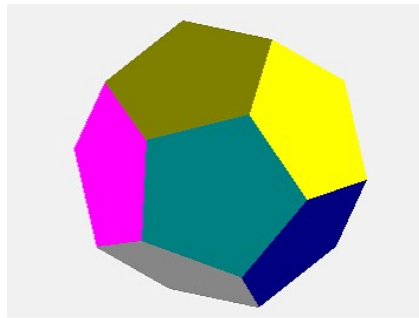


Elementær Matematik

Differentiallignings-modeller



Ole Witt-Hansen

2008

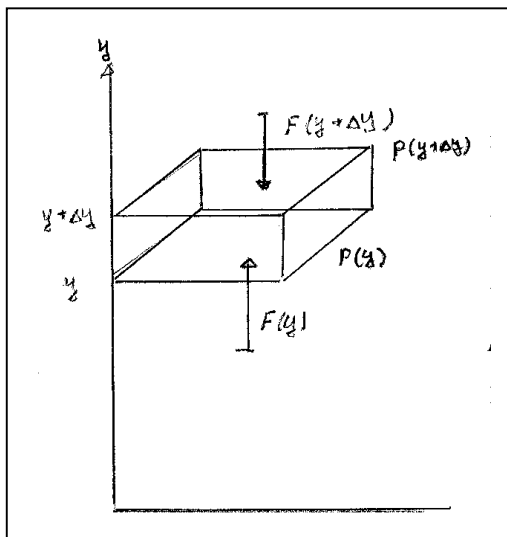
Indhold

Indhold	1
1. Eksempler på problemer, der fører til differentiallyigninger	2
1.1 Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen	2
1.2 Kædelinien	4
2. Numerisk integration af differentiallyigninger	6
3. Differentiallyigningsmodeller	8
3.1 Forløbet af en influenza epidemi	9
3.2 Differentiallyigning for vekselvirkning mellem to dyrearter	11
3.3 Konkurrerende arter	13

1. Eksempler på problemer, der fører til differentiallyigninger

I alle naturvidenskaber, men også i biologi og økonomi, optræder differentiallyigninger, som svar på problemer. Vi vil her give nogle eksempler, hentet fra fysikken.

1.1 Trykkets afhængighed af højden over jordoverfladen



Vi betragter et kasseformet udsnit af atmosfæren. Arealet af ende fladerne betegnes A . Kassen befinder sig i højden y over jordoverfladen. Kassen har højden Δy . Trykket på overside og underside betegnes $p(y + \Delta y)$ og $p(y)$.

Massefylden for luften i højden y betegnes $\rho(y)$.

Vi minder om at kraften på en flade med areal A er $F = pA$, hvor p er trykket på fladen.

Vi udtrykker nu, at forskellen i kraften på underside og overside er lig med tyngden af den luft, der befinder sig i kassen. Dette fordi luften i kassen er i hvile.

$$p(y)A - p(y + \Delta y)A = m_{\text{luft}} \cdot g = \rho(y)V_{\text{luft}}g = \rho(y)A\Delta yg$$

Divideres denne ligning med $A\Delta y$ får man:

$$(1.1) \quad \frac{p(y + \Delta y) - p(y)}{\Delta y} \approx \frac{dp}{dy} = -\rho(y)g$$

For at løse differentiallyigningen (1.1), må vi imidlertid kende endnu en sammenhæng mellem massefylden $\rho(y)$ og trykket $p(y)$. Den kan vi imidlertid få af :

1. Tilstandsligningen for ideale gasser: $PV = nRT$
2. Definition af molmassen: $m = nM \Leftrightarrow n = \frac{m}{M}$
3. Definition af massefylde: $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V$

Indsættes nemlig de to sidste ligninger i tilstandsligningen finder man:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT}P$$

Dette udtryk for massefylden indsættes så i (3.1), som herefter giver:

$$(1.2) \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{RT}p$$

Som bekendt aftager temperaturen ca. med 1°C for hver 200 m, man kommer til vejrs, men vi antager først, at temperaturen er konstant op igennem atmosfæren.

Løsningen til differentiallyigningen (1.2) er kendt som en eksponentialfunktion, så vi finder:

$$(1.3) \quad p(y) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}y}$$

Indsættes de kendte værdier for konstanterne:

$M=29 \text{ g/mol}$, $g = 9.82 \text{ m/s}^2$, $R= 8.31 \text{ J/(molK)}$ og $T = 273 \text{ K}$, finder man:

$$(1.4) \quad p(y) = p_0 e^{-1.2610^{-4}y} \quad \text{hvor } y \text{ skal måles i } m.$$

Dette giver et trykfald på 1,3% pr. 100 m og 12% pr. 1000 m.

Vi ser dernæst på løsningen til differentiaalligningen, hvis temperaturen aftager lineært med 1°C , pr. 200 m. Temperaturen ved jordoverflade sættes til $20^{\circ}\text{C} = 293 \text{ K}$. Temperaturen i højden y er derfor: $T = T(y) = 293 - y/200$. Differentiaalligninger bliver herefter:

$$(1.5) \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{Mg}{R(293 - \frac{y}{200})} p$$

Denne ligning løses på sædvanlig vis ved separation af de variable og integreres derefter:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \int_0^y \frac{1}{293 - \frac{y}{200}} dy$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{293R} \int_0^y \frac{1}{1 - \beta y} dy \quad \text{med} \quad \beta = \frac{1}{293 \cdot 200}$$

