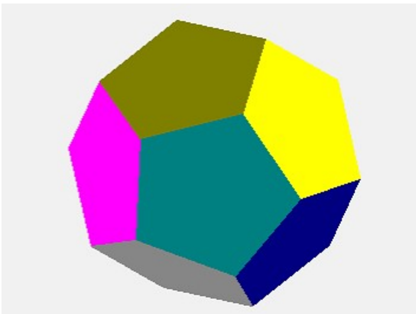
Elementær Matematik

Differentialligninger



Ole Witt-Hansen 2008

Indhold

1. *Differentialligninger af første orden*

En differentialligning af *første orden* er en ligning, hvor der foruden en funktion $y=f(x)$ indgår differentialkvotienten af denne funktion $y' = f'(x)$. Hvis også den 2. afledede $y'' = f''(x)$ indgår, så siges differentialligningen at være af 2. orden. Vi minder om skrivemåden:

(1.1) $$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

samt definitionen af differentialet af en funktion

(1.2) $$dy = f'(x)dx\,.$$

Formelt kan man sige, at differentialet dy fås ved at "gange over med" dx i (1.1).

En førsteordens differentialligning, kan skrives:

$$\frac{dy}{dx} = H(y,x)\,,$$

hvor H er en vilkårlig (kontinuert) funktion af y og x.
At løse differentialligningen vil sige at bestemme alle de funktioner: $y = f(x)$, der opfylder

$$f'(x) = H(f(x),x).$$

Vi illustrerer dette med et eksempel:

1.3 Eksempel.

Vi ser på differentialligningen: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y}{x} + x$. Differentialligningen kan ikke umiddelbart løses, men vi ”gætter” på løsningen: $y = x\cdot\tan(x)$. Vi differentierer:

$$y' = x\cdot(1 + \tan^2 x) + \tan x = x\tan^2 x + \tan x + x = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} + x = \frac{y^2+y}{x} + x$$

Det er herefter nemt at indse, at alle funktionerne: $y = x\cdot\tan(x+c)$. er løsninger til differentialligningen ovenfor.
Det er helt karakteristisk, at løsningerne til en 1. ordens differentialligning, kun er bestemt på nær én *integrationskonstant*.

Eksemplet ovenfor er ikke karakteristisk for de differentialligninger vi skal se på, men det viser blot, hvorledes man kan undersøge om en funktion er løsning.

1.1 Første ordens differentialligninger

Vi har allerede set på differentialligninger, hvor y ikke optræder i ligningen, dvs. en ligning af formen:

(1.4) $$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Der som bekendt har løsningen:

(1.4) $$y = \int f(x)dx$$

eller

$$y = F(x) + c; \quad c \in R, \text{ hvor } \quad F'(x) = f(x)$$

En lineær differentialligning af 1.orden er en ligning, hvor y' og y kun optræder i 1. potens (lineært).
En sådan ligning kan skrives:

$$g_1(x)\frac{dy}{dx} + g_2(x)y = h_1(x)$$

Hvis vi indskrænker os til intervaller, hvor $g_1(x) \neq 0$, kan vi dividere med $g_1(x)$ og ligningen får da udseendet:

(1.5) $$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$$

hvis $h(x) = 0$ siges ligningen at være homogen:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0$$

Man kan angive den fuldstændige løsning til en 1. ordens differentialligning, men før vi viser dette, skal vi se på differentialligninger, hvor man kan *separere* afhængigheden af y og x på hver side af lighedstegnet. Vi skriver en sådan ligning:

(1.6) $$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$, hvor $g(y)$ og $h(x)$ er kontinuerte funktioner.

Lad $G(y)$ være en stamfunktion til $g(y)$ og $H(x)$ være en stamfunktion til $h(x)$. Der gælder altså: $G'(x)=g(x)$ og $H'(x)=h(x)$. Vi vil da vise følgende:

1) Hvis y er bestemt ved ligningen $G(y)=H(x) + c$, så er y en løsning til differentialligningen (1.6).

