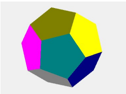
Elementær Matematik

Lineære funktioner og Andengradspolynomiet



Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. Den lineære funktion

Vi har før beskæftiget os med den generelle liniære funktion

$$f(x) = ax + b \ , \ \ x \in R$$

Hvor a og b er vilkårlige reelle tal.

Den lineære funktion er defineret for alle reelle tal. Funktionen er voksende for $a>0$, aftagende for $a<0$ og konstant lig med b, for $a = 0$

.

Grafen er en ret linie, som skærer 2. aksen i b, og som for a ≠ 0 skærer 1. aksen i $-\frac{b}{a}$.

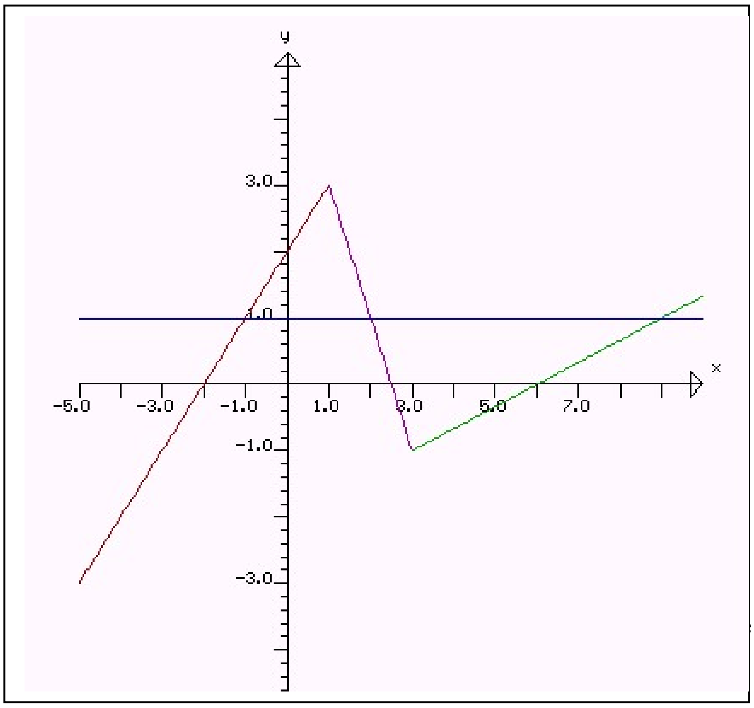
1.1 Stykkevis lineære funktioner

Hvis en funktion er sammensat af flere liniestykker, kaldes en stykkevis lineær funktion. Liniestykkerne behøver ikke nødvendigvis at hænge sammen, i hvilket tilfælde man kalder funktionen diskontinuert i disse punkter. Kontinuert betyder, at grafen hænger sammen og ikke laver spring.
En lineær funktion er i reglen givet ved en ”gaffelforskrift”

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & for \quad x<1 \\ -2x+5 & for \quad 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3}x - 2 & for \quad x>3 \end{cases}$$

Det ses umiddelbart ved indsætning, at grafen hænger sammen. Grafen for f er vist nedenfor, sammen med linien y = 1.



Ved udregning :

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ og $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ og $\frac{1}{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Vi vil nu undersøge, hvor grafen skærer linien $y = 1$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (x + 2 = 1 \wedge x < 1) \vee (-2x + 5 = 1 \wedge 1 \le x \le 3) \vee (\tfrac{1}{3}x - 2 = 1 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 9$$

Det er nødvendigt, at medtage definitionsintervallerne for hver af de 3 linier.
Dette ses, hvis vi skulle løse uligheden: $f(x) < -2$

$$f(x) < -2 \Leftrightarrow (x + 2 < -2 \wedge x < 1) \vee (-2x + 5 < -2 \wedge 1 \le x \le 3) \vee (\tfrac{1}{3}x - 2 < -2 \wedge x > 3)$$

$$\Leftrightarrow (x < -4 \wedge x < 1) \vee (x > \tfrac{7}{2} \wedge 1 \le x \le 3) \vee (x < 0 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x < -4$$

