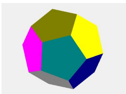
Elementær Matematik

Mængder og udsagn



Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. Mængder 1
1.1 Intervaller 4
2. Matematisk Logik. Udsagnslogik 5
3. Åbne udsagn 9

1. Mængder

En mængde er blot en praktisk betegnelse for en samling af forskellige elementer opfattet som en helhed. En mængde angives ved hjælp af mængdeparenteserne "{" og "}". Når man navngiver mængder, gøres det ved hjælp af store bogstaver fra starten af alfabetet. Mængden af naturlige tal mellem 3 og 9 skrives: {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Rækkefølgen, hvori elementer angives er underordnet. Man kan godt angive et element flere gange, men gør det naturligvis ikke.

At elementet c tilhører mængden A skrives $c \in A$.
At elementet d ikke tilhører mængden A, skrives $d \notin A$

Hvis A ={-2,-1,0,1,2,3} Kan vi f.eks. skrive: $2 \in A$ *og* $4 \notin A$

Man kan godt angive uendelige mængder, hvis der er en indlysende systematik. Det gøres så ved at skrive 3 prikker for fortsættelsen.

Eksempel:

Stambrøker = $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ Kvadrattal = {1, 4 , 9, 16, …}

Det bemærkes, at elementerne i en mængde godt kan være noget andet end tal

Når en mængde er bestemt ved at angive elementerne, siges mængden at være på *listeform*.

Ligesom det ved tallene er nødvendigt at indføre tallet nul, som indfører man i mængdelæren den *tomme mængde*, som en mængde, der ikke indeholder noget element.

Den tomme mængde skrives *Ø* eller {}. (Men ikke {*Ø*}, som jo netop er en mængde, der indeholder et element – den tomme mængde)

Vi har tidligere indført de matematiske standardbetegnelser. *N* (Mængden af naturlige tal), *Z* (Mængden af hele tal), *Q* (Mængden af rationale tal), *R* (Mængden af reelle tal).

To mængder *A* og *B* siges at være lig med hinanden, *hvis og kun hvis de indeholder de samme elementer*. Dette skrives:

$$A = B$$

A sige at være en delmængde af B, hvis ethvert element i A også er element i B.
Dette skrives

$$A \subseteq B$$

Hvis *A* er en delmængde af *B* men $A \neq B$, siges *A* at være *en ægte delmængde* af *B*.
Dette skrives:

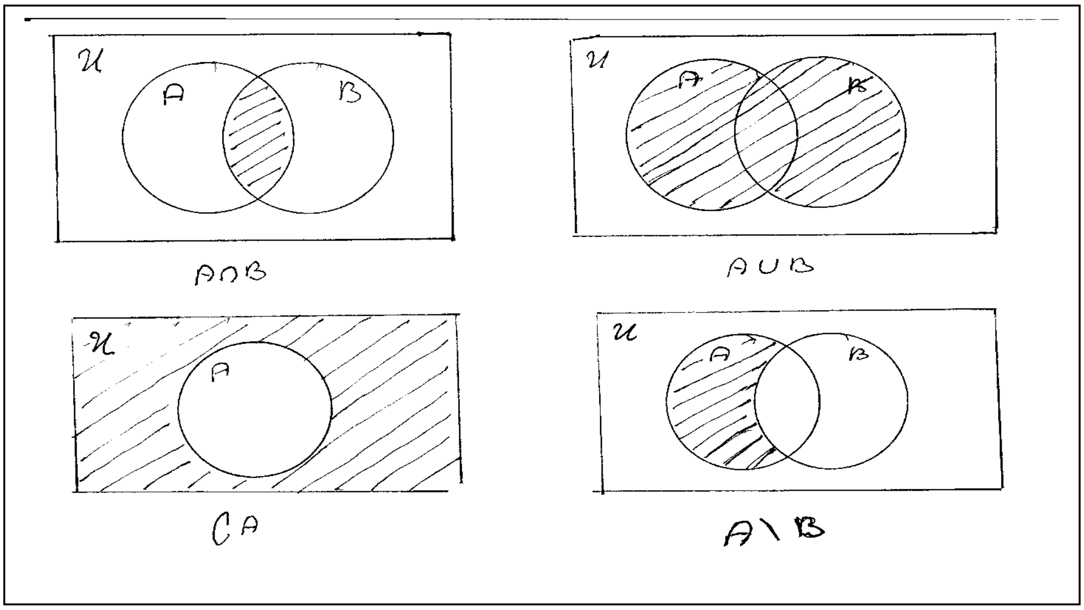
$$A \subset B$$

Hvis $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ så gælder der såvel $A \subseteq B$ som $A \subset B$.