2) Hvis $y = f(x)$ er en løsning, så tilfredsstiller den ligningen: $G(f(x)) = H(x) + c$.

Når vi har vist dette, har vi bevist at samtlige løsninger til differentialligningen er givet ved:

$$G(y) = H(x) + c.$$

Vi viser først 1), idet vi differentierer $G(y)=H(x) + c$ efter reglerne for differentiation af sammensat funktion:

$$G'(y)y' = H'(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y)y' = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$

Som viser at y , bestemt ved $G(y) = H(x) + c$ er løsning til differentialligningen.

Vi viser dernæst 2, idet $y = f(x)$, antages at være en løsning. Vil da vise at $G(f(x)) = H(x) + c$, hvor c er en konstant, eller at $G(f(x)) - H(x) = c$. Vi differentierer venstresiden af ligningen

$$(G(f(x)) - H(x))' = G'(f(x))f'(x) - H'(x) = g(f(x))f'(x) - h(x) = g(y)y' - h(x) = 0$$

Vi har i det sidste udtryk anvendt, at $y = f(x)$ er en løsning, så $g(y)y' = h(x)$.
Differentialkvotienten $(G(f(x))\text{-}H(x))'$ er identisk nul, hvilket medfører at:

$$G(f(x)) - H(x)=c \Leftrightarrow G(f(x)) = H(x) + c,$$

hvormed sætningen bevist.

I praksis løses ligningen (1.6) ved separation af de variable og integration i følgende skridt:

(1.7) $$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y)dy = h(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y)dy = \int h(x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$G(y) = H(x) + c$$

Hvor betydningen af G og H er den samme som før.

Vi kan herved se, at vi ved separation og integration, netop når frem til den fuldstændige løsning. Når vi ikke fra starten gjorde dette er det fordi regning med differentialer er matematisk "uldent". Bemærk tilstedeværelsen af integrationskonstanten c. c bestemmes ved at løsningen $y = f(x)$ skal gå gennem et punkt (x_0, y_0), altså så $y_0 = f(x_0)$.

(1.8) Man kan vise følgende (men vi undlader beviset, da det er ret abstrakt):

Eksistens- og entydighedssætning for differentialligninger af førsteorden.

Hvis h(x) er defineret og kontinuert i et interval I og g(y) er defineret og kontinuert i et interval J, så findes der netop en løsning y= f(x), som går gennem punktet (x_0, y_0)*, hvor* $x_0 \in I \wedge y_0 \in J$.

(1.7) repræsenterer den generelle metode til løsning af første ordens differentialligninger, der kan separeres.

1.2 Eksempler på 1. ordens differentialligninger

1.8 Eksempel.
Vi vil bestemme løsningerne til differentialligningen

(1.9) $$\frac{dy}{dx} = ky$$

hvor k er en reel konstant forskellig fra 0.
Fra differentialregningen ved vi, at eksponentielle funktioner har den egenskab, at differentialkvotienten er proportional med funktionen selv. Vi gætter derfor på løsningen $y = c{\cdot}e^{kx}$. Ved differentiation fås:

$$y' = ce^{kx} \cdot k = k \cdot ce^{kx} = ky$$

Som viser at $y = c \cdot e^{kx}$ er løsning til ligningen.
Vi vil nu løse ligningen mere formelt og dermed godtgøre at $y = c \cdot e^{kx}$ hvor. $c \in R$

Vi separerer derfor ligningen som det er vist i (1.7). Vi deler løsningen op i 2 tilfælde:

1) Man ser umiddelbart at $y = 0$ er løsning til differentialligningen. Denne løsning kaldes for nulløsningen.
2) $y \neq 0$. Man udregner integralerne på begge side.

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = kdx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = kdx$$

$$\ln|y| = kx + c_1 \;\Leftrightarrow\; |y| = e^{kx+c_1} \;\Leftrightarrow\; |y| = e^{c_1}e^{kx} \;\Leftrightarrow\; y = e^{c_1}e^{kx} \;\vee\; y = -e^{c_1}e^{kx} \;\Leftrightarrow$$

(1.9) $$y = ce^{kx} \;,\; c \in R$$

Den sidste omskrivning er fremkommet, idet $e^{c_1} \in R_+$ og $c = 0$ svarer til nulløsningen.
Denne opdeling er karakteristik for de fleste af denne type differentialligninger, og man vil i almindelighed ikke gentage detaljerne, når man opskriver løsningen. Dog er det vigtigt, at man husker nulløsningen.

