , "2", "3",…"9" . Symbolerne for tal, har naturligvis ikke været de samme i alle kulturer. Andre kulturer har anvendt andre symboler, f.eks. *romertallene* I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII og X, og der har også været et andet *antal* symboler i talsystemerne, f.eks. tolv, tyve eller tres.

Det talsystem, vi anvender kaldes for 10-talssystemet, fordi der er 10 symboler.
Det er et *positionssystem*, fordi positionen af et ciffer i en række af cifre, er afgørende for betydningen af dette ciffer.
Tag for eksempel tallet 4376. Betydningen af disse cifre i denne rækkefølge er helt præcist:

$$4376 = 4\cdot 1000 + 3\cdot 100 + 7\cdot 10+ 6\cdot 1.$$

Ombytter man to cifre, bliver tallet et andet. Det er dette man udtrykker ved at kalde det et positionssystem.
Hvis man matematisk skal forklare, hvad ”tallet tre” er, så er det ikke nok at skrive tegnet "3", fordi det er blot ét blandt mange symboler for begrebet "tallet tre". For at forklare begrebet, er det faktisk nødvendigt at forklare, hvorledes man bærer sig ad med at tælle.

I matematikken formuleres det at tælle ved en række *aksiomer* (definitioner og påstande, som man ikke kan føre bevis for), som kaldes *Peanos* aksiomer. Ud fra disse aksiomer, kan man udlede alle egenskaberne for de naturlige tal. Mest bemærkelsesværdigt, at det første tal er 1, at ethvert tal har netop én efterfølger, og at der ikke findes noget største element.

Når man regner med tal - eller symboler for tal - i matematikken, skriver man tallene i rækkefølge (fra venstre mod højre), adskilt af tegnene "+" (plus), "-" minus, "·" (gange) og "/" (division). Oftest, skriver man dog divisionsstregen som en vandret streg med en tæller og en nævner.

At lægge to tal sammen kaldes for *addition*.
At trække et tal fra et andet kaldes for *subtraktion*.
At gange to tal med hinanden kaldes for *multiplikation*.
At dividere et tal med et andet kaldes for division.

Tal som er adskilt af '+' eller '–' kaldes for *led*. Tal som er adskilt af '·' eller '/' kaldes for *faktorer*. Ser vi f.eks. på udtrykket:

$$7+11-3\cdot 2+\frac{12}{4}-\frac{6\cdot 5}{10}=12$$

Så har venstresiden af lighedstegnet 5 led. Det tredje og fjerde led består hver af to faktorer. Det femte led består af tre faktorer.
For multiplikation og division med naturlige tal, findes der en multiplikations- og divisionsalgoritme, som burde være velkendte.
Ved en algoritme forstår man en endelig række veldefinerede række skridt, som man skal udføre for at nå til resultatet. Det er ikke noget krav, at man forstår, hvorfor det fører til det ønskede resultat.

Vi viser et par eksempler på de to algoritmer nedenfor. Opstillingen kan godt variere lidt, men jeg har valgt den mest udbredte.

Multiplikationsalgoritmen

$$\begin{array}{r} \underline{739 \cdot 43} \\ 2217 \\ \underline{29560} \\ 31777 \end{array}$$

Divisionsalgoritmen

$$\begin{array}{l} \underline{43|}\ \ 7395\ \underline{|\ 171\ (\ = \text{kvotient})} \\ \quad\ \ \ \underline{43} \\ \quad\ \ \ 309 \\ \quad\ \ \ \underline{301} \\ \quad\quad\ \ 85 \\ \quad\quad\ \ \underline{43} \\ \quad\quad\ \ 42\ \ (= \text{rest}) \end{array}$$

Det er ikke så vanskeligt, at forstå multiplikationsalgoritmen, mens divisionsalgoritmen er betydelig vanskeligere at forklare, så det vil vi ikke forsøge, (før man har lært om polynomiers division). Resultatet af divisionen udtrykkes i *divisionsligningen*, (som man kan kontrollere rigtigheden af).

$$7395 = 171 \cdot 43 + 42$$

2. Regneregler for naturlige tal

I matematikken formulerer man ofte sætninger, der gælder for alle tal i en afgrænset mængde. For at skrive sådanne tal, anvender man latinske eller græske *bogstaver* til at repræsentere "hvilket som helst tal". F.eks. kan divisionsligningen ovenfor skrives mere generelt, hvor (dividend) p og (divisor) d er naturlige tal, mens (kvotient) q og (rest), r er naturlige tal eller nul.

$$p = q \cdot d + r \qquad (dividend = kvotient \cdot divisor + rest)$$

f.eks. $17 = 3 \cdot 5 + 2$

For de naturlige tal, gælder nogle velkendte regneregler (som ikke kan bevises). For alle naturlige tal *a, b, c* gælder der, således:

Den kommutative lov for addition:

$$a + b = b + a$$

f.eks. $3 + 7 = 7 + 3$

Den associative lov for addition:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

f.eks. $3 + (6 + 9) = (3 + 6\ ) + 9$

Den kommutative og associative lov for addition udtrykker, at addendernes orden og rækkefølge er underordnet.