Hvis *A* ikke er en delmængde af *B* skrives dette: $A \not\subset B$.

Ud fra to mængder, kan man danne nogle nye mængder, som kaldes *fællesmængde, foreningsmængde, overskudsmængde og komplementærmængde.*

Disse begreber anskueliggøres lettest, ved at illustrere mængderne som afsluttede punktmængder, f.eks. cirkler i et "univers", som er den mængde elementerne tages fra.



Ved fællesmængden af to mængder A og B, forstår man de elementer som både tilhører A og B.
Fællesmængden af A og B skrives:

$$A \cap B$$

Fællesmængden kan godt være tom. I dette tilfælde siges de to mængder at være disjunkte.

Fællesmængden af A={-3, -1, 1, 3, 5} og B={1, 2, 3, 4, 5} er {1, 3, 5} eller $A \cap B = \{1,3,5\}$

Ved foreningsmængden af A og B, forstår man de elementer som enten ligger A eller i B.
Foreningsmængden af A og B skrives:

$$A \cup B$$

Foreningsmængden af de to mængder ovenfor er $A \cup B = \{-3, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Ved komplementærmængden til en mængde A, forstår man de elementer, som ikke ligger i A.

Komplementærmængden til A skrives: $C\,A$ *eller* $\overline{A}$. Der gælder $C(C\,A) = A$

Ved overskudsmængden (eller mængdedifferensen eller blot *A* minus *B*) mellem *A* og *B* , forstår man de elementer som ligger i A men ikke i B.

Mængdedifferensen A minus B skrives:

$$A \backslash B$$

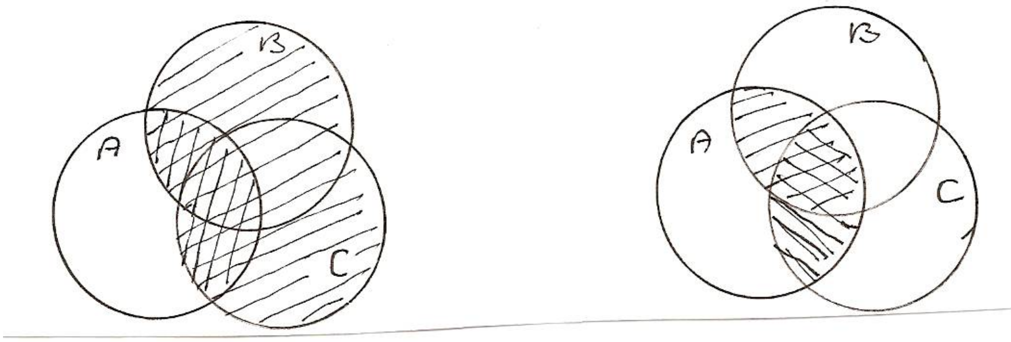
Der gælder

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B}$$

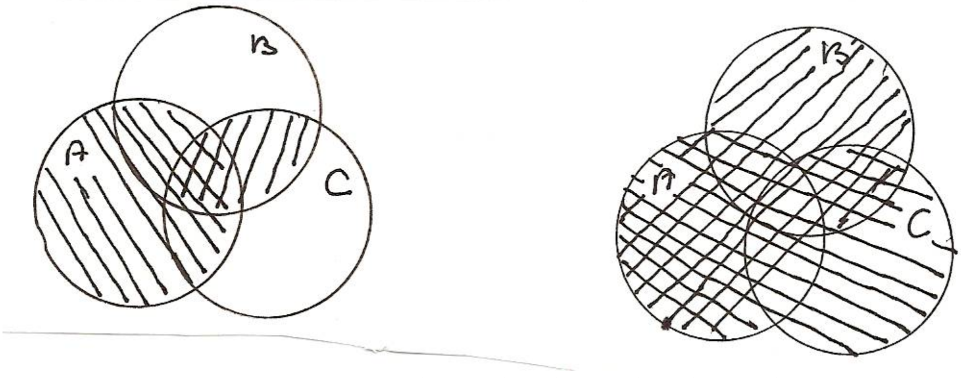
For mængder gælder den distributive lov, både for fællesmængde og foreningsmængde:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Når man skal tegne 3 mængder, hvor alle muligheder findes, gøres det som vist på tegningerne nedenfor. Der er 8 muligheder for beliggenheden af et element. Det ligger i A eller ikke i A. For hver af disse to muligheder er der to muligheder i B eller ikke i B. I alt 4 muligheder. For hver af disse 4 muligheder, kan elementet ligge i C eller ikke i C. I alt 8 muligheder. Dette kan også ses ved optælling. Nedenfor er af mængderne på hver side af lighedstegnet illustreret. Man ser at det er den samme mængde.