1.10 Eksempel
Differentialligningen ovenfor er en af de mest hyppige i mange videnskaber. Fysik, økonomi og især biologi. I disse videnskaber vil x ofte (men ikke altid) betegne tiden t. Når man differentierer med hensyn til tiden, bestemmer man hastigheden, f.eks. væksthastigheden for en population.
Sammenlign f.eks. med definitionsligningerne for hastighed og acceleration:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad og \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$, som i grænsen, hvor $\Delta t \to 0$ bliver til en differentialkvotient.

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad og \quad a = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Når y' er en hastighed skrives ligningen og dens løsning da:

(1.9) $$\frac{dy}{dt} = ky \;\Leftrightarrow\; y = ce^{kt} \;,\; c \in R$$

1.11 Eksempel. Eksponentiel vækst.

For en population (bakterier, en befolkning) med ubegrænset adgang til føde, kan man med god tilnærmelse antage, at for små tidsrum Δt antage at tilvæksten i populationen Δy er proportional med populationens størrelse y og med Δt .
Dette kan man udtrykke:

$$\Delta y = ky\Delta t \;\Leftrightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

Ved at lade Δt gå imod nul, genfinder man differentialligningen (1.9)

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Leftrightarrow\; y = ce^{kt} \;,\; c \in R$$

Hvis en population har en vækst, der fører til differentialligningen (1.9) taler man om *eksponentiel vækst*.
Det viser sig at talrige biologiske organismer, herunder befolkningsvækst i en begrænset tidsperiode kan beskrives ved eksponentiel vækst. Det er lige så klart, at sammenhængen vil bryde sammen på et eller andet tidspunkt, da en eksponentialfunktion går (hurtigt) mod uendelig.

I afsnittet om eksponentialfunktioner, så vi, at man kan beregne fordoblingskonstanten $T_2 = \dfrac{\ln 2}{k}$.

1.12 Eksempel.
Vi skal nu se på en type differentialligning, der minder meget om (1.9), og som løses på samme måde.

(1.13) $$\frac{dy}{dx} = ay + b$$

Indfører vi hjælpevariablen $z = y + \frac{b}{a} \Leftrightarrow az = ay + b$ gælder: $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ og hermed:

$$\frac{dy}{dx} = ay + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dx} = az \quad \Leftrightarrow \quad z = ce^{ax} \quad \Leftrightarrow \quad y = ce^{ax} - \tfrac{b}{a}$$

Vi ser at løsningen svarer til eksponentiel vækst, blot parallelforskudt på y-aksen.

1.13a Eksempel
En sø, som har et volumen V, får tilført u liter forurenet vand pr. døgn, brøkdelen af forurening betegnes q. Fra søen udledes den samme mængde vand u pr. døgn. Vi vil opstille en differentialligning, der angiver den brøkdel y, som søen er forurenet med.

Den hastighed dy/dt , hvormed søen forurenes har to bidrag: Det tilførte, som er $q\frac{u}{V}$, og det afledte, som er $y\frac{u}{V}$.

Differentialligningen bliver herefter: $\frac{dy}{dt} = q\frac{u}{V} - y\frac{u}{V} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{u}{V}(q - y)$

Det ses umiddelbart at differentialligningen er af typen (1.13), hvorfor vi direkte kan opskrive løsningen:

$$y = ce^{-\frac{u}{V}t} + q$$

Antager vi at søen er ren til tidspunktet t = 0, finder man, at $0 = c + q \Leftrightarrow c = -q$, hvorefter vi kan opskrive løsningen:

$$y = -qe^{-\frac{u}{V}t} + q \quad \Leftrightarrow y = q(1 - e^{-\frac{u}{V}t})$$

Da $e^{-\frac{u}{V}t} \rightarrow 0 \quad for \quad t \rightarrow \infty$, vil søen ende med at have den samme forureningsgrad som det tilførte spildevand.
Vi vil nu bestemme forureningsgraden, når der er tilført forurenet vand, svarende til halvdelen af søens volumen.

