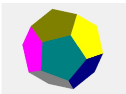
Elementær Matematik

Ligninger og uligheder



Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. Førstegradsligninger

En ligning er et åbent udsagn, hvor den variable x i almindelighed betegner et reelt tal. At løse ligningen betyder at bestemme sandhedsmængden for det åbne udsagn. Sandhedsmængden kan eventuel være tom eller være alle reelle tal.

Lighedstegnet ”=” mellem to talstørrelser betyder, at deres forskel er nul. $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$.

Heraf følger umiddelbart to grundlæggende regler for ligninger:

1. Man kan lægge det samme tal til eller trække det samme tal fra på begge sider af ligningen.

Vi nøjes med at bevise det for addition.

Bevis: $a+c=b+c \Leftrightarrow a+c-(b+c)=0 \Leftrightarrow a+c-b-c=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

2. Man kan gange eller dividere med samme tal (forskellig fra nul) på begge sider af ligningen.

Vi nøjes med at bevise det for multiplikation.

Bevis: $ac=bc \Leftrightarrow ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)c=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

I almindelighed vil man ikke anvende disse to regler direkte, men i stedet nogle enklere regler som kan afledes af disse to regler, hvilket vi nu vil vise. Små bogstaver betegner alle reelle tal.

$$ax+b=c \Leftrightarrow ax+b-b=c-b \Leftrightarrow ax=c-b .’$$

Vi har anvendt den første af de to grundregler. Springer man den midterste ligning over, ser man at vi har udledt en ny regel.

Man kan flytte et led fra den ene side af lighedstegnet til den anden ved at skifte fortegn.

Vi ser dernæst på et generelt eksempel på den anden regel.

$$ax=b \Leftrightarrow \frac{ax}{a}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$$

Vi har anvendt den anden af de to grundregler, idet vi har divideret med $a \neq 0$ på begge sider. Springer man den midterste ligning over, ser man at vi har udledt en ny regel.

Man kan flytte en faktor (forskellig fra nul) over på den anden side af lighedstegnet som divisor.

$$\frac{x}{a}=b \Leftrightarrow \frac{x}{a}a=ba \Leftrightarrow x=ba$$

Vi har anvendt den anden af de to grundregler. Springer man den midterste ligning over, ser man at vi har udledt en ny regel.

Man kan flytte en divisor over på den anden side af lighedstegnet som faktor.

Når man løser ligninger, skal man (hurtigt) vænne sig til at anvende de afledte regler. Det er for det første hurtigere og for det andet er det langt mere overskueligt i mere komplicerede udtryk. Man kan aflede endnu en regneregel, som man ret ofte gør brug af.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow ac = bx$$

Vi har anvendt den anden regneregel to gange, ved først at gange med x og derefter med c. Udfører man operationen i et hug, kaldes det **at gange over kors.**

Eksempel

$$\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x = 1 + \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{13}{15}x = \frac{11}{8} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{13}{15}} = \frac{11 \cdot 15}{8 \cdot 13} = \frac{165}{104}$$

1.1 Nulreglen

Nogle ligninger kan reduceres til førstegradsligninger ved brug af *nulreglen*:

Et produkt er nul, hvis og kun hvis mindst en af faktorerne er nul

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0$$

$$x \cdot y \cdot z = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0 \lor z = 0 \qquad osv.$$

Eksempel

$$(2x - 7)(3x + 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \lor 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{7}{2} \lor x = -2$$

Det bør også nævnes, at

En brøk er nul, hvis og kun hvis tælleren (og kun tælleren) er nul

Eksempel

$$\frac{(2x - 7)}{(3x + 6)} = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{7}{2}$$

2. Uligheder og regning med uligheder

I det følgende betegner $a,b,c,d,..$ vilkårlige reelle tal. Idet R_+ betegner mængden af positive relle tal og R_- betegner mængden af negative reelle tal, definerer vi ulighederne

$\boldsymbol{a > b}$ (a er større end b) og $\boldsymbol{a < b}$ (a er mindre end b) ved:

$a > b \Leftrightarrow a - b \in R_+$ og $a < b \Leftrightarrow a - b \in R_-$

Endvidere defineres $\boldsymbol{a \geq b}$ (a er større end eller lig b) og $\boldsymbol{a \leq b}$ (a er mindre end eller lig b) ved

$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$ og $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

Vi vil da vise nogle sætninger om uligheder og regning med uligheder.