Den kommutative lov for multiplikation:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

f.eks. $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$

Den associative lov for multiplikation:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

f.eks. $3 \cdot (6 \cdot 9) = (3 \cdot 6) \cdot 9$

Den kommutative og associative lov for multiplikation udtrykker, at faktorernes orden og rækkefølge er underordnet.

Den distributive lov:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

f.eks. $3 \cdot (4 + 7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \quad (= 33)$

Af den associative lov følger at man kan hæve (dvs. fjerne) en plus parentes. Hvis man derimod hæver en minus parentes, skal man skifte fortegn for hvert led i parentesen.

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

f.eks. $3 - (2 + 4 - 7) = 3 - 2 - 4 + 7 \; (= 4)$

Man anvender parenteser til at markere, at flere led skal opfattes som et enkelt led eller en enkelt faktor. Man sætter således aldrig parenteser omkring et enkelt led eller en enkelt faktor (med mindre, der står et minustegn foran tallet). Man sætter aldrig en plusparentes. Ikke fordi nogen af delene er forkerte, men fordi det er overflødigt og det mindsker overskueligheden af regningerne.

Den distributive lov viser, hvorledes man ganger en flerleddet størrelse med et tal. Af reglen følger, hvorledes man ganger to parenteser med hinanden.
Under hensyntagen til fortegnet for de to led, ganger man hvert led i den ene parentes med hvert led i den anden parentes

2.1 Eksempel

$$(a - b) \cdot (c + d - e) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d + b \cdot e$$

2.1 Kvadratsætningerne.

Når man taler om kvadratet på et tal, er det det samme som tallet ganget med sig selv (i 2. potens)
Når kvadratsætningerne er meget vigtige at kunne - uden at foretage mellemregningerne – er det fordi de meget ofte anvendes i reduktioner og til løsning af opgaver.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Kvadratet på en toleddet størrelse, er lig med kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus eller minus det dobbelte produkt.

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

To tals sum gange to tals differens er lig med kvadratet på første led minus kvadratet på andet led.

Eksempler
Når det er vigtigt at huske kvadratsætningerne, så er det fordi man også skal kunne anvende dem, når tallene ikke hedder a og b.

$(5 - 3)^2\ (= 4) = 25 + 9 - 2·5·3 = 34 – 30 = 4$

$(7 - 2)\ (7 + 2)\ (=5·9 = 45) = 49 – 4 = 45$

$(2x\text{-}3y)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 – 12xy = 4x^2 + 9y^2 -12xy$

$9a^2 – 25b^2 = (3a + 5b)(3a – 5b)$

2.2 Regningsarternes hierarki

Man udregner et udtryk fra venstre mod højre i den rækkefølge leddene eller faktorerne optræder efter følgende regler:

1. *Potensopløftning og roduddragning udføres før multiplikation og division.*
2. *Multiplikation og division udføres før addition og division.*

Eksempel.
Udregningen af nedenstående udtryk sker som følger:

$7- 2·4 + 3·2^3 - 5·4^2·7 = 7 – 8 + 3·8 - 5·16·7 =-1 + 24 - 560 = 25 – 560 = 535$

3. Primtal

Et primtal er et naturligt tal større end 1*, som kun har tallet* 1 *og sig selv som divisor.*

Det første 10 primtal er velkendte: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 og 29.
Der findes ingen formel for primtallene, men det er let at bevise, at der findes uendelig mange primtal.

Lad os nemlig antage, at vi har fundet n primtal: $p_1, p_2, p_2, \ldots p_n$. Vi vil vise, at der må findes et primtal større end p_n. Tallet: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ har primtalsdivisorerne $p_1, p_2, p_2, \ldots p_n$ og ingen andre.

Tallet $p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n{+}1$ har imidlertid resten 1 ved division med enhver af $p_1, p_2, p_2, \ldots p_n$, så derfor er tallet enten et primtal, eller der må findes et primtal større end p_n, som går op i tallet.