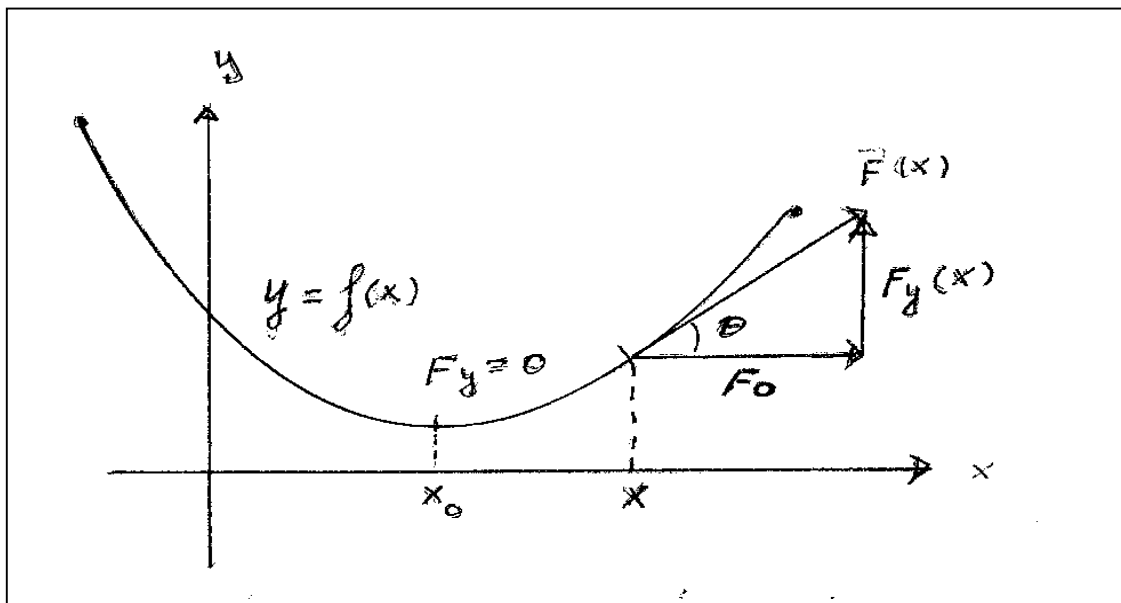
Ligningen integreres til at give:

$$(1.6) \quad \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Mg}{293R\beta} \ln(1 - \beta y) \Rightarrow$$

$$p = p_0 (1 - \beta y)^{\frac{Mg}{293R\beta}}$$

Udregnes trykket efter (1.6) giver det kun anledning til afvigelser fra (3.4) på 0,1 – 0,2 %.

1.2 Kædelinien



Kædelinien er betegnelsen for den kurve $y = f(x)$, som en "kæde" (tov, kabel) danner, når den er ophængt i to punkter.

$\vec{F}(x)$ betegner den tangentielle kraft, som kæden er påvirket af ved x . Den vandrette komponent F_0 er uafhængig af x , da kæden er i hvile i vandret retning.

Den lodrette komponent af kraften $F_y(x_0) = 0$ i minimumspunktet $x = x_0$, da kraften $\vec{F}(x)$ er vandret i dette punkt. Af dette følger, at $F_y(x)$ er lig med tyngdekraften, der virker på kæden fra x_0 til x .

For længden af kurven, givet ved $y = f(x)$, fra x_0 til x , har vi i integralregningen udledt udtrykket

$$(1.7) \quad l(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Hvis kædens masse pr. længdeenhed er μ , er $\mu \cdot l \cdot g$ tyngden af stykket l , hvor g som sædvanlig betegner tyngdeaccelerationen $g = 9,82 \text{ m/s}^2$.

Kraften $F_y(x) = F_0 \tan \theta$, hvor θ betegner tangenthældningen, og dermed $F_y(x) = F_0 f'(x)$.

Vi sammenfatter dette.

$$l(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad \text{og} \quad F_y(x) = F_0 f'(x) = \mu l(x) g \quad \Rightarrow$$

$$F_0 f'(x) = \mu g \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad \Leftrightarrow$$

$$(1.8) \quad f'(x) = \frac{\mu g}{F_0} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Af denne differentiaalligning ses, at $f'(x)$ er en stamfunktion til $\frac{\mu g}{F_0} \sqrt{1 + f'(x)^2}$ og der gælder

derfor: $f''(x) = \frac{\mu g}{F_0} \sqrt{1 + f'(x)^2}$, som er en differentiaalligning af typen:

$$(1.9) \quad y'' = k \sqrt{1 + y'^2}, \text{ hvor } k = \frac{\mu g}{F_0} \text{ er en positiv konstant.}$$

For at løse den, sætter vi $z = y'$ og dermed $z' = y''$. Her efter er ligningen reduceret til følgende 1.ordens differentiaalligning:

$$(1.10) \quad z' = k \sqrt{1 + z^2}$$

Ligningen (1.10) kan løses, men det kræver kendskab til de såkaldte *hyperbolske funktioner*.

1.11 Eksempel. Hyperbolske funktioner.

Man definerer hyperbolsk cosinus (skrives cosh) og hyperbolsk sinus (skrives sinh), ved ligningerne:

$$(1.12) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{og} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

navnet for disse funktioner kommer af, at de har mange egenskaber, som ligner dem vi kender fra $\sin x$ og $\cos x$. For eksempel får man ved differentiation:

$$(1.13) \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad \text{og} \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

Endvidere gælder grundrelationen mellem $\cos x$ og $\sin x$ i en lidt modificeret form:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(4e^x e^{-x})^2 = 1$$

Der gælder altså

$$(1.14) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Vi løser nu differentiaalligningen (1.10) ved separation.

$$z' = k \sqrt{1 + z^2} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = k \sqrt{1 + z^2} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = k dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int k dx$$

For at udregne integralet på venstre side, foretager vi substitutionen

$$z = \sinh t \Rightarrow dz = \cosh t dt \quad \text{hvor} \quad t = \sinh^{-1} z.$$

Vi får derefter

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int k dx \Leftrightarrow \int \frac{\cosh t dt}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} = \int k dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = kx + c_1 \Leftrightarrow \int dt = kx + c_1 \Leftrightarrow t = kx + c_1$$

$$\sinh^{-1} z = kx + c_1 \Leftrightarrow z = \sinh(kx + c_1)$$

Idet $y' = z$ integreres den sidste ligning til:

$$y = f(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx + c_1) + c_2$$

Substituerer vi nu tilbage i den oprindelige ligning $k = \frac{\mu g}{F_0}$ finder man sluttelig:

$$(1.15) \quad y = f(x) = \frac{F_0}{\mu g} \cosh\left(\frac{\mu g}{F_0} x + c_1\right) + c_2$$

Det sidste udtryk viser, at den kurve som en kæde indstiller sig efter er en hyperbolsk cosinus-funktion. Konstanterne c_1 og c_2 bestemmes ved begyndelsesbetingelserne.