Sætning: (triviel)

$$a > 0 \Leftrightarrow a \in R_+$$

Bevis:

$$a > 0 \Leftrightarrow a - 0 \in R_+ \Leftrightarrow a \in R_+$$

På tilsvarende måde vises, at $a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathrm{R}_-$

Sætning: (triviel)

$$a > b \Leftrightarrow b < a$$

Bevis:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in R_+ \Leftrightarrow -(a - b) \in R_- \Leftrightarrow b - a \in R_- \Leftrightarrow b < a$$

Sætning: Sammenligningsreglen (triviel)

$$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

Bevis:

$$a > b \wedge b > c \Leftrightarrow a - b \in \mathrm{R}_+ \wedge b - c \in \mathrm{R}_+ \Rightarrow$$
$$(a - b) + (b - c) \in R_+ \Leftrightarrow a - c \in R_+ \Leftrightarrow a > c$$

Sætning:

Man kan addere det samme (positive eller negative) tal på begge sider af uligheden.

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

Bevis:

$$a + c > b + c \Leftrightarrow (a+c) - (b+c) \in R_+ \Leftrightarrow a - b \in R_+ \Leftrightarrow a > b$$

Sætning:

Man kan flytte et **led** over på den anden side af ulighedstegnet ved at skifte fortegn.

$a + c > b \quad \Leftrightarrow \quad a > b - c$

Bevis:

Vi adderer $-c$ på begge sider af uligheden

$a + c > b \quad \Leftrightarrow \quad a + c + (-c) \; > \; b + (-c) \quad \Leftrightarrow \quad a > b - c$

Sætning:

Man kan gange eller dividere med det samme **positive** tal på begge sider af uligheden

$k \in R_{+} \wedge a > b \quad \Leftrightarrow \quad k\,a > k\,b$

Bevis:

$k \in R_{+} \wedge a > b \quad \Leftrightarrow \quad k \in R_{+} \wedge a - b \in R_{+} \quad \Rightarrow$
$k(a - b) \in R_{+} \quad \Leftrightarrow \quad ka - kb \in R_{+} \quad \Leftrightarrow \quad ka > kb$

Hvis man dividerer med et positivt tal k, er det samme som at gange med $1/k$, så det er overflødigt at vise sætningen for division.

Sætning:
Man kan gange eller dividere med det samme **negative** tal, hvis man samtidig vender ulighedstegnet.

$k \in R_{-} \wedge a > b \quad \Leftrightarrow \quad ka < kb$

Bevis:

$k \in R_{-} \wedge a > b \quad \Leftrightarrow k \in R_{-} \wedge a - b \in R_{+} \Rightarrow k(a-b) \in R_{-} \Leftrightarrow \; ka < kb$

Sætning:
Man kan addere to uligheder, når ulighedstegnet vender samme vej

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Bevis:
Vi adderer c på begge sider i den første ulighed og b på begge sider i den anden, og anvender derefter sammenligningsreglen.

$a < b \wedge c < d \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c \wedge b + c < b + d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$

Sætning:
For **positive** tal a, b, c og d kan man multiplicere to uligheder med hinanden, når ulighedstegnet vender samme vej.