Når man skal forkorte en brøk, gøres det i almindelighed ved at opløse tallet i dens primfaktorer.
For eksempel:

$628 = 2·314 = 2·2·157$ (157 er et primtal).

$3767 = 2·3^2·7·13·23.$

Det findes ikke nogen analytisk metode til at bestemme primtalsopløsningen for et tal. Man bliver nødt til at forsøge sig frem med rækken af primtal. Hvis man skal finde primtalsopløsningen af et tal *p*, behøver man dog kun at forsøge med primtal, som er mindre (eller lig med) $\sqrt{p}$.
Dette kan indses på følgende måde:
Hvis *p* kan skrives som $a{\cdot}b$, og altså ikke er et primtal, så vil der gælde $p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = a \cdot b$.
Af denne ligning kan ses, at de to faktorer *a* og *b* ikke *begge* kan være større end $\sqrt{p}$, så den ene må være mindre end $\sqrt{p}$. Følgelig behøver man kun at forsøge sig med primtal mindre end $\sqrt{p}$.

Skal vi forsøge at faktorisere 1147, så er $\sqrt{1147} = 33{,}9$, så vi behøver kun at forsøge med primtal op til 31. Det viser sig, at $1147 = 31{\cdot}37$

4. Nul og de negative hele tal

Vi vil nu illustrere, hvorledes man i *matematikken* foretager en udvidelse af talbegrebet til også at omfatte tallet nul og de negative hele tal.
Når man udvider talbegrebet, *vil man stille den betingelse, at regnereglerne for de naturlige tal også skal gælde for tallene efter udvidelsen*.
Dette har så nogle konsekvenser, som vi skal se nærmere på.

Vi indfører først nul, som et "*neutral element*" ved addition. Neutralt betyder, at for alle naturlige tal *a*, skal der gælde:

$$a + 0 = a \quad og \quad 0 + a = a$$

Hvis regnereglerne skal være opfyldt, kan vi *heraf* slutte at $a{\cdot}0 = 0{\cdot}a = 0$ for alle naturlige tal og 0.

Bevis

$$a{\cdot}b = a{\cdot}(b+0) = a{\cdot}b + a{\cdot}0$$

hvoraf sluttes at $a{\cdot}0 = 0$

De negative tal indføres som *modsatte tal* til et naturligt tal ved definitionen:

$$b \text{ er det modsatte tal til } a \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 0$$

(Vi har her anvendt symbolet "$\Leftrightarrow$" , som læses "hvis og kun hvis" eller "ensbetydende med".

Det modsatte tal til *a* betegnes – *a* og læses: "minus *a*". Heraf følger så:

$$a + b = 0 \;\Leftrightarrow\; b = -a \quad \text{og} \quad b + a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -b = -(-a)$$

Det modsatte tal til det modsatte tal er altså tallet selv (fordi addition er kommutativ).

Vi viser nu, at det følger af regnereglerne, at $a{\cdot}(-b) = -ab$ *og* $a + (-b) = a - b$ (subtraktion af *b* fra *a*)

Bevis

$$0 = a{\cdot}0 = a{\cdot}(b + (-b)) = a{\cdot}b + a{\cdot}(-b) \quad \text{og samtidig} \quad 0 = a{\cdot}0 = a{\cdot}(b - b) = ab - ab$$

Dette viser at $a\cdot(-b)$ er det modsatte tal til ab og er derfor lig med $-ab$.
Samtidig ses det, at $a + (-b) = a - b$. Begge tal er nemlig det modsatte tal til $b - a$.
Endvidere så vi tidligere $-(-a) = a$.

Oven for har vi vist, at "*minus*" gange "*plus*" giver "*minus*", nu vil vi vise, at "*minus*" gange "*minus*" giver "*plus*".

Bevis

$$0 = -a\cdot(b + (-b)) = -a\cdot b + (-a)\cdot(-b)$$

Ligningen viser, at $(-a)\cdot(-b)$ er det modsatte tal til $-a\cdot b$ og følgelig er lig med ab, så

$$(-a)\cdot(-b) = ab.$$

Eller "*minus*" gange "*minus*" giver "*plus*"

5. Brøker og rationale tal

Når man i matematikken udvider talbegrebet til også at omfatte brøker, så er det en betingelse, at de grundlæggende regneregler stadig gælder. Vi vil først indføre de såkaldte stambrøker.

Hvis man f.eks. deler et liniestykke af længden 1 (eller en lagkage) i 7 lige store stykker, så siger man at længden (størrelsen) af ethvert af stykkerne er $\frac{1}{7}$, som læses "en syvendedel".