Hermed er $ut = ½V$, så vi finder $y = q(1 - e^{-\frac{1}{2}}) =$ 0.393q svarende til 39,3%

1.14 Eksempel. Logistisk vækst.
Antagelsen om ubegrænset adgang til føde er kun realistisk i begrænsede tidsrum. En mere realistisk model får man, hvis man antager at *væksthastigheden* er proportional med populationens størrelse (som ved eksponentiel vækst), men også proportional med afstanden til en øvre grænse M for populationens størrelse.
Hvorvidt denne model afspejler en populations udvikling, kan man kun afgøre ved at afprøve modellen på en virkelig population. Da vi eksplicit taler om vækst, anvender vi t (tiden) som uafhængig variabel.
Vi kan nu opskrive differentialligningen:

(1.15) $$\frac{dy}{dt} = ay(M - y)$$

Hvor $M - y$ er afstanden til den øvre grænse for populationen.

Ligningen løses som før ved separation, idet man bemærker at $y = 0$ og $y = M$ begge er trivielle løsninger til ligningen.

$$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int a dt$$

Det første integral er ikke så ligetil at løse, men det udregnes ved en teknik, der kaldes for udvikling på partialbrøker. Vi forsøger således at skrive integranden, som en sum af to brøker, hver kun med en faktor.

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{p}{y} + \frac{q}{M-y} = \frac{p(M-y)+qy}{y(M-y)} = \frac{pM+(q-p)y}{y(M-y)}$$

Hvis denne identitet skal gælde for alle y følger det at $q = p$ og $pM = 1$, så $p = q = \frac{1}{M}$. Idet vi ganger igennem med M, opnår vi differentialligningen:

$$\int (\frac{1}{y} + \frac{1}{M - y})dy = \int aMdt \quad \Leftrightarrow \quad \ln y - \ln(M - y) = aMt + k$$

Vi har her antaget at $y > 0$ og $y < M$, som var forudsætningen for modellen. Ved reduktion ved hjælp af logaritmeregneregler får man:

$$\ln y - \ln(M - y) = aMt + k \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{y}{M-y} = aMt + k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{M - y} = e^{aMt+k}$$

Løser vi denne ligning med hensyn til y, og sætter $e^k = c$, hvor c er en positiv konstant får man løsningen:

(1.15) $$y = cM \frac{e^{aMt}}{1 + ce^{aMt}} \quad \Leftrightarrow \quad y = cM \frac{1}{e^{-aMt} + c}$$

Ofte ser man i løsningen c erstattet med 1/c, hvorefter løsningen får den simple form:

(1.15) $$y = \frac{M}{1+ce^{-aMt}}$$

a og M er fastlagt ud fra modellen, mens c er fastlagt ved populationens størrelse på et givet tidspunkt.

1.15 Eksempel
I en sø er fosforkoncentrationen en funktion $y = f(t)$ af tiden. I en model forudsættes det at der pr. døgn udledes en konstant mængde fosfor til søen, mens den mængde der ledes bort fra søen er proportional med koncentrationen. Man kan opstille en differentialligning, der udtrykker, at den relative tilvækst i fosforkoncentration i tidsrummet Δt er en konstant gangen Δt minus en konstant gange y gange Δt.

$$\frac{\Delta y}{y} = a\Delta t - by\Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = y(a - by) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = by(\frac{a}{b} - y)$$

Ved at lade Δt gå imod nul får man en differentialligning, som man genfinder som den logistiske ligning.