$a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad ac > bd$

Bevis:
Vi multiplicerer den første ulighed med *c* og den anden med *b*, og anvender derefter sammenligningsreglen.

$$a > b \wedge c > d \quad \Leftrightarrow \quad ac > bc \wedge bc > bd \quad \Rightarrow \quad ac > bd$$

Som konsekvens af denne sætning følger for positive tal *a* og *b* sætningen:

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^3 > b^3 \Leftrightarrow ..... a^n > b^n$$

Eksempler

1. Hvilket tal er størst $\frac{7}{11}$ eller $\frac{2}{3}$. Vi skriver uligheden $\frac{7}{11} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 21 > 22$. Altså er $\frac{7}{11} < \frac{2}{3}$

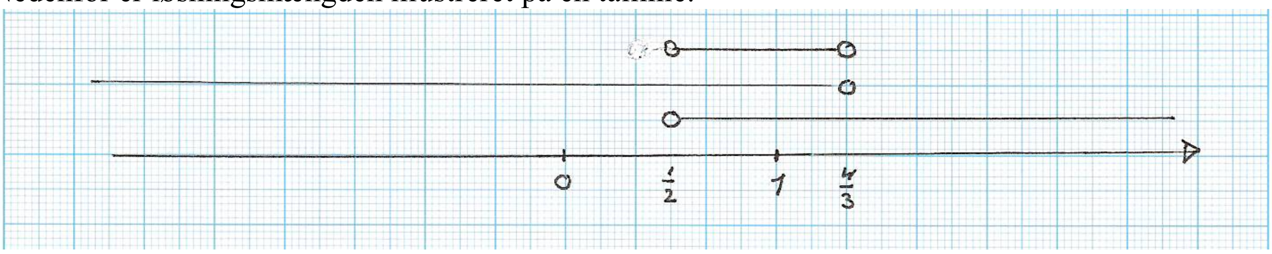
2. Løs uligheden $7\text{-}3x < 5x - 2$. $\quad 7 - 3x < 5x - 2 \Leftrightarrow -8x < -9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{8}$

2.1 Dobbeltuligheder

Dobbeltuligheder er to uligheder, der skal være opfyldt samtidig eller, hvor mindst en af ulighederne skal være opfyldt. Vi illustrerer med et par eksempler:

$$\begin{aligned}
&x + 2 > 3 - x > \tfrac{1}{2}x + 1 \quad \Leftrightarrow \\
&x + 2 > 3 - x \quad \wedge \; 3 - x > \tfrac{1}{2}x + 1 \; \Leftrightarrow \\
&2x > 1 \quad \wedge \quad -\tfrac{3}{2}x > -2 \quad \Leftrightarrow \\
&2x > 1 \quad \wedge \quad 2 > \tfrac{3}{2}x) \quad \Leftrightarrow \\
&x > \tfrac{1}{2} \quad \wedge \quad x < \tfrac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \\
&\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

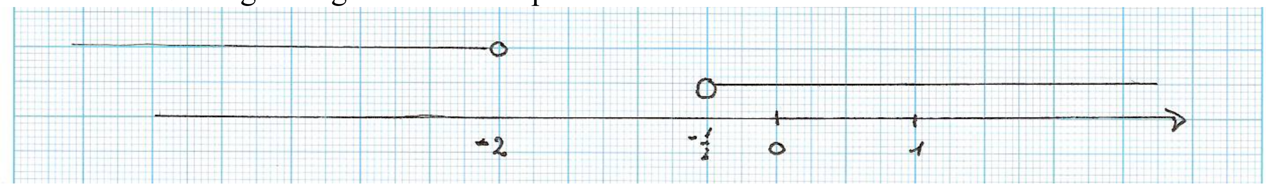
Nedenfor er løsningsmængden illustreret på en tallinie.



Det er vigtigt, at man husker det sidste skridt. Det er ikke tilstrækkeligt, at løse de to uligheder separat. Man skal "læse løsningsmængden".