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Hvis man ikke kan angive en mængde på listeform, så anvender man vendingen:

Mængden af de elementer i grundmængden U, for hvilket der gælder…"logisk betingelse".

I matematik er det praktisk at have nogle symboler for en præcis formulering af en sådan vending. Nedenfor er vist nogle eksempler.

$$P = \{p \in N \mid p \text{ er et primtal}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

"{" læses som: "mængden af".
"|" læses som: "for hvilket det gælder".

Det hele kan derfor læses som: "Mængden af de naturlige tal p, for hvilket det gælder, at p er et primtal.

Hvis Grundmængden er de reelle tal, hvilket det ofte er, undlader man at skrive $\in R$, da det er underforstået.

$$\{x \mid x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

1.1 Intervaller

Intervaller er specielle delmængder af de reelle tal. Da sådanne delmængder anvendes ofte, har man indført specielle symboler for dem.
Et interval har to endepunkter, og indeholder en sammenhængende mængde af reelle tal mellem endepunkterne. Et interval skrives ved hjælp af firkantede parenteser.
Først et eksempel:

$$]-2, 3] = \{x \in R \mid -2 < x \leq 3\}$$

Alle reelle tal, der er større end -2 og mindre eller lig med 3.

Hvis begge endepunkter tilhører intervallet, kaldes intervallet for *lukket*. Hvis ingen af endepunkterne tilhører intervallet kaldes det *åbent*. Hvis kun et af endepunkterne tilhører intervallet, kaldes det *halvåbent*.

Man kan opskrive 4 intervaller med a og b som endepunkter. $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ *og* $[a, b]$
Vi nøjes med at skrive den formelle definition for et af dem.

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Man tillader i almindelighed, at lade det venstre endepunkt være -∞ og det højre ∞, men intervallet i disse endepunkter skal da være åbent.

$$]-\infty,4] = \{x \mid x \leq 4\} \qquad]-7,\infty[= \{x \mid x < -7\}$$

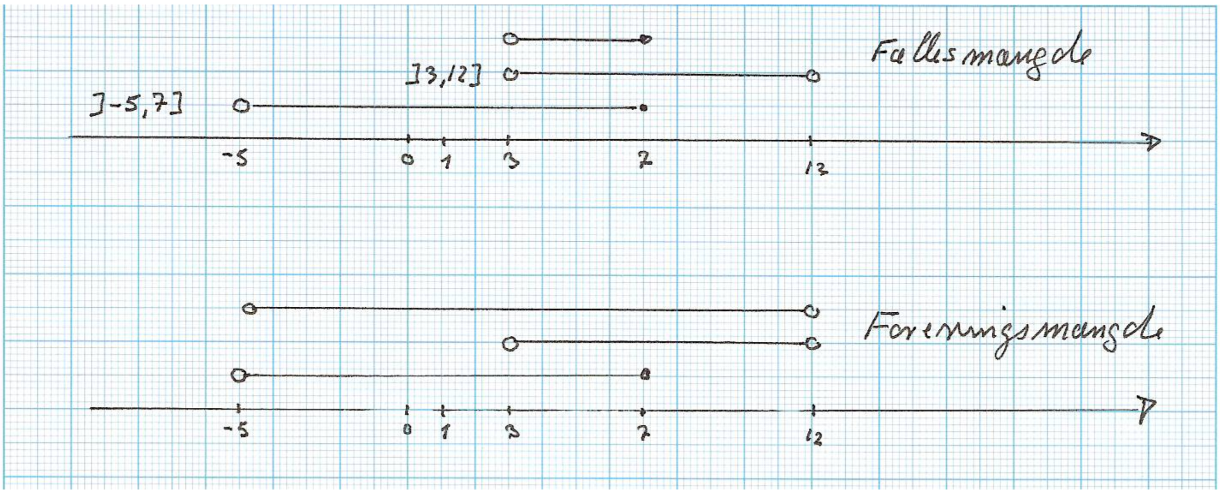
Man skal huske på et interval er en mængde, således at to intervaller kan kombineres med operationerne fællesmængde, foreningsmængde, overskudsmængde og komplementærmængde. Ofte er det en fordel at illustrere mængdeoperationerne på en tallinie, som illustreret nedenfor. En udfyldt cirkel i endepunktet betyder at dette endepunkt tilhører intervallet og en ikke udfyldt betyder, at endepunktet ikke tilhører intervallet.