2. Numerisk integration af differentiallyigninger

Som omtalt i indledningen af afsnittet om differentiallyigninger, er det kun få typer af ligninger, der har en analytisk løsning. Det sidste betyder, at man kan bestemme en forskrift $y = f(x)$ udtrykt med almindelige funktionstegn, som tilfredsstiller differentiallyigningen.

I andre tilfælde, er man henvist til at løse ligningen numerisk, hvilket betyder, at man starter med en begyndelsesbetingelse og regner sig frem i små skridt h .

Der findes adskillige metoder til at løse differentiallyigninger numerisk. Disse metoder er en del af den matematiske disciplin, der kaldes *numerisk analyse*.

Andre eksempler på numerisk analyse er f.eks. nulpunkter for en funktion ved Newton-Raphsons metode eller numerisk udregning af integraler ved Simpsons formel.

Vi skal kun se på den meste simple metode, som også kaldes for Eulers metode. Eulers metode er baseret på *det approksimerende 1. grads polynomium*, som er blevet omtalt i differentialregningen.

At en funktion $y = f(x)$ er differentiabel i x_0 er ensbetydende med.

$$(2.1) \quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h,$$

hvor $\varepsilon(h)$ er en *epsilonfunktion* defineret ved: $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

I det approksimerende 1. grads polynomium er $f(x_0+h)$ approksimeret ved 3 led. Det første er af nulte orden i h (en konstant), det næste er af første orden i h (proportional med h) og det sidste er af højere orden h (proportional med $\varepsilon(h)h$).

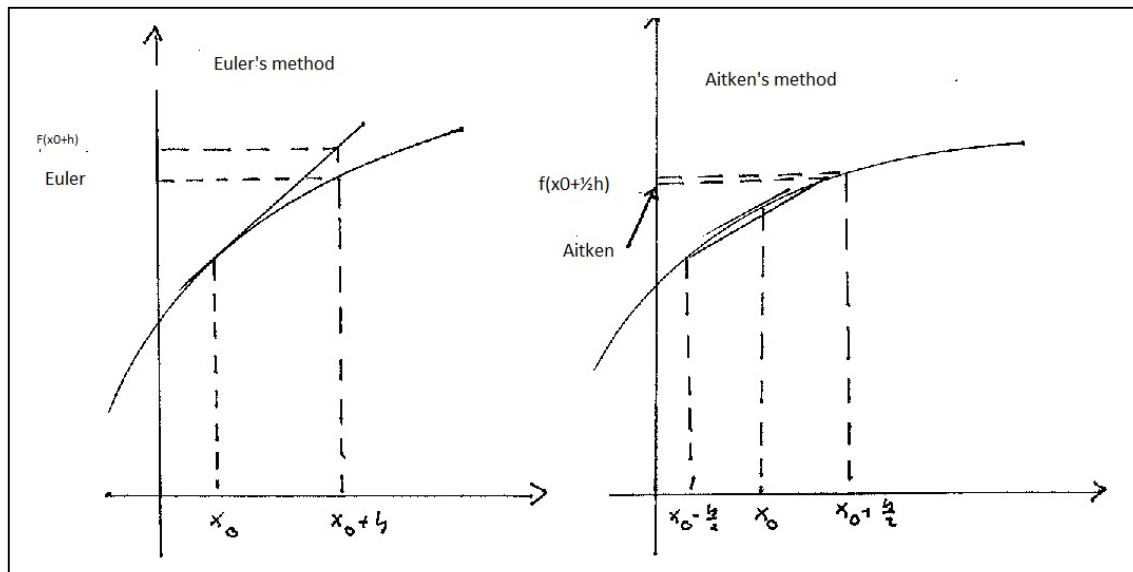
Hvis h er et lille tal, f.eks. $h=0,01$, så er $h^2=10^{-4}$, og af den grund får det sidste led mindre betydning, og betydningen aftager jo mindre h er.

Lad os antage, at vi har givet en differentiallyigning: $y' = g(y,x)$

Hvis (x_0, y_0) er begyndelsespunktet og (x_1, y_1) er det første punkt, så er Eulers metode derfor at approksimere $f(x_1) = f(x_0+h)$ med $f(x_0) + f'(x_0)h$. Dette vil give følgende værdier:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y_1 &= f(x_1) = f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h = y_0 + g(y_0, x_0)h \\ y_2 &= f(x_2) = f(x_1+h) = f(x_1) + f'(x_1)h = y_1 + g(y_1, x_1)h \end{aligned}$$

Fejlen i hvert skridt er proportional med h^2 , men hvis $f'(x)$ har samme fortegn, vil fejlene akkumulere, dvs. trække i den samme retning.