$$\frac{dy}{dt} = by(\frac{a}{b} - y)$$

For den pågældende sø er b = 0,00001 og a/b =200. Endvidere opfylder *f* ligningen f(475) = 107.
Bestem en forskrift for *f*, og beregn *f*(1000), samt væksthastigheden for fosforkoncentrationen til *t* =1000.
Ved at indsætte f(475) = 107 i løsningsformlen (1.15) finder man:

$$107 = \frac{200}{1+ce^{-0,002\cdot 475}} \Leftrightarrow 107ce^{-0,95} = 200-107 \Leftrightarrow c = \frac{93}{107e^{-0,95}} = 2,20$$

Løsningen bliver da

$$y = \frac{200}{1+2,20e^{-0,002t}} \qquad \text{med} \qquad f(1000) = \frac{200}{1+2,20e^{-2}} = 154$$

Væksthastigheden er *dy/dt*, og den bestemmes ved direkte indsættelse i differentialligningen.

$$\frac{dy}{dt} = 0,00001\cdot y(200-y) = 0,00001\cdot 154(200-154) = 0,0708$$

1.3 *Fuldstændige løsning til den lineære differentialligning af første orden*

Vi vil løse ligningen:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x) \tag{1.16}$$

Hvor vi antager at $g(x)$ og $h(x)$ er kontinuerte funktioner, så de har en stamfunktion.
Hvis $G(x)$ betegner en stamfunktion til $g(x)$, så $G'(x) = g(x)$, ganger vi ligningen igennem med $e^{G(x)}$, herved får man

$$e^{G(x)}\frac{dy}{dx} + e^{G(x)}g(x)y = e^{G(x)}h(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{G(x)}y) = e^{G(x)}h(x)$$

Omskrivningen følger af :

$$\frac{d}{dx}(e^{G(x)}y) = e^{G(x)}\frac{dy}{dx} + e^{G(x)}G'(x)y = e^{G(x)}\frac{dy}{dx} + e^{G(x)}g(x)y$$

Ligningen

$$\frac{d}{dx}(e^{G(x)}y) = e^{G(x)}h(x)$$

kan umiddelbart integreres til

$$e^{G(x)}y = \int e^{G(x)}h(x)dx \Leftrightarrow y = e^{-G(x)}\int e^{G(x)}h(x)dx \tag{1.17}$$

Hvilket er den fuldstændige løsning, idet man husker på at det ubestemte integral altid kræver en arbitrær konstant (integrationskonstant).

1.18 Eksempel.

Bestem den løsning til differentialligningen: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$, hvor $x > 0$ og som går gennem (2,-3).

Vi finder direkte

$$G(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x \quad \Rightarrow \quad e^{G(x)}=e^{\ln x}=x \quad \Rightarrow \quad e^{-G(x)}=e^{-\ln x}=x$$

Ved indsætning i løsningsformlen finder man da:

$$y=\frac{1}{x}\int x\cdot x^2dx=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^4+c\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^3+\frac{c}{x}$$

Løsningen gennem (2,-3) findes ved indsættelse af (x,y)= (2,-3) i løsningsformelen: $-3=2+\frac{c}{2} \Leftrightarrow c=-10$

$$y=\frac{1}{4}x^3-\frac{10}{x}$$

2. *Differentialligninger af anden orden*

En differentialligning af anden orden er en ligning, hvor den anden afledede af en funktion indgår. Vi vil indskrænke os til at betragte ligninger af formen

(2.1) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm k^2y, \quad \text{hvor } k\neq 0$$

Tilfældet k = 0 ses umiddelbart at give løsningen $y = c_1x + c_2$

Denne type ligninger, kan ikke løses på samme måde som første ordens ligninger, men opgaven er den samme, at undersøge om der findes løsninger og i givet fald finde dem alle sammen.

Vi viser først sætningen:

Hvis f_1 og f_2 er løsninger til differentialligningen (2.1)*, så er enhver linearkombination:*

(2.2) $$f(x)= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

også en løsning.