Eksempler:

$$]-5,7] \cap]3,12[=]3,7] \qquad]-5,7] \cup]3,12[=]-5,12[$$

$$]-5,7] \setminus]3,12[=]-5,3] \qquad \overline{]-3,5]} =]-\infty,-3] \cup]5,\infty[$$

Nedenfor er de to første eksempler illustreret på en tallinie.



2. Matematisk Logik. Udsagnslogik

Matematik består af ”udsagn” i almindelighed formuleret ved hjælp af symboler. I matematikken er et *udsagn* en ”sætning” som enten er sand eller falsk. Som eksempler på formuleringer, hvoraf de første er udsagn mens den sidste ikke er det, kan nævnes:

$13^2 = 169$ (udsagn: sandt),

Vinkelsummen i en trekant er 180^0 (udsagn: sandt).

$\frac{10-2}{5-2} = \frac{10}{5} = 2$ (Udsagn: falsk)

”Matematik er et herligt fag” (ej udsagn)

Som altid i matematikken anvender man symboler til mere generelle betragtninger. Til at betegne udsagn bruges traditionelt bogstaverne *p, q, r, s.* Vi vil begynde med at betragte nogle almindelige udtryk.

p: ”Det regner”. q: ”Gaden bliver våd”.

Ud fra disse to udsagn kan man ved hjælp af adverbierne/konjunktionerne ”*og”*, ”*eller*”, ”*hvis…så*”, og ”*ikke* (*non*)”, danne nogle nye udsagn.
For eksempel:
Hvis det regner *så* bliver gaden våd.
Det regner *ikke eller* gaden bliver våd.

Man indfører nu nogle nye symboler for disse adverbier/konjunktioner:

"$p \wedge q$" *læses som* "*p og q*". (*Konjunktion*)
"$p \vee q$" *læses som* "*p eller q*" (*Disjunktion*)
"$\neg p$" *læses som* "*non p*" *eller* "*ikke p*, (*Negation*)
"$p \Rightarrow q$" *læses som* "*hvis p så q*" *eller* "*p medfører q*" (Im*plikation*)
"$p \Leftarrow q$" *læses som* "*kun p hvis q*" (*Omvendt* Im*plikation*)
"$p \Leftrightarrow q$" *læses som* "*p hvis og kun hvis q*" *eller* "*p er ensbetydende med q*" (*Dobbelt* Im*plikation*)

Med betydningen af *p* og *q* ovenfor, vil de sammensatte udsagn lyde:

Det regner og gaden bliver våd.
Det regner eller gaden bliver våd
Det regner ikke. (Non det regner)
Hvis det regner, så bliver gaden våd
Gaden bliver våd, kun hvis det regner
Gaden bliver våd, hvis og kun hvis det regner.

Der gælder nogle logiske slutningsregler, hvorefter man kan afgøre sandhedsværdien for det sammensatte udtryk ud fra sandhedsværdierne for de enkelte udsagn. Sådanne slutningsregler er givet ved sandhedstabeller. I det følgende betegner vi med *s* (sand) og *f* (falsk). Internationalt er det *t* (true) og *f* (false).

Konjunktion af p og q

p	q	p ^ q
s	s	s
s	f	f
f	s	f
f	f	f

Disjunktion af p og q

p	q	$p \vee q$
s	s	s
s	f	s
f	s	s
f	f	f

Implikation af p og q

p	q	$p \Rightarrow q$
s	s	s
s	f	f
f	s	s
f	f	s

Konjunktionen af *p* og *q* er kun sand, hvis både *p* og *q* er sande. Disjunktionen er sand, hvis mindst et af udsagnene *p* og *q* er sande. Implikationen er kun falsk, hvis *p* er sand og *q* er falsk.
Det eneste, der måske kan vække undren er, at implikationen er sand, hvis *p* er falsk og *q* er sand.