$\frac{1}{7}$ er derfor et symbol for ét (eksakt) tal, og det skrives altid med en vandret brøkstreg – og i almindelighed ikke som 1/7 eller 1:7. (1/7 betyder også den 1. juli, og 1:7 er et symbol for en division)

Tre af stykkerne har længden $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7} = 3\cdot\frac{1}{7}$ *som skrives* $\frac{3}{7}$. Altså $3\cdot\frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

På samme måde adderer man to brøker med samme nævner:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=5\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

For hele positive tal *p* og *q* indfører man i matematikken brøken: $\frac{p}{q}$, , som det (nye) **tal som multipliceret med *q* giver *p*.**

$$\frac{p}{q}\cdot q = p$$

p kaldes for brøkens tæller (top) og q kaldes for nævner (ned).

For eksempel defineres tallet $\frac{4}{13}$ ved: $\frac{4}{13}\cdot 13 = 4$. Specielt gælder $\frac{p}{1} = p$ *og* $\frac{p}{p} = 1$

Denne definition giver også forklaringen på "**hvorfor man ikke kan dividere med nul**".
Hvis nemlig $\frac{4}{0}$ var et *tal*, så skulle det være "det tal som ganget med 0 giver 4".

Da alle tal ganget med 0 giver nul, kan $\frac{4}{0}$ ikke være noget tal. Dette plejer man at formulere på den måde:

Man kan ikke dividere med nul.

Det modsatte tal til en brøk $\frac{p}{q}$, hvor p og q er hele positive tal skrives $-\frac{p}{q}$, og i almindelighed ikke som $\frac{-p}{q}$ eller $\frac{p}{-q}$. Dette fordi symbolet $\frac{p}{q}$ står for ét tal, som ikke kan skilles ad.

5.1 Regneregler for brøker

Regnereglerne for brøker er vigtige for alle grene af matematikken og er derfor nødvendige at lære og kunne.

Man adderer (*eller subtraherer*) *to brøker med samme nævner ved at addere* (*subtrahere*) *tællerne og lade nævneren uforandret*

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$$

f.eks: $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}=\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\frac{17}{12}+\frac{13}{12}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$

En brøk, som er større end 1, skriver man ind imellem som et "blandet tal".

$\frac{5}{2}$ er jo lig med $2+\frac{1}{2}$, som man kort skriver som $2\,\frac{1}{2}$.

I matematik anvender man dog kun – og kun – denne skrivemåde til at få et overblik over resultatet – og aldrig i regninger!
Dette af to grunde. For det første kan $2\,\frac{1}{2}$ forveksles med $2\cdot\frac{1}{2}$, og for det andet, kan man ikke direkte anvende regneregler for brøker på blandede tal.

Man kan gange eller dividere med det samme hele positive tal i tæller og næver.

Når man ganger med det samme tal i tæller og nævner, kaldes at *forlænge*, og når man dividerer med det samme tal, kaldes det at *forkorte*.

Eksempler:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{10}{15} \quad \text{og} \quad \frac{27}{63}=\frac{3\cdot9}{7\cdot9}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{ab}{3a+ac} = \frac{ab}{a(3+c)} = \frac{b}{3+c}$$

$$\frac{4a^2-25b^2}{(2a+5b)^2} = \frac{(2a-5b)(2a+5b)}{(2a+5b)^2} = \frac{(2a-5b)}{(2a+5b)} = \frac{2a-5b}{2a+5b}$$

Når en brøk ikke kan forkortes, dvs. at tæller og nævner ikke har fælles primfaktorer, så kaldes brøken uforkortelig. Det er god skik altid at aflevere et resultat som en uforkortelig brøk.

Man ganger et tal med en brøk ved at gange i tælleren og lade nævneren uforandret

Eksempler:

$$3\cdot\frac{7}{12} = \frac{21}{12} \quad , \quad 7\cdot\frac{5}{7} = \frac{35}{7} = 5 \quad , \quad c\cdot\frac{a+b}{d} = \frac{c(a+b)}{d} = \frac{ac+bc}{d}$$

Man dividerer en brøk med et tal ved at gange med tallet i nævneren og lade tælleren uforandret.