En bedre metode, som tilskrives Aitken, kan angives, hvis man som begyndelsesværdier kender $f(x_0 + \frac{h}{2})$, $f(x_0 - \frac{h}{2})$ og $f(x_0)$. Funktionsværdien $f(x_0 - \frac{h}{2})$ kan f.eks. være fundet ved hjælp af Eulers metode ud fra $f(x_0)$ med en skridtlængde på $\frac{1}{2}h$. Man bestemmer da $f(x_0 + \frac{h}{2})$ på følgende måde:

$$f(x_1) = f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 - \frac{h}{2}) + f'(x_0)h = f(x_0 - \frac{h}{2}) + g(y_0, x_0)h$$

$$f(x_2) = f(x_1 + \frac{h}{2}) = f(x_1 - \frac{h}{2}) + f'(x_1)h = f(x_1 - \frac{h}{2}) + g(y_1, x_1)h$$

Og sådan fremdeles. Man kan vise, at fejlen ved denne metode hvert skridt er proportional med h^3 . Ved at foretage en Taylor udvikling af $f(x_0 + \frac{h}{2})$, $f(x_0 - \frac{h}{2})$ i ligningen:

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 - \frac{h}{2}) + g(y_0, x_0)h$$

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{2} + f''(x_0)(\frac{h}{2})^2 + \varepsilon(h)h^2$$

$$f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) - f'(x_0)\frac{h}{2} + f''(x_0)(\frac{h}{2})^2 + \varepsilon(h)h^2$$

Hvis vi trækker den sidste ligning fra den første, finder man:

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 - \frac{h}{2}) + f'(x_0)h + \varepsilon_1(h)h^2$$

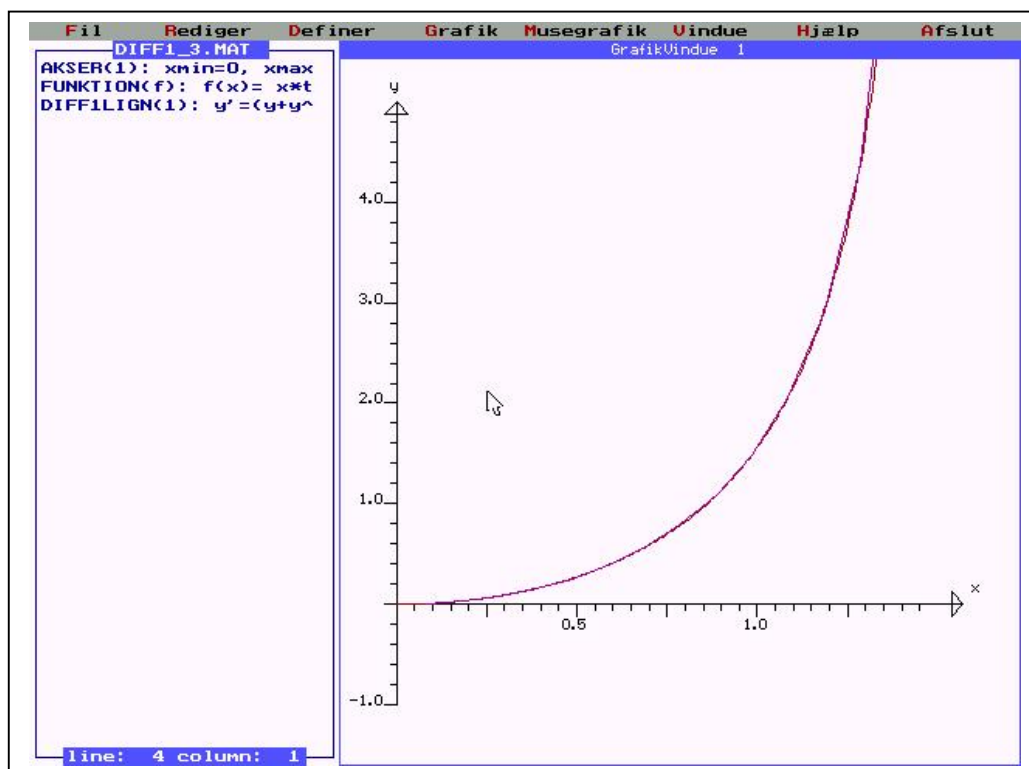
Hvoraf det ses at fejlen på $f(x_0 + \frac{h}{2})$ er af orden h^3 (større end h^2). Dette i modsætning til Eulers metode hvor: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$. (fejlen er af orden h^2)

Ovenfor er de to metoder forsøgt illustreret grafisk.

I praksis anvender man endnu mere avancerede metoder. De fleste programmer anvender nu den såkaldte Runge-Kutta 4. ordens metode, hvor fejlen er proportional med h^4 .

Nedenfor er vist den analytiske og den numeriske løsning af differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + y}{x} + x$, som vi tidligere har vist har løsningen: $y = x \cdot \tan(x)$.

Bortset fra meget små afvigelser, som lige så godt kan skyldes grafikken, fretræder de to kurver kun som en kurve, så den numeriske metode er meget god i dette tilfælde.



3. Differentialligningsmodeller

Når man taler om en model, mener man ofte et matematisk udtryk, der kan beskrive nogle data, som i almindelighed også er behæftet med statistisk usikkerhed. Når man anvender ordet model, så er det i almindelighed, fordi beskrivelsen ikke bygger på en teori, som ikke kan "forbedres", men blot er baseret på nogle rimelige ofte simple antagelser.

For det samme fænomen, kan man ofte opstille flere modeller, der hver for sig beskriver dele af data med rimelighed.

Som eksempel på en teori, kan man i matematikken nævne plangeometrien, differential- og integralregningen og i den klassiske fysik f.eks. Newtons gravitationslov og Einsteins relativitetsteori, hvorimod tilstandsligningen for ideale gasser er teori, hvis idealgasser eksisterede i naturen, (hvilket de næsten gør), men af samme grund nogen gange betegnes som en model. De eksempler vi skal se på her er imidlertid egentlige modeller, som langt fra rummer alle detaljerne fra det, som de repræsenterer.

3.1 Forløbet af en influenza epidemi

Udbredelse af en epidemi er i almindelighed en meget kompliceret proces, der ofte skyldes tilfældigheder. Den dødelige SARS, der blev udbredt i flere lande, værst i Kina og i det vestlige Canada, skyldes den omstændighed, at en fjerkræ-handler overnattede på et internationalt hotel, hvorefter sygdommen hurtigt blev spredt til flere lande gennem lufthavnsterminaler mv.

Det ligger i sagens natur, at man ikke kan opstille en matematisk model for en sådan udbredelse. Et bedre eksempel er de influenza epidemier, der med jævne mellemrum rammer Europa og USA. Her kan man godt opstille en simpel model for udbredelsen i en tæt population med N individer. Det kan f.eks. være en storby.

