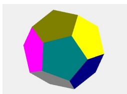
Elementær Matematik

Analytisk geometri



Ole Witt-Hansen 2011

Indhold

1. koordinatsystemet

En tallinie er en *orienteret* linie (den har en positiv gennemløbsretning), som er forsynet med et nulpunkt og en enhed.

Til ethvert reelt tal, hører der netop et punkt på linien og omvendt. Tallet kaldes for punktets *koordinat*.

Et koordinatsystem i planen består af to ortogonale tallinier med samme enhed og fælles nulpunkt. De betegnes 1. akse og 2. akse, *x-akse* og *y-akse* eller *absisseakse* og *ordinatakse*.

De tal, der svarer til punkter på 1. aksen og 2. aksen kaldes henholdsvis 1. koordinat og 2. koordinat eller *absisse* og *ordinat*.
I almindelighed vælger man orienteringen, således at drejningen fra 1. akse til 2. akse er mod uret.

Ved *projektionen* af et punkt på en linie, forstår man det, at *nedfælde den vinkelrette på linien*. Forstået på den måde, at man tegner en linie gennem punktet, som er vinkelret på tallinien. De to liniers skæring er projektionen. (I praksis tegner man ikke den vinkelrette linie, men anvender en lineal)
Nedenfor er vist et koordinatsystem. De to akser deler planen op i 4 områder, som kaldes for *kvadranter*. De nummereres I – IV mod uret.

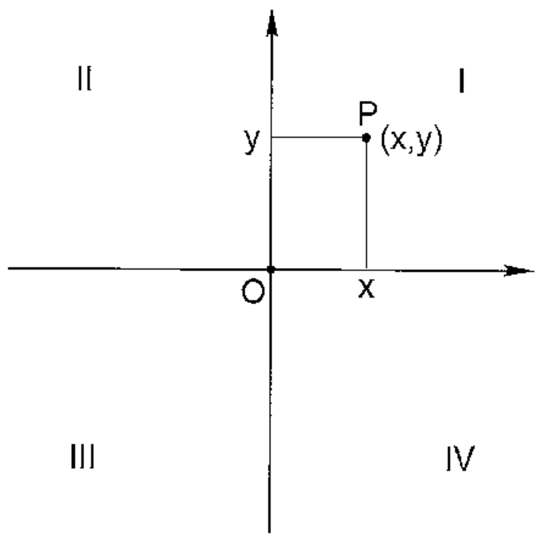


Fig. 1

Koordinaterne til et punkt *P* fås som projektionen af *P* på 1. og 2. akse.
Koordinaterne til et punkt skrives (*x,y*). F.eks (-2,3), som er beliggende i 2. kvadrant.

Ved anvendelse af koordinater, kan man lidt mere formelt definere *akserne* og de fire *kvadranter*, som punktmængder i planen.

$$\text{"x- aksen"} = \{(x,y) \mid y = 0\} \qquad \text{"y- aksen"} = \{(x,y) \mid x = 0\}$$

$$\text{"1. } kvadrant\text{"} = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y > 0\} \qquad \text{"2. } kvadrant\text{"} = \{(x,y) \mid x < 0 \wedge y > 0\}$$

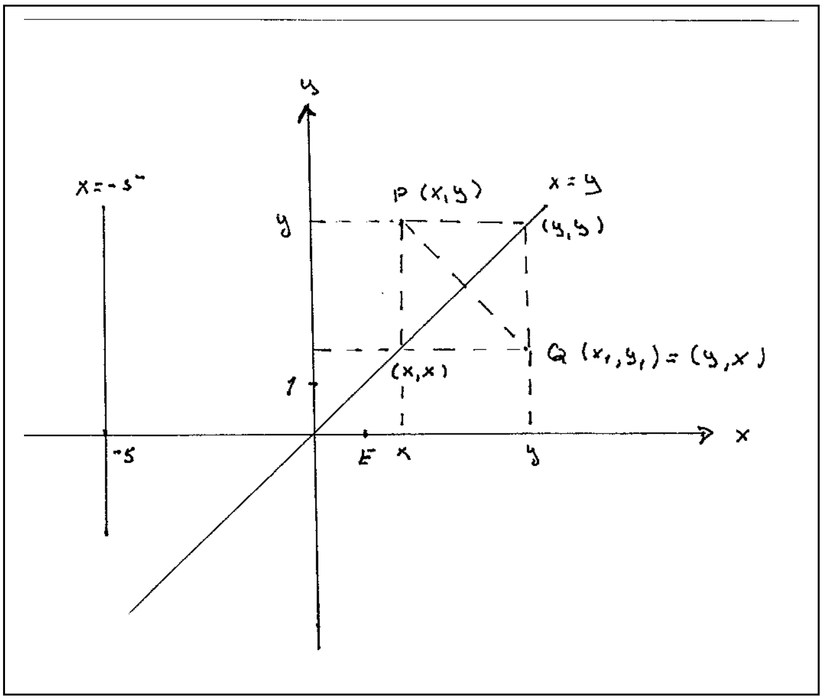
$$\text{"3. } kvadrant\text{"} = \{(x,y) \mid x < 0 \wedge y < 0\} \qquad \text{"4. } kvadrant\text{"} = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y < 0\}$$