Men det er faktisk muligt at slutte noget sandt, selv om præmissen er falsk og slutningsreglen er korrekt. Ikke så sjældent tages dette som et "bevis" for en falsk præmis!
"Hvordan kan det være forkert, hvis jeg har fået det rigtige svar?" (Men det kan det skam!)

Eksempel

$$-3 = 3 \Rightarrow (-3)^2 = (3)^2 \Leftrightarrow 9 = 9$$

- 3 = 3 er falsk, men det er rigtigt, at hvis to tal er lig med hinanden, så er deres kvadrater også ens, og 9 = 9 er sandt.

Negation af p

p	$\neg$p
s	f
f	s

Omvendt implikation af p og q

p	q	p$\Leftarrow$q
s	s	s
s	f	s
f	s	f
f	f	s

Dobbeltimplikation af p og q

p	q	p$\Leftrightarrow$q
s	s	s
s	f	f
f	s	f
f	f	s

Man bemærker at den omvendte implikation (naturligvis) har samme sandhedstabel som implikationen, blot er p og q byttet om. Dobbeltimplikationen er kun sand, når p og q har samme sandhedsværdi.
Ud fra de grundlæggende sandhedstabeller kan man opstille sandhedstabeller for mere komplicerede udsagn.
Et udsagn som har lutter s'er i sandhedstabeller, kaldes en *tautologi*. Et oplagt eksempel er $p \vee \neg p$. (Enten regner det eller også regner det ikke.) Men det kan sagtens være meget mere spidsfindigt. F.eks. "Alle ungkarle er ugifte".
To udsagn p og q siges at være *logisk ækvivalente*, hvis de har *samme sandhedstabel*. Dette er det samme som at sige at p$\Leftrightarrow$q er en tautologi.

Eksempel
Ved brug af sandhedstabeller vil vi vise, at:

$p \Leftrightarrow q$ er logisk ækvivalent med $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$,

$p \Rightarrow q$ er logisk ækvivalent med $\neg p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
s	s	S	s	s	s
s	f	F	s	f	f
f	s	S	f	f	f
f	f	S	s	s	s

Som det fremgår, er sandhedstabellen er udsagnene $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ og $p \Leftrightarrow q$ logiske ækvivalente, hvilket ikke kan overraske.

p	q	$\neg$p	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
s	s	f	s	s
s	f	f	f	f
f	s	s	s	s
f	f	s	s	s

Denne sidste ækvivalens er sprogligt lidt mere spidsfindigt. "Hvis det regner bliver gaden våd" er logisk ækvivalent med: "Enten regner det ikke, eller gaden bliver våd".

Øvelse
Vis at følgende to udsagn er ækvivalente:

a) $\neg(p \wedge q)$ *og* $\neg p \vee \neg q$. (Hvis udsagnet både p og q er falsk, så er enten p eller q falsk.)

b) $\neg(p \vee q)$ *og* $\neg p \wedge \neg q$. (Hvis udsagnet p eller q er falsk, så er både p og q falske).

c) $p \Rightarrow q$ er logisk ækvivalent med $\neg q \Rightarrow \neg p$. (Hvis p sand medfører q sand, så er p falsk hvis q er falsk)

Matematik er en aksiomatisk deduktiv videnskab. Det betyder, at man begynder med nogle grundlæggende simple antagelser, som antages at være sande. Disse antagelser kaldes aksiomer. Aksiomer kan ikke bevises.
Ved hjælp af logiske følgeslutninger som redegjort ovenfor, fremkommer nye udsagn, som kaldes for sætninger eller teoremer.
De logiske følgeslutninger kaldes enten for udledninger, hvis det blot er en række algebraiske omformninger eller beviser, hvis der i udledningen anvendes nogle logiske ræsonnementer.

Når man laver udledninger og beviser anvender man oftest ensbetydende tegn $\Leftrightarrow$. ”Man regner ensbetydende.” Herved sikrer man sig at alle udsagnene er logisk ækvivalente (udtrykker det samme), blot på forskellig måde.

I beviser anvendes næsten udelukkende **modus ponens (deduktion)**: Hvis *p* er sand og *p* medfører *q* (er sandt) så kan vi slutte at *q* også er sand.