Da influenza smitte overføres ved dråbe infektion (udånding), er det væsentligt at hele populationen har mulighed direkte eller indirekte at være i fysisk kontakt med hinanden. Vi indfører først nogle betegnelser:

$R(t)$ = "Raske: Antallet af personer, der endnu ikke er smittede til tidspunktet t "

$S(t)$ = "Syge: Antallet af personer, der er smittede, og som kan overføre smitten til tidspunktet t .

$I(t)$ = "Immune: Antallet af personer, der har været syge, og som er blevet immune til tidspunktet t .

Der vil til ethvert tidspunkt gælde: $R(t) + S(t) + I(t) = N$

Da modellen er baseret på et sandsynlighedsargument, indfører vi også de tilsvarende brøkdelen:

$r(t) = \frac{R(t)}{N}$: Brøkdelen af "raske" personer.

$s(t) = \frac{S(t)}{N}$: Brøkdelen af "syge" personer.

$i(t) = \frac{I(t)}{N}$: Brøkdelen af "immune" personer.

Der vil til ethvert tidspunkt gælde: $r(t) + s(t) + i(t) = 1$

Som altid angiver differentiation med hensyn til tiden hastigheden, hvormed en størrelse ændres.

Hvis, der er mindst en "syg" vil $r(t)$ være en aftagende funktion. Hastigheden, hvormed den aftager vil (under den mest simple antagelse), være proportional med sandsynligheden for at en rask møder en syg. Denne sandsynlighed er igen proportional med antallet (brøkdelen) af syge gange (antallet) brøkdelen af raske. Vi kan således skrive, (hvor a er en proportionalitetskonstant):

$$(3.1) \quad \frac{dr}{dt} = -a \cdot r(t)s(t)$$

Da en syg person efter et tidsrum bliver rask (eller dør), må hastigheden, hvormed man bliver immun være proportional med brøkdelen af syge $s(t)$, (med en proportionalitetskonstant b).

$$(3.2) \quad \frac{di}{dt} = bs(t)$$

For at opstille en differentiallyingning for $s(t)$, anvender vi "normaliseringsbetingelsen" $r(t) + s(t) + i(t) = 1$, som vi differentierer:

$$\frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{dr}{dt} - \frac{di}{dt}$$

Indsætter vi heri de ovenfor fundne udtryk for $\frac{dr}{dt}$ og $\frac{di}{dt}$ finder man:

$$(3.3) \quad \frac{ds}{dt} = a \cdot r(t)s(t) - bs(t)$$

Man kan også direkte indse (3.3), idet en person, der ikke længere er rask, er blevet syg. Så brøkdelen af syge vokser med en faktor $a \cdot r(t)s(t)$, men aftager samtidig proportionalt med $s(t)$, da en syg bliver rask (eller dør) efter en vis periode.

De 3 "koblede differentiallyingninger (5.1) – (5.3) har ikke nogen kendt analytisk løsning. Differentiallyingningerne løses imidlertid på en Computer og et passende matematikprogram. (

(Programmet, som viser løsningerne på nedenstående grafer, er mit eget, som er DOS-baseret (ikke windows) program, skrevet i Turbo Pascal 7.0. (Kan ike afvikles på maskiner efter Windows XP)

Fastsættelsen af konstanterne a og b , kan f.eks. ske ved at sammenligne med aktuelle data, og her har vi ret vilkårligt valgt, at sætte $a=0.5$ og $b=0.33$. Den sidste konstant kan begrundes ved at en smittet person kan overføre smitte i "3 dage", så en tredjedel=0.333 bliver immune over et døgn.

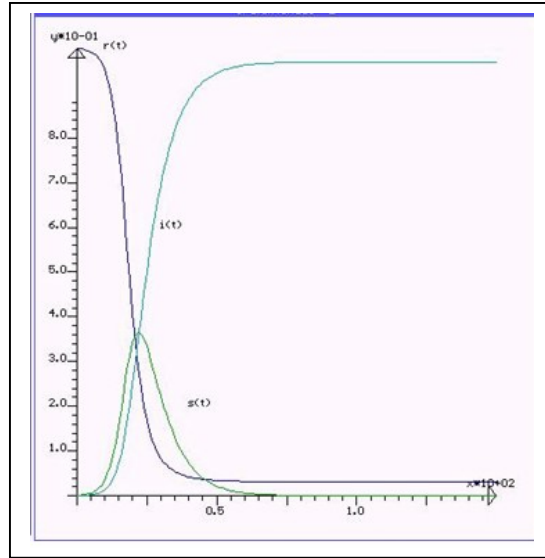
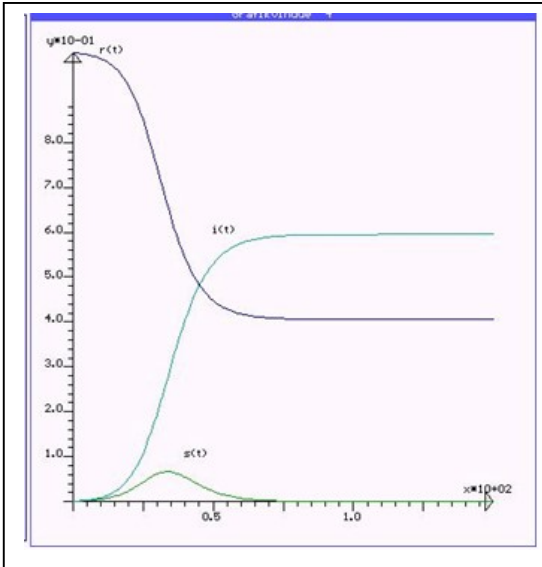
På den næste graf har vi igen sat $a=0.5$, men antaget at perioden, hvor man kan smitte er 7 dage, så $b=0.141$ ($=1/7$). I begge tilfælde ser man at antallet af syge vokser op, for derefter at falde igen.