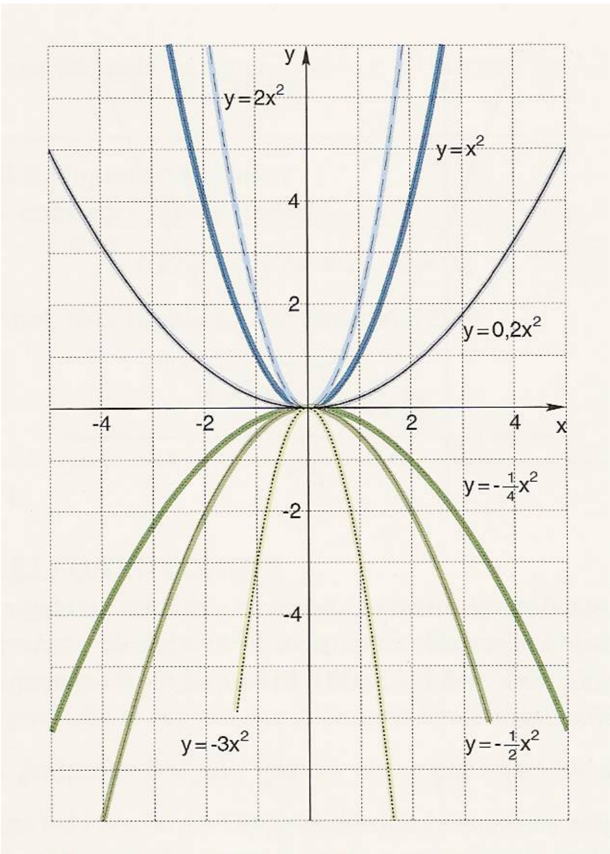
Løsningerne til disse ligninger og uligheder kan naturligvis aflæses (med tilnærmelse) på grafen.

2. Andengradspolynomiet

Et andengradspolynomium er en funktion, der kan skrives på formen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor *a , b og c* er reelle tal og $a \neq 0$.
a kaldes for *koefficienten* til x^2 , *b* kaldes for koefficienten til *x* og *c* er konstant leddet.
Når leddene opskrives efter aftagende potenser af *x*, kaldes polynomiet for *ordnet.*
Vi vil se på grafen for et vilkårligt *andengradspolynomium*, og betragter først tilfældet, hvor $b = c = 0$, altså en funktion: $f(x) = ax^2$.



Ser vi allerførst på tilfældet, hvor a=1 så:

$$f(x) = x^2.$$

To modsatte tal vil have samme funktionsværdi, så det er det let at opstille følgende tabel:

x	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2	± 3
y	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9

Graferne, som kaldes parabler er tegnet til venstre.
Ser vi på $f(x) = ½\, x^2$ *og* $f(x) = 2x^2$, så ligner de $f(x) = x^2$ blot er funktionsværdierne, henholdsvis halveret og fordoblet.
Alle graferne går gennem (0,0), som betegnes *toppunktet* for parablen.
Sammenlignes $f(x) = x^2$ med $f(x) = -x^2$, så er der skiftet fortegn for alle funktionsværdierne, så den sidste blot en spejling af den første i *x*-aksen.
Sammenfattende kan man sige, at *grafen* for

$$f(x) = ax^2$$

for $a > 0$ er en *parabel* med toppunkt i (0,0), hvor *grenene* vender opad, og for $a < 0$ en *parabel* med toppunkt i (0,0), hvor grenene vender nedad.

Vi vil nu vise, at grafen for alle funktioner af formen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