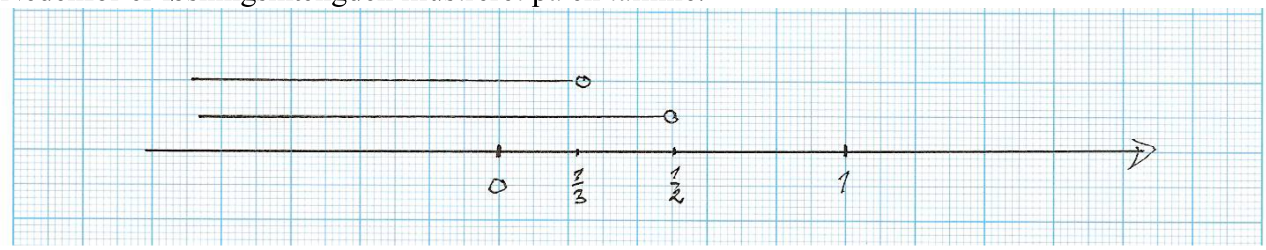
$$\tfrac{1}{2}x+1 > x+2 > 3-x \quad \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}x+1 > x+2 \quad \wedge \quad x+2 > 3-x \quad \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}x < -1 \quad \wedge \quad 2x > -1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x < -2 \quad \wedge \quad x > -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$L = \varnothing \quad (\textit{løsningsmængden er tom})$$

Nedenfor er løsningsmængden illustreret på en tallinie.



$$2x - 7 > 4x - 8 \quad \vee \quad 3x - 7 > 6x - 8 \quad \Leftrightarrow$$
$$2x < 1 \quad \vee \quad 3x < 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x < \tfrac{1}{2} \quad \vee \quad x < \tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow$$
$$x < \tfrac{1}{2}$$

Nedenfor er løsningsmængden illustreret på en tallinie.



Nogen uligheder med et produkt eller en kvotient af førstegradsudtryk fører til dobbeltuligheder. Vi ser først på et eksempel med et produkt.

$$(2x-3)(5x-4) < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(2x-3>0 \wedge \quad 5x-4<0) \quad \vee \quad (2x-3<0 \wedge \quad 5x-4>0) \quad \Leftrightarrow$$
$$(x > \tfrac{3}{2} \quad \wedge \quad x < \tfrac{4}{5}) \quad \vee \quad (x < \tfrac{3}{2} \quad \wedge \quad x > \tfrac{4}{5}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{4}{5} < x < \tfrac{3}{2}$$

Vi ser dernæst på en kvotient:

$$\frac{4x-2}{x+7} > 3$$

For at løse uligheden vil vi gange over med x+7, men for at gøre dette må vi dele op i to tilfælde. Det ene, hvor $x > -7$ og det andet, hvor $x < -7$, hvor vi skal vende ulighedstegnet, da $x+7$ er negativ. Regningerne forløber herefter:

$$\frac{4x-2}{x+7} > 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$x > -7 \;\wedge\; 4x-2 > 3(x+7) \quad \vee \quad x < -7 \;\wedge\; 4x-2 < 3(x+7) \quad \Leftrightarrow$$
$$x > -7 \;\wedge\; x > 23 \quad \vee \quad x < -7 \;\wedge\; x < 23 \;\Leftrightarrow$$
$$x > 23 \;\vee\; x < -7 \quad \Leftrightarrow$$

Også numerisk værdi i en ulighed fører til dobbeltuligheder: Vi ser på uligheden:

$$|2x-7| < 4x+2 \;\Leftrightarrow$$
$$2x-7 \geq 0 \;\wedge\; 2x-7 < 4x+2 \quad \vee \quad 2x-7 < 0 \;\wedge\; -(2x-7) < 4x+2 \;\Leftrightarrow$$
$$x \geq \tfrac{7}{2} \;\wedge\; x > -\tfrac{9}{2} \quad \vee \quad x < \tfrac{7}{2} \;\wedge\; x > \tfrac{5}{6} \;\Leftrightarrow$$
$$x \geq \tfrac{7}{2} \;\vee\; \tfrac{5}{6} < x < \tfrac{7}{2} \;\Leftrightarrow$$
$$x > \tfrac{5}{6}$$

3. Andengradsligningen

En *andengradsligning* er en ligning af typen

(1.1) $$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ,$$

hvor a,b og c er reelle tal og $a \neq 0$

For at finde en løsningsformel for denne ligning, ser vi først på et simpelt specialtilfælde, hvor $a = 1$, $b = 0$ og $c = -k$. Ligningen bliver så:

$$x^2 = k$$

Vi deler op i 3 tilfælde:

1. $k < 0$: Ligningen har ingen løsninger, x^2 aldrig er negativ.