Bemærk, at man i modellen antager at sygdommen udvikler sig helt frit, og at man ikke vaccinerer eller isolerer de syge, som det var tilfældet med SARS.

I det første tilfælde er det maximale antal syge 8%, mens det i det andet tilfælde er ca. 38% - en meget væsentlig forskel.

I det første tilfælde bliver ca. 58% smittede, mens det i det andet tilfælde er helt oppe på 96%.

Hvis man justerer på a , får man naturligvis helt andre kurver.



Modellen kan anvendes, hvis man i starten af en epidemi har nok indsamlet data til at kunne skønne over a og b , så kan man få et skøn over hvor længe epidemien vil vare og hvor mange sygdomstilfælde, man kan forvente.

3.2 Differentialligning for vekselvirkning mellem to dyrearter

En af de mere kendte matematiske modeller er den, som beskriver vekselvirkningen mellem to dyrearter. Vi vil her behandle to forskellige typer af vekselvirkning, nemlig *rovdyr-bytte* og to *arter, der konkurrerer om samme adgang til føde*.

Som i det forrige tilfælde, bygger modellen på nogle helt simple antagelser, der slet ikke tager højde for detaljer eller tilfældigheder, hvilket ellers altid er tilfældet i naturen. Alligevel kan modellen måske give en generel beskrivelse af udviklingen i naturen.

Lad os antage, at der i en skov lever ræve og mus. Antallet af ræve til tidspunktet t , betegner vi $r(t)$, mens vi betegner antallet af mus til tidspunktet t med $m(t)$.

Hvis der var tale om ubegrænset adgang til føde for begge parter, og hvis ingen af arterne var byttedyr for en anden art, så ville såvel $r(t)$ og $m(t)$ udvikle sig eksponentielt, og derfor tilfredsstillende differentialligningerne:

$$(3.4) \quad \frac{dr}{dt} = k_r r(t) \quad \text{og} \quad \frac{dm}{dt} = k_m m(t)$$

Nu er adgangen til føde for rævene afhængig af antallet af mus, og dette vil vi på den mest simple måde indbygge i modellen ved at gøre $k_r = k_r(m)$ til en funktion af $m = m(t)$, antallet af mus.

Hvordan $k_r(m)$ afhænger af m , kan vi ikke vide, andet end at $k_r(m)$ må være en voksende funktion af m . Den mest simple antagelse er derfor, at $k_r(m)$ er en voksende lineær funktion af m , således, at

$$(3.5) \quad k_r(m) = a \cdot m - b,$$

hvor a og b er positive konstanter, der er bestemt af hvad modellen skal anvendes på.

På helt tilsvarende vis kan man argumentere for at $k_m = k_m(r)$ er en *aftagende* funktion af $r = r(t)$, antallet af ræve. Vælger vi også her en lineær sammenhæng

$$(5.6) \quad k_m(r) = c - d \cdot r$$

får man to nye differentiaalligninger:

$$(5.7) \quad \frac{dr}{dt} = (a \cdot m - b)r \quad \text{og} \quad \frac{dm}{dt} = (c - d \cdot r)m$$

Bemærk ligheden med den *logistiske ligning*. Begge ligninger ville nemlig være logistiske, hvis man erstattede m med r i den første ligning og r med m i den anden ligning.

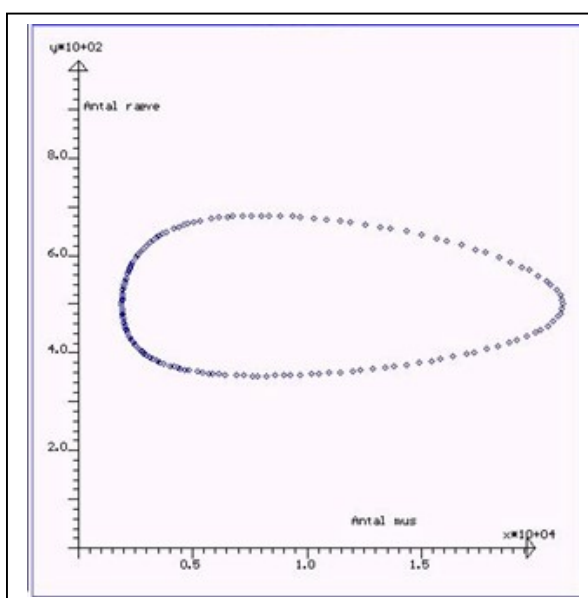
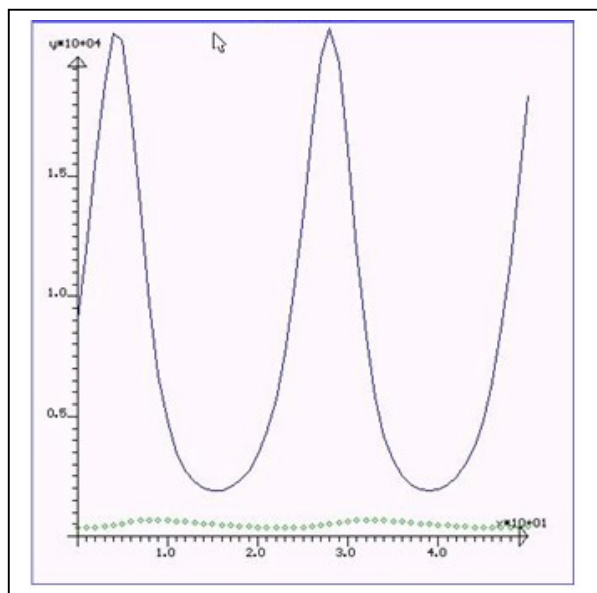
Disse ligninger har heller ikke nogen analytisk løsning, men de kan løses numerisk på samme måde, som vi gjorde det i det første eksempel. Nedenfor er vist en løsning, hvor vi har valgt begyndelsesværdierne $(m_0, r_0) = (9000, 354)$, indsamlet fra en svensk skov. De indgående konstanter er fastlagt ved $a = 0,00001$, $b = 0.08$, $c = 1$, $d = 0.002$.