er den samme som grafen for

$$f(x) = ax^2$$

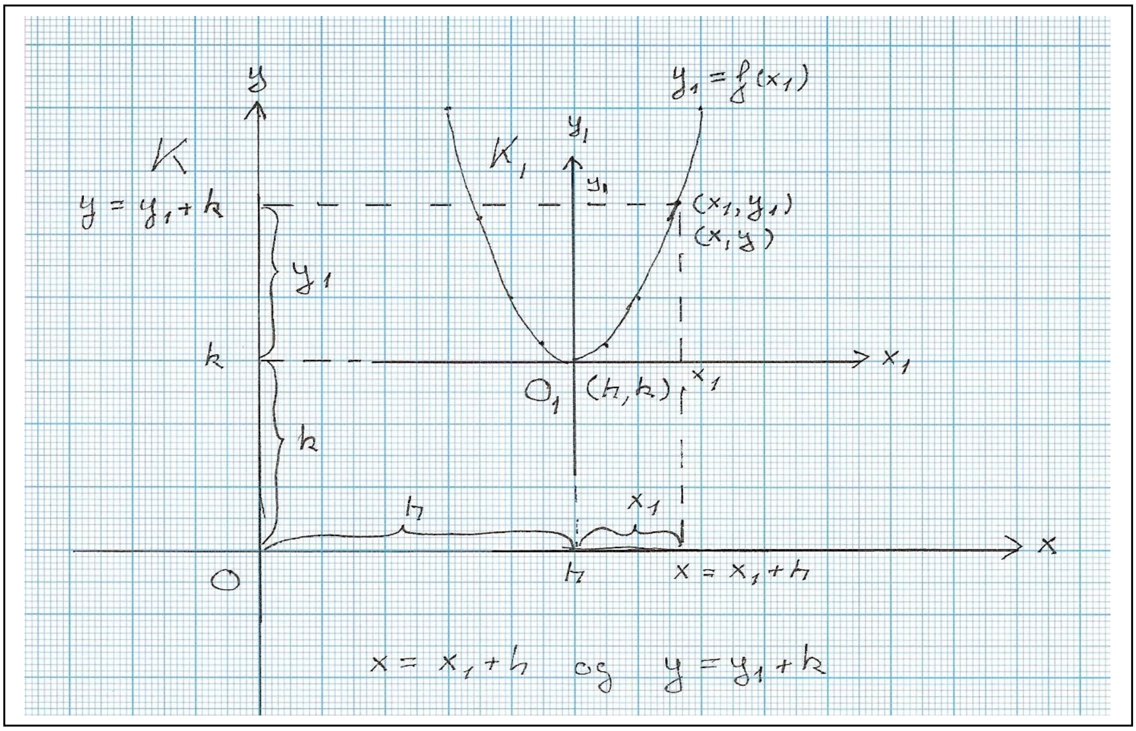
blot parallel forskudt til $T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{-d}{4a} \right)$

hvor $d = b - 4ac$ er diskriminanten for andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$

For at vise dette, skal vi først se på sammenhængen mellem koordinaterne i to koordinatsystemer, der er parallelforskudt i forhold til hinanden.

2.1 Parallelforskydning af koordinatsystemet.

På figuren har vi tegnet to koordinatsystemer K og K_1. Vi ønsker at bestemme sammenhængen mellem koordinaterne til *samme* punkt (x, y) i K og (x_1, y_1) i K_1.



Koordinaterne til K_1's begyndelsespunktet i K er (h,k). Betragter man figuren, er det let at se, at med

Hvis K_1 , eller punktet vi betragter ikke begge ligger i 1. kvadrant, så er sætningen knap så indlysende. Den følger imidlertid af indskudssætningen for punkter på en orienteret linie, som vi *ikke* vil bevise her.
Ser vi nu på ligningen $y_1 = f(x_1)$, svarende til grafen for en funktion f i K_1, så ønsker vi at bestemme ligningen for grafen i K. Men dette er meget simpelt, idet vi blot skal indsætte de to udtryk for x_1 og y_1 ovenfor. Herefter får man:

$$y_1 = f(x_1) \quad \Leftrightarrow \quad y - k = f(x - h)$$

$y - k = f(x - h)$ er derfor ligningen for $y_1 = f(x_1)$ i K.

Sætningen kan også opfattes på den måde, at parallelforskyder man grafen for en funktion $y = f(x)$ stykket h ud af x-aksen og stykket k ud af y-aksen, så vil grafen have ligningen: $y - k = f(x - h)$.
I de fleste tilfælde anvender man denne formulering, og undlader at indføre koordinatsystemet K_1.

Eksempler

1. Bestem ligningen for grafen $y = \sqrt{x}$, når den parallelforskydes til (-3,2). Ifølge ovenstående vil den parallelforskudte graf have ligningen

$$y - 2 = \sqrt{x+3}\,.$$

1.3 Grafen for 2.gradspolynomiet $y = 2x^2$ parallelforskydes til (-1,2). Den parallelforskudte graf vil have ligningen

$$y - 2 = 2(x+1)^2 \iff y = 2x^2 + 4x + 4\,.$$

Vi ser at den parallelforskudte graf kan skrives som et almindeligt 2.gradspolynomium.

2.3 Parallelforskydning af en parabel. Toppunktsformlen

Vi vil nu vise, at grafen for det almindelige 2.gradspolynomium

$$y = ax^2 + bx + c$$

er en parallelforskydning af grafen for $y = ax^2$ til

$$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}) \qquad \text{hvor } d = b^2 - 4ac \text{ er diskriminanten.}$$

Idet parablen $y = ax^2$ har toppunkt i (0, 0), vil T være koordinaterne til toppunktet for den parallelforskudte parabel.
For at vise dette omskriver vi $y = ax^2 + bx + c$ på følgende måde:

$$y = ax^2 + bx + c \iff y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

Vi omskriver dernæst de to første led i parentesen til kvadratet på en toleddet størrelse, idet x^2 er kvadratet på første led og $\frac{b}{a}x$ er det dobbelte produkt.