Eksempler

$$\frac{\frac{7}{12}}{3} = \frac{7}{3\cdot 12} = \frac{7}{36} \quad , \quad \frac{\frac{14}{5}}{7} = \frac{14}{5\cdot 7} = \frac{2}{5} \quad , \quad \frac{\frac{ab}{c}}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Bemærk, at det er vigtigt, at vide, hvad der er "den store brøkstreg". $\dfrac{\frac{7}{12}}{3}$ kan (skrevet på denne måde) opfattes som $\frac{7}{12}$ divideret med 3 eller som 7 divideret med $\frac{12}{3}(=4)$. Idet $\frac{7}{36} \neq \frac{7}{4}$ er det vigtigt, at skelne mellem brøk divideret med tal eller tal divideret med brøk!

Hvis man skal addere to brøker, som ikke har samme nævner, skal man forlænge hver af brøkerne, for at skaffe samme nævner (en fællesnævner) før de kan adderes.

Eksempler

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5} = \frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{10}{35}+\frac{21}{35} = \frac{31}{35}$$

Man kan altid finde en fællesnævner ved at tage produktet af de enkelte brøkers nævnere -(også hvis der er mere end to led), men dette er langtfra nødvendigt i mange tilfælde. Kan man blot bestemme et tal som alle nævnere går op i, kan dette anvendes som fællesnævner. Det mindste tal som de 3 nævnere går op i kaldes de mindste fælles mål.

Eksempel $\frac{2}{12}-\frac{7}{9}+\frac{3}{4}$

Det ses ”umiddelbart”, at 36 kan anvendes som fællesnævner, og at 36 er mindste fælles mål for 12, 9 og 4.

$$\frac{2}{12}-\frac{7}{9}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{12\cdot 3}-\frac{7\cdot 4}{9\cdot 4}+\frac{3\cdot 9}{4\cdot 9}=\frac{6-28+27}{36}=\frac{5}{36}$$

Man multiplicerer to brøker med hinanden, ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

Eksempel

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{28} \quad , \quad \frac{3}{8}\cdot\frac{14}{9}=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{12} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

I det midterste eksempel, har vi forkortet med 3 og 2, før vi ganger de to brøker sammen. Dette er altid en fordel, da tallene bliver mindre og dermed mere overskuelige.

Man dividerer et tal (*eller brøk*) *med en brøk ved at gange tallet* (*eller brøken*) *med den omvendte brøk.*

Ved den omvendte brøk, forstår man den brøk, hvor tæller og nævner er byttet om. Ganger man en brøk med dens omvendte brøk, får man 1 (én).

Eksempler

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}(=\frac{35}{35})=1 \qquad \frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}(=\frac{pq}{pq})=1$$

$$\frac{5}{\frac{3}{7}}=5\cdot\frac{7}{3}=\frac{35}{7} \quad , \quad \frac{\frac{5}{11}}{\frac{2}{7}}=\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{2}=\frac{35}{22} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Reglen om, ”at gange med den omvendte” er knap så indlysende som de øvrige regneregler, men den kan let bevises, hvis man anvender de øvrige regneregler for brøker.

Bevis

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad \frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}=\frac{\frac{ad}{c}}{1}=\frac{ad}{c}$$

Vi har ganget med den omvendte af nævnerbrøken i tæller og nævner, og herved fås regnereglen for division med en brøk.

Hele tal og brøker kaldes tilsammen for *rationale* tal. De betegnes med bogstavet ***Q*.**

5.2 Decimalbrøker

Decimalbrøker anvendes sjældent i matematik, af den grund at de ofte er tilnærmede tal og ikke eksakte tal. De anvendes derimod altid i de empiriske videnskaber (hvor man foretager målinger), af den grund at man ikke kan måle et eksakt tal. Der er altid en usikkerhed på en måling.

Opskriver vi en decimalbrøk, som f.eks. 234,567, så betyder det som bekendt 2 hundrede, 3 -10'ere, 4 - 1'ere, 5- tiendedele, 6 - hundrededele og 7 - tusindedele. Dette har man en praktisk skrivemåde for i matematik.
Vi minder om potenssymbolet: $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ osv. Vi indfører nu en skrivemåde, som også anvendes i fysik og kemi, og som vil blive begrundet senere.

$$10^0 = 1 \qquad \frac{1}{10} = 10^{-1} \qquad \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \qquad \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \qquad \text{osv.}$$

På denne måde kan vi præcis udtrykke, hvad tallet 34,567 betyder.

$$234{,}567 = 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3}$$

Man kan omskrive en brøk til en decimalbrøk ved hjælp af divisionsalgoritmen.