Man ser tydeligt, at en periode med mange mus får bestanden af ræve til at vokse, som derefter får bestanden af mus til at falde, som får bestanden af ræve til at falde, som får bestanden af mus til at vokse.

Der er et cyklisk forløb, og de to arter lever i en slags økologisk symbiose.

Det bemærkelsesværdige er, at selv om det er rovdyr og byttedyr, så kan ingen af dem overleve uden den anden. Hvis man udrydder alle rævene, vil musenes antal vokse ud over den grænse, hvor de kan finde føde til alle. Resultatet er eventuelt, at de alle dør.

Figuren nedenfor til venstre viser bestanden af ræve og bestanden af mus, som funktion af tiden.



Dividerer vi den sidste af differentialligningerne (3.7) op i den første finder vi følgende ligning

$$(3.8) \quad \frac{dr}{dm} = \frac{(a \cdot m - b)r}{(c - d \cdot r)m}$$

Denne ligning kan imidlertid separeres til at give:

$$(3.9) \quad \frac{(c - d \cdot r)}{r} dr = \frac{(a \cdot m - b)}{m} dm$$

Ligningen kan nu integreres.

$$(3.10) \quad \int \left(\frac{c}{r} - d\right) dr = \int \left(a - \frac{b}{m}\right) dm \Leftrightarrow c \ln(r) - r \cdot d = a \cdot m - b \ln(m) + k$$

Hvor k er en integrationskonstant, der er bestemt af begyndelsesbetingelserne.

Ligningen (3.10) er imidlertid transcendent og kan derfor hverken løses mht. til r eller m .

Man kan dog slutte sig til nogle generelle egenskaber ud fra (3.9).

For $r = \frac{c}{d}$ er $dm=0$, og har fortegnsvariationen $+$, 0 , $-$, hvis dr er positiv, og fortegnsvariationen $-$, 0 , $+$ hvis dr er negativ.

Dette viser at m har såvel et maximum og et minimum og bevæger sig mellem disse to værdier. Noget helt tilsvarende kan siges om r .

I stedet for at anvende (3.10), for at fastlægge sammenhængen mellem r og m grafisk, vil vi igen løse de to differentialligninger (3.7) numerisk, men afbilde $(r(t), m(t))$ som en parameterkurve, som vist på grafen ovenfor til højre.

Indata er taget fra en skov i Sverige, hvor vi har valgt begyndelsesbetingelserne:

$$(m_0, r_0) = (9000, 354), \text{ and } a = 0,00001, \quad b = 0.08, \quad c = 1, \quad d = 0.002.$$

Ovenstående graf er sådan set ikke overraskende, men den indeholder nogle generelle træk, som man ikke kan slutte sig til uden anvendelsen af en matematisk model.

3.3 Konkurrerende arter

Vi skal nu se på et eksempel på en model, der beskriver to dyrearter, der konkurrerer om en begrænset mængde føde. Vi vil holde de to populationer anonyme, og betegne dem med x og y , så $x(t)$ betegner antallet af x individer til tidspunktet t og $y(t)$ betegner antallet af y individer til tidspunktet t .

Den logistiske ligning er en model for en population, hvis størrelse har en øvre grænse. Dette er f.eks. tilfældet, hvis der kun er en begrænset mængde føde til rådighed. Det er derfor rimeligt i første omgang, at opstille den logistiske ligning for de to populationer.

$$(3.11) \quad \frac{dx}{dt} = a_x x(M_x - x) \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dt} = a_y y(M_y - y)$$

Imidlertid hæmmer de to populationer hinandens vækst, så vi tilføjer et "hæmmende" led for den anden population i hver af de to ligninger.

$$(3.12) \quad \frac{dx}{dt} = a_x x(M_x - x - b_x y) \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dt} = a_y y(M_y - y - b_y x)$$

Før vi ser på eksempler på en numerisk løsning, vil vi lave nogle generelle betragtninger.

Hvis $dx/dt = x'(t)=0$ er bestanden af x er konstant, (der er i ligevægt). Tilsvarende, hvis $dy/dt = y'(t)=0$ er y bestanden konstant. Dette føre til ligningerne.

$$(3.13) \quad a_x x(M_x - x - b_x y) = 0 \quad \text{og} \quad a_y y(M_y - y - b_y x) = 0$$

Ligninger har ud over de trivielle løsninger: $x = 0 \wedge y = M_y$ eller $y = 0 \wedge x = M_x$

Løsningerne

$$(3.14) \quad M_x - x - b_x y = 0 \quad \text{og} \quad M_y - y - b_y x = 0$$

eller

$$x + b_x y = M_x \quad \text{og} \quad y + b_y x = M_y$$

De to ligninger fremstiler hver en ret linie i $x - y$ planen. Hvis linierne har et skæringspunkt, har vi en samtidig ligevægt for de to populationer. Ligningssystemets determinant er imidlertid

$$D = b_x b_y - 1, \quad \text{så} \quad D \neq 0 \Leftrightarrow b_x b_y \neq 1.$$