2. $k = 0$: Ligningen har netop en løsning $x = 0$

3. $k > 0$: Ligningen har netop to løsninger: $x = \sqrt{k} \;\vee\; x = -\sqrt{k}$

Vi erindrer om, at $\sqrt{k}$ for $k > 0$ er defineret som det **positive** tal, som opløftet til anden potens giver k, og $\sqrt{0} = 0$.

Eksempel: Vi vil løse ligningen

$$x^2 = 9$$

Da $k = 9 > 0$, er der to løsninger: $x = -3 \;\vee\; x = 3$

For at løse den oprindelige ligning, vil vi søge at omskrive den, så den kommer på samme form af det simple tilfælde. Vi viser først fremgangsmåden med et eksempel, idet vi ser på ligningen:

$$2x^2 - 4x - 30 = 0$$

Først dividerer vi med 2 (med a) og får

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Dernæst søger vi at omskrive ligningen, så leddene med x skrives som *kvadratet på en toleddet størrelse.* I så tilfælde, må x være det første led, $-2x$ det dobbelte produkt og det andet led er 1.

$$(x - 1)^2 - 1 - 15 = 0$$

Ved omskrivningen kvadratet på en toleddet størrelse, får vi ganske vist et led $1^2 = 1$ for meget, når vi udregner parentesen, så det har vi trukket fra. Ligningen kan nu skrives:

$$(x - 1)^2 = 16$$

Denne ligning er på formen $x^2 = k$ (noget i anden potens er lig med et tal), og den kan direkte løses

$$x - 1 = 4 \ \vee \ x - 1 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \ \vee \ x = -3$$

Vi følger nu nøjagtig den samme fremgangsmåde med den oprindelige ligning, idet vi først dividerer ligningen med a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Hvis vi skal lave omskrivningen til kvadratet på en toleddet størrelse $(x + y)^2$, skal $(b/a)\,x$ være det dobbelte produkt.
Sætter vi $2yx = (b/a)\,x$, ser vi at det andet led $y = b/(2a)$. Vi foretager da omskrivningen:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Vi samler *tallene* på højre side, og sætter på fælles brøkstreg

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Ligningen har nu samme form som den simple ligning, og kan umiddelbart løses. Man sætter

$$d = b^2 - 4ac$$

Denne størrelse kaldes for ligningens ***diskriminant*.** Ligningen bliver da:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{d}{4a^2}$$

Da $4a^2 > 0$ deler vi igen op i 3 tilfælde:

$d < 0$: Ligningen har ingen løsninger.

$d = 0$: Ligningen har netop 1. løsning. $x=-\frac{b}{2a}$

$d > 0$: Ligningen har to forskellige løsninger, idet man finder:

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{d}{4a^2}} \quad \vee \quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \vee \quad x=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}\ ,\ hvor \quad d=b^2-4ac$$

Det sidste udtryk er den almindelige løsningsformel for andengradsligningen.
Bemærk, at dette udtryk også er gyldigt, selvom $d = 0$.

Når man skal løse til en *andengradsligning*, begynder man altid med at udregne diskriminanten.

Hvis d < 0 har ligningen ingen løsninger, og det er nytteløst (og heller ikke tilrådeligt), at fortsætte udregningerne. Hvis d > 0 indsættes i løsningsformlen. Hvis $d = 0$, kan man anvende den simple løsningsformel, men den generelle løsningsformel kan også anvendes for $d = 0$.

Eksempel
Vi vil løse ligningen

$$-3x^2 + 5x + 2 = 0$$

Først udregner vi diskriminanten: $d = 5^2 - 4(-3)2 = 49=7^2$, så $d > 0$

Da $d > 0$ har ligningen to løsninger. Vi indsætter i løsningsformlen.

$$x=\frac{-5\pm 7}{-6} \Leftrightarrow x=2 \vee x=-\frac{1}{3}$$