Punktmængden: $\{(x,y) \mid y = x\}$ vil være en linie, der ligger i 1. og 3. kvadrant, og som danner en vinkel på 45^0 med såvel 1.aksen som 2. aksen.

Punktmængderne: $\{(x,y) \mid x = -5\}$ vil være en linie parallel med *y-aksen*, som går gennem $x = -5$.

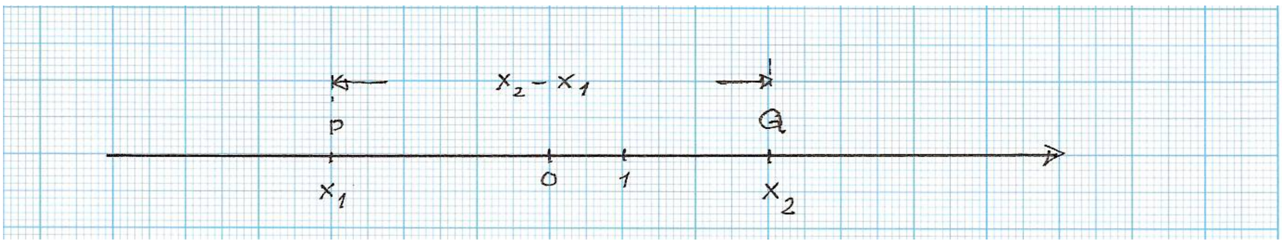
Punktmængden $\{(x,y) \mid y = 4\}$, vil være en linie parallel med x-aksen, som går gennem $y = 4$.

Hvis to punkter ligger symmetrisk omkring linien $y = x$, så har de ombyttede koordinater. Dette kan ses på figuren nedenfor.



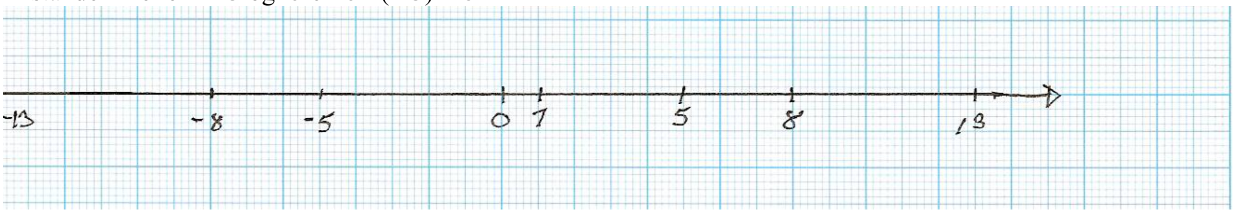
2. Afstandsformlen

For to forskellige punkter *P* og *Q* med *absisserne* x_1 *og* x_2 , hvor $x_1 < x_2$, kan man bestemme afstanden mellem *P* og *Q* som $x_2 - x_1$. $|PQ| = x_2 - x_1$. Dette gælder uafhængigt af fortegnene for x_1 *og* x_2 , når blot $x_2 - x_1 > 0$



Eksempel:
Afstanden mellem 5 og 13 er 13 – 5 = 8.
Afstanden mellem -5 og 13 er 13 –(-5) = 18.

Afstanden mellem -13 og -5 er -5 –(-13) = 8



Hvis $x_1 > x_2$, så $x_2 - x_1 < 0$ er formlen for afstanden naturligvis $x_1 - x_2$.

Vi minder om definitionen på numerisk værdi:

$$|x_2 - x_1| = \begin{cases} x_2 - x_1 & for \ \ x_2 - x_1 \geq 0 \\ -(x_2 - x_1) = x_1 - x_2 & for \ \ x_2 - x_1 < 0 \end{cases}$$

Af dette, kan vi se, at afstanden mellem to punkter på en koordinatakse i alle tilfælde kan udregnes som:

$$|x_2 - x_1| \quad \text{eller} \quad |y_2 - y_1|$$

Eksempel

Afstanden mellem -5 og -13 er $|-13-(-5)| = |-13+5| = |-8| = 8$

Vi vil nu søge en formel for afstanden mellem to punkter $A(x_1\ y_1)$ og , $B(x_2\ y_2)$ i et koordinatsystem, hvor liniestykket AB i første omgang ikke er parallelt med nogen af akserne.