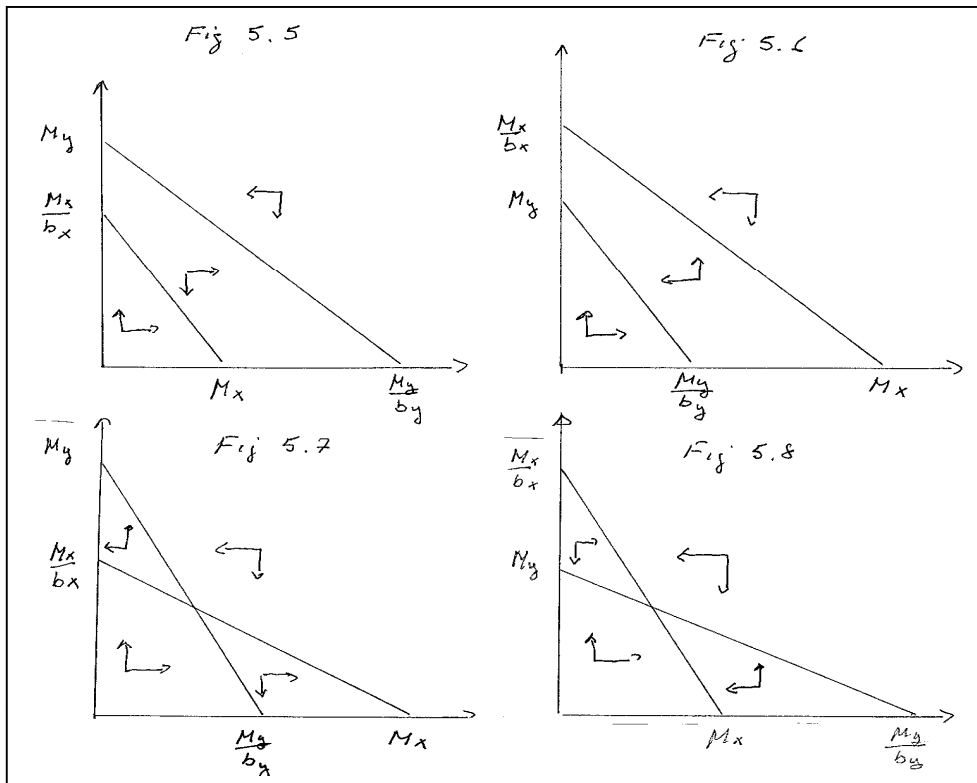
Hvis $b_x b_y = 1$ eller $x < 0$ eller $y < 0$, så er der ingen fælles ligevægtstilstand (andet end den trivielle $x=0$ eller $y=0$) for de to populationer.

Selv om der findes en ligevægtstilstand, så er det ikke sikkert, at den er *stabil*. Stabilitet kræver, at en forskydning fra ligevægtsstilstanden fører tilbage til ligevægtstilstanden og ikke længere bort fra den.

Som eksempel på en stabil ligevægt, kan man tænke på en bold, der ligger i bunden af en halvkugleformet skål. En forskydning fra ligevægtstilstanden vil føre kuglen tilbage mod bunden. Er bolden derimod placeret på toppen af en kugleskal, er det en ustabil ligevægt, idet enhver forskydning vil føre den bort fra "ligevægten".

Nedenfor er vist 4. grafer fig. (5.5) til fig. (5.8), hvor de to linier (3.14) er indtegnet for forskellige værdier af de indgående parametre. Endvidere er fortegnene for dx/dt og dy/dt markeret med pile. Som man ser, er der ingen ligevægt på de to første figurer. Enhver forskydning vil føre til udryddelse af den ene art. På fig. (5.7) er der et fælles punkt med ligevægt, men denne ligevægt er ikke stabil. I fig. (5.8), derimod er der en stabil ligevægtstilstand, som kan fortolkes på følgende måde:

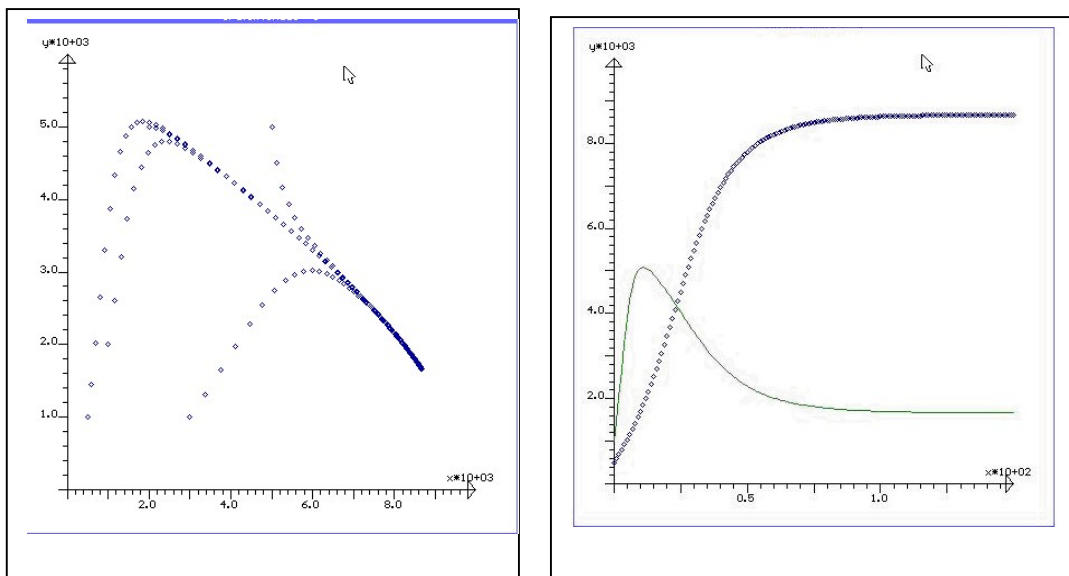
Hvis der for begge arter gælder, at den ene art hæmmer den anden art mindre end den hæmmer sig selv, så er der en mulighed for stabil ligevægt.



$M_x = 10000; a_x = 0,2; b_x = 0,8; M_y = 6000; a_y = 0,5; b_y = 0,5.$

Nedenfor til venstre er vist en løsning, hvor man har afsat $(x(t), y(t))$, men hvor man har startet med 5 forskellige begyndelseshværdier. Som det fremgår, konvergerer løsningen i alle tilfælde mod den samme ligevægtstilstand (8400, 1500).

Nedenfor til højre er vist separate grafer for $x(t)$ og $y(t)$, svarende til en af graferne til venstre. Bemærk, at disse værdier opfylder betingelserne på fig. (5.8).



Efter nogle ret hidsige ændringer i begyndelsen stabiliserer de sig ved det samme konvergenspunkt, som vist på den første graf.