Det andet led må derfor være $\frac{b}{2a}$, idet $2x\frac{b}{2a} = \frac{b}{a}x$.
Vi tilføjer derfor dette led til *x i* parentesen, og subtraherer kvadratet på det, så udtrykket er uforandret.

$$\Leftrightarrow \quad y = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$$

Ved at sætte de sidste to led på fælles brøkstreg finder man da:

$$y = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \quad \Leftrightarrow \quad y = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$$

$d = b^2 - 4ac$, genkendes som udtrykket for diskriminanten. Ganger man *a* ind i parentesen og flytter konstantleddet over på den anden side af lighedstegnet får man:

$$\Leftrightarrow \quad y + \frac{d}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2 \quad \Leftrightarrow \quad y - (-\frac{d}{4a}) = a(x-(-\frac{b}{2a}))^2$$

Sammenholder vi dette med $y = ax^2$ og formlerne $y = f(x)$ og $y - k = f(x-h)$ for parallelforskydningen af grafen for en funktion, så kan man se, at $y = ax^2 + bx + c$ er en parallelforskydning af $y = ax^2$ til

$$T = (h,k) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}) \quad , \qquad hvor \;\; d = b^2 - 4ac$$

Den sidste formel, kaldes som omtalt for *toppunktsformlen*.

Eksempel.
Bestem toppunktet for parablen y = -2x^2 +3x+1, og beskriv, hvilken parabel det er en parallelforskydning af.

$$T(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}) = (-\frac{3}{-4}, -\frac{17}{-8}) = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$$

Parablen er en parallelforskydning af y = -2x^2 til toppunktet $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$

Når man (selv) skal tegne en parabel f.eks. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$, så gøres det lettes ved først at finde toppunktet, som i dette tilfælde er $(2,1)$ og ud fra dette punkt tegne parablen $y = -\frac{1}{2}x^2$.

2.4 Faktorisering af 2.gradspolynomiet

Et tal siges at være *rod* i et polynomium, hvis funktionsværdien er nul. Hvis $f(x)$ er et polynomium og r er en rod gælder altså $f(r) = 0$. At bestemme rødderne i et polynomium er det samme som at finde skæringspunkterne med 1. aksen.

Vi vil nu vise nogle sætninger om rødderne i et 2.gradspolynomium, der som bekendt kan have to ($d > 0$), én ($d = 0$) eller ingen rødder ($d < 0$).
Vi ser først på tilfældet, hvor diskriminanten er positiv, så der findes to rødder: r_1 og r_2.

r_1 og r_2 er rødder i $f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow$ (Vi dividerer ligningen med a)

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = r_1 \vee x = r_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x - r_1 = 0 \vee x - r_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Ved at gange parentesen ud og samle leddene med x får man

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$$

Ved at sammenligne med $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ser man umiddelbart, at der må gælde:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad og \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Dette kan formuleres i følgende sætning:

I den ordnede (efter aftagende potenser af x) og reducerede (koefficienten til x^2 er 1) andengradsligning er røddernes sum lig med koefficienten til x med modsat fortegn og røddernes produkt er lig med ligningens konstantled.

Sætningen anvendes ofte til at gætte rødder i en 2.gradsligning.

Eksempel

1) Gæt rødderne i ligningen: $x^2 + 2x - 15 = 0$. Vi skal altså tænke på to tal, hvis sum er -2 og hvis produkt er 15. Hvis rødderne er heltallige, er der ikke andre muligheder end 3 og -5.
2) Hvis rødderne ikke er heltallige er det kun lidt vanskeligere.
   $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$. Det ses at $-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ *og* $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, så rødderne er -2 og ½

Af udledningen ovenfor ses, at der på samme måde må gælde:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - r_1)(x - r_2)$$

Ganger vi denne ligning igennem med a, får man

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Dette betegnes faktorisering af andengradspolynomiet.