Vi ser f.eks. på 13:7, og opskiver divisionsalgoritmen.

```
7| 13 | 1,857142 857142 875142…
   7
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      10
       7
       30
       28
        20
        14
         6
```

Det ses, at divisionen med 7giver resterne 6, 4, 5, 1, 3, 2 og 6.. Herefter gentages divisionerne og cifrene i kvotienten, indtil vi igen får resten 6. Resultatet er en uendelig, men periodisk decimalbrøk. Som det ses har decimalbrøken perioden 6.
På forhånd kunne vi indse, at den ville være periodisk med en periode på højst 6. Der er nemlig kun 6 mulige rester ved division med 7
De er 1, 2, 3, 4 ,5 og 6
Af eksemplet kan vi slutte at enhver brøk, kan skrives som en endelig - eller en uendelig, men periodisk decimalbrøk.

Man kan så stille det omvendte spørgsmål, om enhver endelig eller uendelig periodisk decimalbrøk, også kan skrives som en brøk. Svaret på dette er bekræftende. Ser vi først på en endelig decimalbrøk, er det let.

Eksempel

En endelig decimalbrøk: $d = 3{,}1416 = \dfrac{31416}{10000} = \dfrac{3927}{1250}$ ($\pi = 3{,}142159236….$)

En uendelig decimalbrøk: d=2,718281828….
Vi har markeret perioden på 4 decimaler, som antages at fortsætte uendeligt.
Vi ganger nu med $10^4 = 10000$ (4 er lig med perioden), herved bliver cifrene forskudt nøjagtig en periode.
Vi ser nu på tallet $10000\cdot d = 27182{,}818281828….$,
og herfra subtraherer vi tallet $d = \underline{2{,}718281828}….$
27180,1

Bemærk, at periodecifrene nu står lige under hinanden blot forskudt en periode. Heraf følger:

$$9999 \cdot d = 27180{,}1 \quad \text{eller} \quad d = \frac{271801}{99990}$$

Denne omskrivning er altid mulig, idet man blot skal gange decimalbrøken med 10^P, hvor p er perioden og så subtrahere decimalbrøken fra dette og reducere.

Opgave

1. Bestem perioden, når brøken $\frac{2}{7}$ omskrives til decimalbrøk.
2. Omskriv 7,654 til en brøk

En endelig mængde siges at have et endeligt *kardinaltal*. Kardinaltallet er det samme som antallet af elementer i mængden. Mængdens elementer kan nummereres ved hjælp af de naturlige tal.
Nogle uendelige mængder kan også nummereres. Et gælder f.eks. de hele tal. Rækkefølgen kunne f.eks. være 0, -1, 1, -2, 2,…

En uendelig mængde, der har den egenskab at den kan nummereres efter de naturlige tal, kaldes *numerabel*. Det er lidt overraskende, at også de rationale tal er numerable. Vi ser først på de positive ægte brøker: Rækkefølgen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, (\frac{2}{4}), \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$ Vil give alle de ægte brøker. Vil man undgå, at brøker, der kan forkortes nummereres to gange, skal det gøres lidt mere kunstfærdigt.

6. Irrationale tal

Hvis man tillægger et liniestykke et måltal (længden af liniestykket), så er det klart, at ethvert *rationalt* tal svarer til længen af et liniestykke. Det omvendte er imidlertid ikke tilfældet.

Ser vi på en retvinklet trekant med kateterne $a = b = 1$, så vil hypotenusen $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$. Vi plejer, at skrive $c = \sqrt{2}$. (Læses: kvadratroden af 2). $\sqrt{2}$ er så det *positive* tal som opløftet i anden potens giver 2.
På samme måde kan man konstruere liniestykker med længden $\sqrt{5}$ og $\sqrt{13}$ ved at vælge kateterne i en retvinklet trekant til at være, som $a = 2$, $b = 1$, og $a = 3$, $b = 2$.
Der gælder nemlig: $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ og $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

Pythagoræerne ca. år 400 fvt. kendte oprindelig kun de rationale tal, og var bekymrede for disse nye tal, som det ikke lykkedes dem, at kunne skrive som en brøk.
Det lykkedes dem imidlertid at bevise, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationelt tal. Beviset forløber som følger:

Vi antager at $\sqrt{2}$ kan skrives som $\frac{p}{q}$, hvor $\frac{p}{q}$ er en uforkortelig brøk.

Af $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ følger imidlertid: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \sqrt{2}^2$ *så* $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ er et lige tal.

Men så må p selv være et lige tal, da et ulige tal gange et ulige tal er et ulige tal.