Vi skriver nu differentialligningen på formen

(2.3) $$\frac{d^2y}{dx^2}=my \text{ , hvor } m=\pm k^2$$

Vi differentierer nu (2.2) to gange og får ifølge regnereglerne for differentiation.

$$f''(x) = c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x)$$

da såvel f_1 *og* f_2 er løsning til (2.3), gælder der:

$$f_1''(x) = m\, f_1(x) \text{ og } f_2''(x) = m\, f_2(x),$$

hvoraf følger:

$$f''(x) = c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) = c_1\, m\, f_1(x) + c_2\, m\, f_2(x) = m(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = m\, f(x)$$

hvilket viser, at $f(x)$ er en løsning til differentialligningen (2.3).

2.1 *Wronski-determinanten*

I det følgende får vi brug for løsningsformlen for to lineære ligninger med to ubekendte med *determinantmetoden*. Ligningssystemet

(2.4) $$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \textit{har determinanten} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Hvis $D \neq 0$, *har ligningssystemet* (2,4) *netop en løsning givet ved*

(2.5) $$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{og} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

For at bestemme samtlige løsninger til differentialligningen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = my,$$

indfører man den såkaldte *Wronski*-determinant af to differentiable funktioner:

(2.6) $$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

2.7 Eksempel

Wronski-determinanten kan udregnes for to vilkårlige differentiable funktioner. F.eks. $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sin x$.

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} x^2 & \sin x \\ 2x & \cos x \end{vmatrix} = x^2 \cos x - 2x \sin x$$

I almindelighed er Wronski-determinanten en funktion af x, men vi vil nu vise den lidt overraskende sætning:

(2.8) *Hvis* f_1 *og* f_2 *er løsninger til differentialligningen* (2.3)*, så er Wronski-determinanten konstant.*

$$W(f_1, f_2) = c \quad \Leftrightarrow \quad W'(f_1, f_2) = 0$$

Differentierer man $W(f_1, f_2) = f_1 f_2' - f_1' f_2$ efter produktreglen for differentiation for de to faktorer fås:

$$W'(f_1, f_2) = (f_1 f_2' - f_1' f_2)' = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f''_1 f_2 - f_1' f_2' = f_1 f_2'' - f''_1 f_2$$

Anvender man nu, at f_1 og f_2 er løsninger til differentialligningen (2.3), således at

$$f_1'' = m f_1 \quad og \quad f_2'' = m f_2$$

finder man:

$$W'(f_1, f_2) = f_1 f_2'' - f''_1 f_2 = f_1 m f_2 - m f_1 f_2 = m(f_1 f_2 - f_1 f_2) = 0$$

så Wronski-determinanten er konstant for to vilkårlige løsninger til (2.3).
Vi er da klar til at vise hovedsætningen om differentialligningen (2.3).

Hvis f_1 *og* f_2 *er løsninger til differentialligningen*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = my$$

For hvilket det gælder at $W(f_1, f_2) \neq 0$ (*en konstant forskellig fra* 0)*, så kan samtlige løsninger* $y = f(x)$ *skrives som en linearkombination af de to løsninger.*

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

Vi har allerede vist, at $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ er løsning, hvis $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er løsninger, så vi mangler blot, at vise at alle løsninger kan skrives på denne form.

Hvis man ikke stiller krav om, at c_1 og c_2 er konstanter, så kan man altid bestemme funktioner $c_1(x)$ og $c_2(x)$, der tilfredsstiller ligningssystemet:

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= f(x) \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &= f'(x) \end{aligned}$$

Determinanten for ligningssystemet er jo netop

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} ,$$

som vi har forudsat forskellig fra nul. Løsningerne $c_1 = c_1(x)$ and $c_2 = c_2(x)$ kan ifølge løsningsformlen for ligningssystemet skrives:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} f & f_2 \\ f' & f_2' \end{vmatrix}}{W(f_1, f_2)} = \frac{W(f, f_2)}{W(f_1, f_2)} \quad \wedge \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f \\ f_1' & f' \end{vmatrix}}{W(f_1, f_2)} = \frac{W(f_1, f)}{W(f_1, f_2)}$$

Da f_1 , f_2 og f alle er antaget at være løsninger, er alle de indgåede determinanter konstante ifølge den tidligere sætning og dermed er c_1 og c_2 konstanter, hvilket vi skulle bevise.