Dette er en vigtig sætning, som er et specialtilfælde af en mere generel sætning om faktorisering af polynomier.
Hvis $r_1 = r_2 = r$, som svarer til tilfældet d = 0, har andengradspolynomiet kun én rod og faktoriseringen bliver:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - r) = a(x - r)^2$$

Hvis 2.gradspolynomiet ikke har nogen rødder, kan det ikke faktoriseres i 1.gradspolynomier.
Eksempel
Andengradspolynomiet $f(x) = -3x^2 - 3x + 6$ har rødderne 1 og -2 det kan derfor faktoriseres:

$$f(x) = -3x^2 - 3x + 6 = -3(x+2)(x-1)$$

2.5 Andengradspolynomiets fortegn. Andengradsuligheder

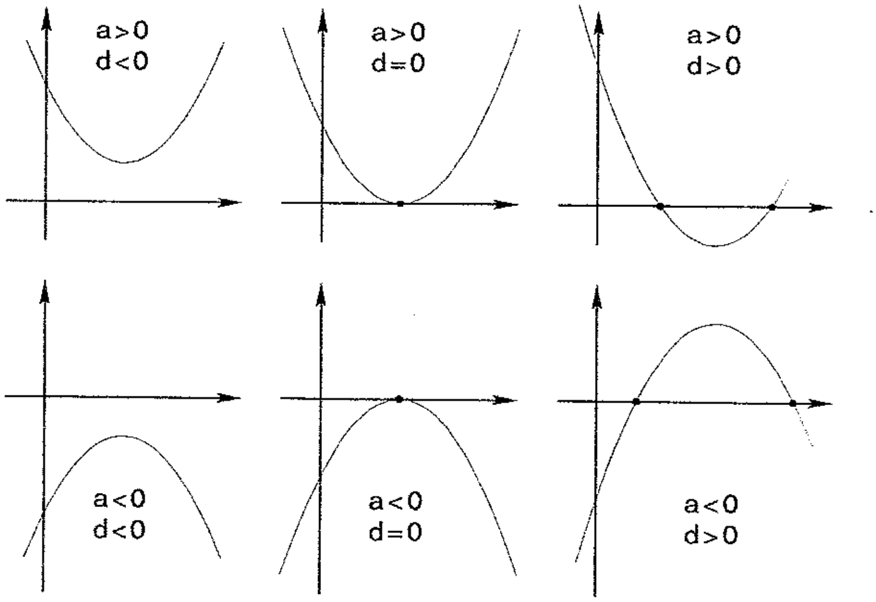
Opgaven er for et givet andengradspolynomium at bestemme, hvornår det er nul, positivt eller negativt. Dette er det samme som at løse, hver af de tre uligheder

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{og} \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{og} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

Det er muligt at løse ulighederne algebraisk (dvs. ved regning), men det er langt lettere at gøre det grafisk. Vi illustrerer den algebraiske metode med et enkelt eksempel, hvor $a<0$ og $d>0$, så andengradsligningen har to rødder $r_1 < r_2$.

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x - r_1)(x - r_2) > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&(x - r_1) > 0 \ \wedge \ (x - r_2) < 0 \quad \vee \quad (x - r_1) < 0 \ \wedge \ (x - r_2) > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&x > r_1 \ \wedge \ x < r_2 \quad \vee \quad x < r_1 \ \wedge \ x > r_2 \quad \Leftrightarrow \\
&r_1 \ < \ x \ < \ r_2
\end{aligned}$$

Grafisk løsning af andengradsuligheder



Ovenfor at vist beliggenheden af at et 2.gradspolynomim for mulige værdier af *a* og *d* (diskriminanten). Vi repeterer:

> *Når $a>0$ vender grenene opad, og når $a<0$ vender grenene nedad.*
> *Når $d>0$ skærer parablen 1.aksen i to punkter.*
> *Når $d=0$, skærer parablen 1.aksen i et punkt*
> *Når $d<0$, skærer parablen ikke 1.aksen.*

Metoden illustreres lettest ved at par eksempler.

Eksempel.

1. Løs uligheden $-3x^2-3x+6>0$. Diskriminanten $d = 9+72=81 > 0$. Vi har dermed tilfældet a < 0 og d > 0. Af figuren ovenfor ses, at andengradspolynomiet er positivt mellem rødderne, som er -2 og 1. Vi finder derfor:

$$-3x^2-3x+6>0 \quad \Leftrightarrow \quad -2<x<1$$

2. Løs uligheden $2x^2-3x+5>0$ $d = 9-40 = -31 <0$. Vi er i tilfældet a > 0 og d < 0 , så grenene vender opad og parablen skærer ikke 1.akse. Vi har derfor:

$$2x^2-3x+5>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in R$$

3. Løs uligheden $4x^2-3x-1>0$ $d = 9+16 = 25$ og rødderne er 1 *og* $-\frac{1}{4}$ Vi er i tilfældet a > 0 og d > 0 , så grenene vender opad og parablen skærer 1.aksen i to punkter. $4x^2-3x-1>0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4} \vee x>1$