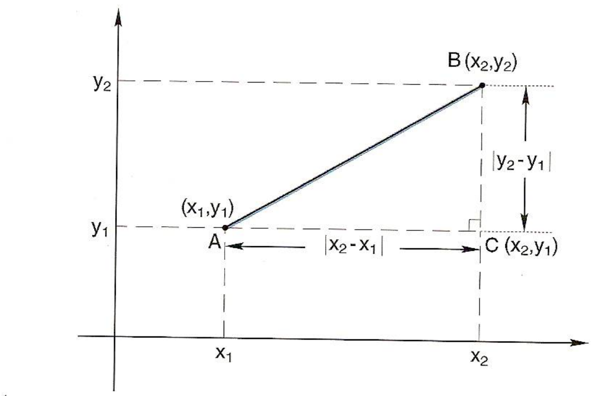


Fig. 2

Som det fremgår af figuren er liniestykkerne AC og BC akseparallelle og afstandene $|AC|$ og $|BC|$ kan derfor udregnes som de tilsvarende afstande på akserne:

$$|AC| = |x_2 - x_1| \quad \text{og} \quad |BC| = |y_2 - y_1|$$

Trekant ABC er imidlertid retvinklet, så $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

Heraf følger:

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

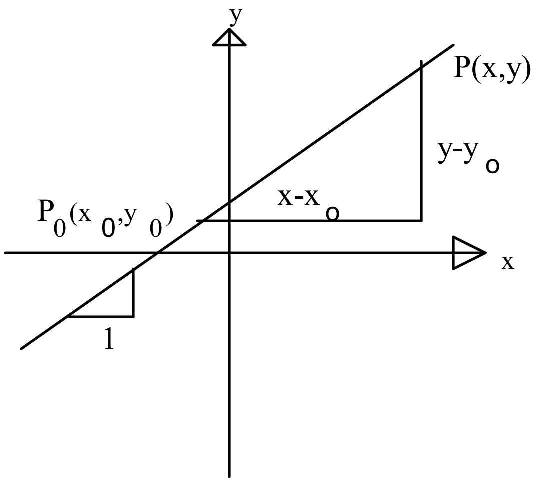
Denne vigtige formel kaldes for afstandsformlen

Hvis *AB* er akseparallelt er udledningen ved hjælp af den retvinklede trekant ikke gyldig, men det viser sig, at *afstandsformlen* alligevel kan anvendes.
Er *AB* f.eks. parallel med *x-aksen* er $y_2 = y_1$ så formlen bliver:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,$$

hvilket er korrekt for en akseparallel linie.
Afstandsformlen gælder tilsvarende, hvis linien er parallel med *y-aksen.*

3. Liniens ligning



I det viste koordinatsystemet er tegnet en linie. Punktet $P_O = (x_O, y_O)$ er et fast punkt på linien og punktet $P = (x,y)$ er et vilkårligt (løbende) punkt på linien.
Vi antager, først at $P \neq P_O$ og at linien ikke er parallel med nogen af koordinatakserne.
Endvidere er der tegnet en lille trekant med en katete parallel med *x-aksen*, som har længden 1.
Den anden katete i den lille trekant er *a*.
På figuren er *a* positiv, idet linien peger opad, men det er ikke afgørende for det efterfølgende. Vi kan nu indse:

Punktet P=(x,y) ligger på linien, hvis og kun hvis de to viste trekanter er ensvinklede.

Da ensvinklede trekanter er *ligedannede*, betyder dette, *at forholdet mellem ensliggende sider er konstant*.

$$\frac{y - y_0}{a} = \frac{x - x_0}{1} \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = a(x - x_0)$$

Den sidste ligning gælder åbenbart for alle *x*, beliggende til højre for x_0.

Den kaldes for *liniens ligning* og *a* kaldes for liniens *hældningskoefficient.*

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

er derfor ligningen for den linie, som går gennem (x_0, y_0), og som har hældningskoefficienten *a*.

Bemærk, at også (x_0,y_0) tilfredsstiller ligningen. Indsætter man nemlig (x_0,y_0), finder man at 0=0. Det bemærkes, at man får den samme ligning, hvis $x < x_0$. Længderne af kateterne i den store trekant bliver i dette tilfælde $x_0 - x$ og $y_0 - y$, men, da de står i tæller og nævner i samme brøk ovenfor, er brøken uforandret og ligningen bliver den samme.