Vi vil nu løse differentialligningen $\frac{d^2y}{dx^2} = my$ for $m > 0$ og $m < 0$.

2. 8 *Eksempel*

m>0*:* Vi sætter $m = k^2$. , hvorefter differentialligningen bliver: $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y$.

Funktioner, hvis anden afledede er proportional med funktionen selv er enten eksponentialfunktioner eller sin, cos-funktioner. Når konstanten er positiv er det eksponentialfunktioner.

Ved direkte indsætning ses at $f_1(x) = e^{kx}$ og $f_2(x) = e^{-kx}$ er løsninger, idet

$$(e^{-kx})' = -ke^{-kx} \text{ og } (e^{-kx})'' = (-ke^{-kx})' = k^2 e^{-kx} .$$

Vi udregner da Wronski-determinanten for de to løsninger.

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & e^{-kx} \\ ke^{kx} & -ke^{-kx} \end{vmatrix} = -k - k = -2k \neq 0$$

Da Wronski-determinanten er forskellig fra 0, kan vi opskrive den fuldstændige løsning:

(2.8) $$f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

2. 9 Eksempel

m < 0*:* Vi sætter m =- k^2. , hvorefter differentialligningen bliver:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y .$$

Funktioner, hvis anden afledede er proportional med funktionen selv er enten eksponentialfunktioner eller sin, cos-funktioner. Når konstanten er negativ er det sin eller cos-funktioner.

Ved direkte indsætning ses at $f_1(x) = \cos kx$ og $f_2(x) = \sin kx$ er løsninger. Vi nøjes med at vise det for cos kx

$$(\cos kx)' = -k \sin kx \quad \text{og} \quad (\cos kx)'' = (-k \sin kx)' = -k^2 \cos kx \quad .$$

Vi udregner da Wronski-determinanten for de to løsninger.

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix} = k\cos^2 kx + k\sin^2 kx = k(\cos^2 kx + \sin^2 kx) = k \neq 0$$

Da Wronski-determinanten er forskellig fra 0, kan vi opskrive den fuldstændige løsning:

(2.8) $$f(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

2.2 Entydighed af løsningen

Ved et *linieelement*, forstår man et punkt, som løsningen går gennem, samt kurvens differentialkvotient i dette punkt. Et linieelement kan f.eks. skrives (x_0, y_0, α). Hvis en løsning går gennemlinieelementet gælder således: $f(x_0) = y_0$ og $f'(x_0) = \alpha$. Der gælder følgende

Sætning: Til ethvert linieelement (x_0, y_0, α) findes der en løsning til differentialligningen $\frac{d^2y}{dx^2} = my$, som går gennem dette linieelement.

Vi skal altså vise, at der findes en løsning $y = f(x)$, som opfylder $f(x_0) = y_0$ og $f'(x_0) = \alpha$. Samtlige løsninger til differentialligningen kan skrives

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

hvor $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er to løsninger, hvis Wronski-determinant er forskellig fra 0. Løsningsbetingelserne $f(x_0) = y_0$ og $f'(x_0) = \alpha$ kan derfor skrives:

$$c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) = y_0$$
$$c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) = \alpha$$

Dette kan betragtes som et ligningssystem med de ubekendte c_1 og c_2. Ligningssystemet determinant er imidlertid:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

som netop er Wronski-determinanten for de to løsninger, som vi har vist er konstant, og som vi har forudsagt er forskellig fra nul. Da ligningssystemets determinant er forskellig fra nul, har ligningerne netop en løsning c_1 og c_2, hvilket vi skulle vise.

2.10 Eksempel

Bestem til differentialligningen $y'' = \frac{1}{4}y$ den løsning, hvis graf går genne A(0,6) og i punktet A har en tangent med hældning 1.