Vi kan derfor skrive $p = 2r$. Indsættes, får man: $\frac{(2r)^2}{q^2} = 2$ *som giver* $\frac{4r^2}{q^2} = 2$, som reduceres til $q^2=2r^2$. heraf ses at også q^2 og dermed også q må være et lige tal.

Hvis både p og q er *lige* tal, så kan brøken $\frac{p}{q}$ forkortes med 2. Dette er i imidlertid strid med at brøken var uforkortelig, og dermed kan man slutte, at $\sqrt{2}$ ikke er en uforkortelig brøk.

I almindelighed definerer man kvadratroden af et positivt tal, som det positive tal, som opløftet til 2. *potens giver tallet. Kvadratroden af* 0 *er nul.*

Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal, fordi der ikke findes noget tal som kvadreret giver et negativt tal.

Ser vi f.eks. på $\sqrt{9}$, så findes der to tal, 3 og -3, der opløftet til 2. potens giver 9. $\sqrt{9}$ er det positive af disse tal, altså $\sqrt{9} = 3$.
Bemærk, at kvadratrodsuddragning og potensopløftning ikke i almindelighed "ophæver hinanden".
Således er $\sqrt{(-3)^2} = 3$ (og ikke -3), idet $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

På tilsvarende måde definerer man den 3. *rod af et positivt tal*, som det *positive* tal som opløftet til 3. potens giver tallet.

Eksempler

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \textit{fordi} \quad 4^3 = 64 \qquad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \textit{fordi} \quad 5^3 = 125$$

Tal der ikke kan udtrykkes ved hele tal og brøker, kaldes for *irrationale* tal.

De rationale tal og alle tal, der kan udtrykkes ved hjælp af rodtegn, kaldes for *algebraiske* tal.
(De er rødder i et polynomium med heltallige koefficienter). Der findes imidlertid tal, som ikke kan udtrykkes ved rodtegn, det gælder f.eks. tallet π. Sådanne tal kaldes for *transcendente* tal.

Alle de her omtalte tal kaldes for *reelle* tal. De reelle tal kan afsættes på en *tallinie*, således at der til ethvert punkt på tallinien, netop svarer et reelt tal – og omvendt.

Lighed mellem to tal udtrykkes med lighedstegn. At to tal a og b er forskellige skrives: $a \neq b$

7. Numerisk værdi

Ved den numeriske værdi af et tal forstår man tallet, når man ser bort fra fortegnet. Den numeriske værdi af nul er nul. Numerisk værdi skrives ved at omslutte tallet med to lodrette streger.
For eksempel er: |5| = 5 og |-5| = 5.
Mere generelt defineres den numeriske værdi af x, hvis x er et vilkårligt reelt tal:

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{for } x \geq 0 \\ -x & \textit{for } x < 0 \end{cases}$$

Ifølge denne definition er |5| = 5, da 5>0 og |-5| = -(-5) = 5, da -5<0

Der gælder en vigtig sætning om numerisk værdi:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{(og ikke lig med } x\text{)}$$

For eksempel er $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.
Potensopløftning og kvadratrodsuddragning ophæver ikke (nødvendigvis) hinanden.

For numeriske værdier af en sum eller differens gælder endvidere nogle uligheder:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Hvis *a* og *b* har forskelligt fortegn, så gælder lighedstegnet mellem de første to uligheder, ellers gælder lighedstegnet mellem de to sidste.

8. Andre talsystemer

I moderne tid har man stort set kun anvendt 10-talssysmet til almindelige beregninger, (fordi vi har 10 fingre og det er sådan, man lærer at tælle). Der findes imidlertid andre talsystemer (faktisk lige så mange, som der er naturlige tal), hvoraf nogle dog er mere praktiske end andre.

Vi har imidlertid stadig levn fra andre talsystemer. Antallet af måneder, vores døgn samt den tidligere engelske møntfod er eksempler på levn fra et 12-tals-system. Inddelingen i minutter og sekunder er et levn fra et 60-tals system.

Computere kan imidlertid kun regne i 2-talssystemet (det binære talsystem), ligesom dette talsystem har mange teoretiske anvendelser, for eksempel i informationsteori.
Det er sundt at huske på at **3** ikke er det samme som tallet tre, men et ret vilkårligt valgt symbol for dette begreb. Begrebet kan kun forklares ved at præciserer, hvad det vil sige at tælle, noget der fra et teoretisk synspunkt ikke er så simpelt endda.

10-tals systemet, som også kaldet de decimale talsystem, har grundtallet **10**.