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

Mere generelt, hvis p er en række sætninger (sande udsagn) og man ud fra disse sande udsagn kan slutte *q*, så er *q* også sand. Det er især dette man tænker på, når man taler om matematikkens aksiomatisk deduktive natur.
Modus ponens, anvendes ret ofte også i daglig sprog. F.eks. hvis eleven siger: ”Hvis det som står på tavlen er rigtigt, så forstår jeg overhovedet ingenting”. Hvortil læreren svarer. ”Det er rigtigt, hvad der står på tavlen”.

Det sker, at man anvender et såkaldt indirekte bevis. Dette bygger på den logiske ækvivalens mellem $p \Rightarrow q$ og $\neg q \Rightarrow \neg p$. Dette anvendte vi, da vi skulle bevise, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Vi antog da det modsatte, at det kunne skrives som en uforkortelig brøk, men kunne da slutte, at dette var falsk. Altså må præmissen være falsk.

Når man formulerer en matematisk sætning, skal det gøres, så der ikke er nogen tvivl om, hvad man påstår. I den henseende er sproget ofte mangelfuldt, og dette er grunden til at man har indført de logiske tegn, fordi deres betydning er helt entydigt bestemt ved sandhedstabeller.

Af samme grund har man i matematikken indført nogle såkaldte kvantorer, som på præcis og kort måde udtrykker nogle ofte anvendte sproglige vendinger.

For ethvert (for alle) *x* gælder udsagnet *p*(*x*) skrives med *Alkvantoren* $\forall$ x: p(x)

Der eksisterer (findes mindst et) x For hvilket det gælder, at $p(x)$ er sand: skrives med *Eksistenskvantoren* $\exists \mathrm{x} : p(x)$

Eksempler

$\forall x \in R : x^2 = x \cdot x$. (For alle reelle tal gælder at x i 2. er lig med x gange x.)

$\exists x < 0 : x^2 = 169$. (Der findes et negativt tal for hvilket det gælder, at dets kvadrat er 169).

Der gælder følgende regler for negering (udtrykke det modsatte) af kvantorer, som er umiddelbart indlysende.

$\neg(\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg p(x)$. Hvis det er falsk, at der for ethvert x gælder udsagnet $p(x)$, så findes der mindst et x, hvor $p(x)$ er falsk.

$\neg(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$. Hvis der ikke findes noget x, for hvilket det gælder at $p(x)$ er sand, så er $p(x)$ falsk for alle x.

3. Åbne udsagn

Et åbent udsagn er et udsagn, hvor sandhedsværdien afhænger af en variabel.

Eksempler

$x^2 = 4$ (Udsagnet er sandt for x = 2 eller x = -2 og ellers falsk)

Hvis a, b og c er siderne i en trekant T, så er: $a^2 + b^2 = c^2$. (Sandt når T er retvinklet ellers ikke).

Det man kalder ligninger, er i virkeligheden åbne udsagn.

At løse ligningen betyder at bestemme samtlige værdier for variablen (de variable), hvor udsagnet er sandt.

Skrevet med mængdesymboler: $\{x|\ p(x)\}$.

Vi viser dette med et simpelt eksempel.

$$\{x|\ 3x - 7 = 7x + 5\} = \{x|\ 3x - 7x = 5 + 7\} = \{x|\ -4x = 12\} = \{x|\ x = -3\}$$

Sandhedsværdien for de 4 åbne udsagn i mængdeparentesen er den samme, så de 4 udsagn er ensbetydende.
Det er dog ret sjældent, at man skriver åbne udsagn i mængdeparenteser. Det er kun gjort for at illustrere, hvad det er der sker, når man ”løser en ligning”. For fremtiden vil vi derfor undlade mængdeparenteserne og i stedet anvende ensbetydende tegn, som vist nedenfor.

$$3x - 7 = 7x + 5 \Leftrightarrow 3x - 7x = 5 + 7 \Leftrightarrow -4x = 12 \Leftrightarrow x = -3$$

For lidt større regninger vælger man som regel, at anvende en hel linie til at skrive hvert åbent udsagn. Det er dog tilladt at skrive ensbetydende tegn på højkant, men det har kun betydning for typografien. Dette er illustreret nedenfor.

$3x - 7 = 7x + 5 \quad \Leftrightarrow$

$3x - 7x = 5 + 7 \quad \Leftrightarrow$

$-4x = 12$

$\Updownarrow$

$x = -3$