Ligningen er af formen $y'' = k^2 y \;\; med \;\; k = \frac{1}{2}$, så vi kan direkte opskrive løsningen.

$$f(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{og} \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}c_1 e^{\frac{1}{2}x} - \tfrac{1}{2}c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

Løsningsbetingelserne: $f(0)=6 \quad og \quad f'(0)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}c_1 e^0 - \tfrac{1}{2}c_2 e^0 = 1$

$$c_1 + c_2 = 6 \quad \wedge \quad \tfrac{1}{2}c_1 - \tfrac{1}{2}c_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 4 \quad \wedge \quad c_2 = 2$$

Løsningen bliver herefter

$$f(x) = 4e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}$$

2.11 Eksempel

Bestem til differentialligningen $f''(x) = -9f(x)$ den løsning, hvis graf går genne $P(\frac{\pi}{9}, 2\sqrt{3})$ og i punktet P har en tangent med hældning -6.

Ligningen er af formen $y'' = -k^2 y \;\; med \;\; k = 3$, så vi kan direkte opskrive løsningen.

$$f(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \quad \text{med} \quad f(x) = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$$

Løsningsbetingelserne:

$$f(\frac{\pi}{9}) = 2\sqrt{3} \quad og \quad f'(\frac{\pi}{9}) = -6 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_1 \cos 3\frac{\pi}{9} + c_2 \sin 3\frac{\pi}{9} = 2\sqrt{3} \;\wedge\; -3c_1 \sin 3\frac{\pi}{9} + 3c_2 \cos 3\frac{\pi}{9} = -6$$

$$c_1 \cos\frac{\pi}{3} + c_2 \sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \;\wedge\; -3c_1 \sin\frac{\pi}{3} + 3c_2 \cos\frac{\pi}{3} = -6 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_1\frac{1}{2} + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \;\wedge\; -c_1\frac{\sqrt{3}}{2} + c_2\frac{1}{2} = -2 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_1 + c_2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \;\wedge\; -c_1\sqrt{3} + c_2 = -4 \quad \Leftrightarrow$$

Ligningerne løses lettest, ved at gange den sidste ligning med $-\sqrt{3}$ og lægge ligningerne sammen , herved får man:

$$4c_1 = 8\sqrt{3} \;\Rightarrow c_1 = 2\sqrt{3} \quad \wedge \quad c_2 = 2$$

Løsningen bliver herefter

$$f(x) = 2\sqrt{3}\cos 3x + 2\sin 3x$$

Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y$$

har den fuldstændige løsning:

$$f(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

Vi ønsker at bestemme værdimængden for denne funktion. Dette opnås ved at bestemme tal A og φ, således at c_1 og c_2 kan skrives på formen:

$$c_1 = A\cos\varphi \quad \text{og} \quad c_2 = A\sin\varphi$$

Af de to ligninger, får man ved division *tan* φ $= \dfrac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \dfrac{c_2}{c_1}$

Kvadreres de to ligninger og adderes får man $A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = {c_1}^2 + {c_2}^2$,

Hvoraf man finder : $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$.

Indsætter man de fundne udtryk for c_1 og c_2 i udtrykket for løsningen, får man dernæst:

$$f(x) = A(\cos\varphi\cos kx + \sin\varphi\sin kx) = A\cos(kx - \varphi)$$

Det sidste udtryk skyldes en omskrivning ved hjælp af den første af de additionsformler, der blev udledt i vektorregningen. $\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

Bemærkning: I fysikken, hvor løsningen til differentialligningen er løsningen til en harmonisk svingning, og hvor *x* er erstattet med t (tiden), skriver man i almindelighed løsningen som:

$$f(t) = A(\cos\varphi\cos kt + \sin\varphi\sin kt) = A\cos(kt + \varphi)$$

Dette svarer til at man har erstattet φ med –φ i den øverste ligning, (hvilket dog havde virket lidt kunstigt på dette sted)
Hvad enten man anvender det ene eller det andet udtryk, så er det indlysende at værdimængden for løsningen er [-*A, A*], da værdimængden for cosinus er [-1, 1].
A kaldes for *amplituden* (i svingningen) og φ kaldes for begyndelsesfasen. *kx* + φ kaldes da for *fasen* og φ kaldes for *begyndelsesfasen.*