Tal, der er skrevet i 2-tals systemet med grundtal 2 – det binære talsystem - består som bekendt udelukkende af to symboler for nul og én, så det er oplagt - næsten tvunget - at repræsentere tallene i dette talsystem med symbolerne **0** og **1**.

Vi minder endvidere om *positionssystemet* for et vilkårligt talsystem. For eksempel betyder tallet 3467 skrevet i 10-talsystem, at

$$3467 = 3*10^3 + 4*10^2 + 6*10^1 + 7*10^0.$$

Ethvert tal kan på helt samme måde skrives ved hjælp af potenser af grundtallet i et andet talsystem.

Med positionssystemet følger uafhængigt af *grundtallet* alle de fordele, der er ved regneoperationerne addition, subtraktion, multiplikation og division.

Grundtallet skrives altid **10**, (altså ét og nul), uafhængigt af talsystemet.

Totalssystemet har to cifre **0** og **1** og grundtallet **2** skrives $\mathbf{10_2}$.(læses et- nul)

10-talssystemet har 10 cifre: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** og 10 skrives som **10**.

Det hexadecimale talsystem (16-tals-systemet) har 16 cifre:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

og **16** skrives i dette talsystem som $\mathbf{10_{16}}$.

Det skulle fremgå, at $A=10_{10}$, $B=11_{10}$, $C=12_{10}$, $D=13_{10}$, $E=14_{10}$ og $F=15_{10}$.

Når man opererer med forskellige talsystemer, tilføjer man - for at undgå misforståelser - grundtallet som indeks på tallet. For eksempel 111_2 eller 345_{16}, idet begge de to tal principielt kunne være tal i 10-tals-systemet. Vi ser på et par eksempler på omregning mellem talsystemer:

$$110101_2 = 1\cdot 2^5 +1\cdot 2^4 +0\cdot 2^3 +1\cdot 2^2 +0\cdot 2^1 +1\cdot 2^0 = 32 +16 + 4 +1 = 53_{10}$$

$$5AF3_{16} = 5\cdot 16^3 + 10\cdot 16^2 +15\cdot 16^1 +3\cdot 16^0 = 5\cdot 4096 + 10\cdot 256 + 15*16 +3 = 23283_{10}$$

Skal man omregne et decimalt tal, f.eks. 18 til binært talsystem, kan det gøres ved successivt at dividere tallet med 2. Resterne ved divisionen, taget i omvendt rækkefølge, vil være de binære cifre i tallet. Algoritmen er vist nedenfor for tallet 18

$18 = 2\cdot 9 + \mathbf{0}$
$9 = 2\cdot 4 + \mathbf{1}$
$4 = 2\cdot 2 + \mathbf{0}$
$2 = 2\cdot 1 + \mathbf{0}$
$1 = 2\cdot 0 + \mathbf{1}$

$18_{10} = \mathbf{10010}_2$

På den samme måde kan man for eksempel omskrive 171 til 16-talssystem.

$171 = 16\cdot 10 + \mathbf{11}$
$10 = 16\cdot 0 + \mathbf{10}$

$171_{10} = \mathbf{AB}_{16}$. (A=10, B=11)

8.1 Additions-, subtraktions-, multiplikations- og divisionsalgoritme

Hvis et talsystem er baseret på positionssystemet er algoritmerne for regning med tallene uafhængigt af talsystemet, idet man blot skal huske, at *grundtallet altid skrives som* 10.

Binært: $10_2 = 2$. Decimalt: $10_{10} = 10$. Hexadecimalt: $10_{16} = 16$.

Vi viser først multiplikations og divisionsalgoritmerne for binære tal. (I disse algoritmer anvendes nemlig såvel additions som subtraktionsalgoritmen. Vi vil multiplicere 57 med 12 og derefter dividere 12 op i 57.

$12 = 1100_2$ og $57 = 111001_2$

```
111001 · 1100
      000000
   1 0000000
    11100100
   111001000
  1010101100
```

```
     1100| 111001 | 100 = 8 (kvotient)
           1100
             100
            0000
             1001
             0000
             1001  =  9 (rest)
```

$1010101100 = 1*2^9 + 1*2^7 + 1*2^5 + 1*2^3 + 1*2^2 = 684 = 12*57$

$57 = 12*8 + 9$

For Hexadecimale tal nøjes vi med at vise et par eksempler med addition og subtraktion

$BF35_{16} = 48949_{10}$ og $2CD_{16} = 717_{10}$

```
1  1  1
BF35 +
 2CD
C202 = 49966₁₀
```

```
 10 10
BF35 -
 2CD
BC68  =  48232₁₀
```