Man får også den samme ligning, hvis a er negativ, så linien peger nedad.
Længden af den lille katete er da $-a$, mens længderne af de store kateter for $x > x_0$ bliver $x - x_0$ og $-(y - y_0)$. Igen vil de to fortegnsskifte ophæve hinanden, så også i dette tilfælde får det samme udtryk for liniens ligning som ovenfor. Dette vil også gælde hvis $x < x_0$.

Hvis linien gennem (x_0,y_0), er parallel med *x-aksen*, har ligningen $y = y_0$, idet alle punkter på denne linie (og ingen andre) har 2. koordinat (ordinat) y_0.
Sammenligner man med liniens ligning, betyder dette, at hældningskoefficienten er 0 for en linie parallel med *x-aksen*.

Hvis linien gennem (x_0,y_0) er parallel med *y-aksen*, har den ligningen $x = x_0$, idet alle punkter på denne linie (og ingen andre) har 1. koordinat (absisse) x_0.
I dette tilfælde defineres ingen hældningskoefficient**.**

Eksempel
Find ligningen for den linie, som går gennem punktet $P_0 = (2,-3)$ og som har hældningen a = -½. Ved indsætning i formlen finder man:

$$y - (-3) = -\tfrac{1}{2}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{1}{2}x - 2$$

I det sidste udtryk har vi isoleret y. Af dette udtryk ses blandt andet, at linien afskærer stykket -2 af y-aksen. Dette fås ved at sætte x=0 i ligningen. Skæring med x-aksen findes ved at sætte y=0 i ligningen og løse for x.
Vi finder heraf:

$0 = -\tfrac{1}{2}x - 2$, som løses til at give $x = -4$. Linien skærer *x-aksen* i -4.

I almindelighed kan man finde det stykke, som en linie afskærer af *y-aksen* ved at sætte $x = 0$ og løse for y. Nedenfor isolerer vi først y:

$$y - y_o = a(x - x_o) \quad \Leftrightarrow \quad y = a\,x + y_o - ax_o \quad \Leftrightarrow \quad y = a\,x + b$$

Det ses umiddelbart, at $b = y_0 - \alpha x_0$ er det stykke, som linien afskærer af y-aksen, idet $y=b$ for x=0
Kender vi således liniens hældning a og stykket b, som linien afskærer af y-aksen kan liniens ligning umiddelbart opskrives som $y = a\,x + b$. Dette anvendes (mindst) lige så ofte som det første udtryk for liniens ligning.

Ofte er en linie bestemt ved to punkter $P_1\ (x_1,y_1)$ *og* $P_2\ (x_2,y_2)$.
Vi vil nu opstille en formel til beregning af hældningskoefficienten a for linien.
I det oprindelige udtryk for liniens ligning var $P_0\ (x_0,y_0)$ et fast, men vilkårligt punkt på linien, mens $P\ (x,y)$ var et variabelt punkt.

Hvis man i liniens ligning: $y - y_0 = a(x - x_0)$, erstatter (x_0,y_0) med (x_1,y_1) og (x, y) med (x_2,y_2), (hvilket er lovligt da (x_1,y_1) og (x_2,y_2) ligger på linien), finder man et udtryk for *hældningskoefficienten* udtrykt ved koordinaterne til to punkter på linien:

$$y - y_0 = a(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{for} \quad x_2 \neq x_1$$

Udregnes hældningskoefficienten med denne formel, kan liniens ligning ud fra to punkter nemt opskrives, idet man som det faste punkt P_0 blot vælger et af de to punkter P_1 og P_2.

Eksempel

Opskriv ligningen for linien gennem punkterne P_1 (-2,3) og P_2(4,1).

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{4-(-2)} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - (-2)) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{1}{3}x + 2\tfrac{1}{3}$$

Linien har således hældningskoefficient -1/3 og afskærer stykket 2 1/3 af y-aksen.

Et udtryk af formen

$$ax + by + c = 0$$

hvor a, b og c er reelle tal og ikke både a og b er 0 kaldes for en førstegradsligning i x og y. En sådan førstegradsligning fremstiller en ret linie i et koordinatsystem. Er nemlig $b \neq 0$, kan ligningen omskrives:

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Hvoraf ses, at førstegradsligningen fremstiller en ret linie med hældningskoefficient $-\frac{a}{b}$ og som afskærer stykket $-\frac{c}{a}$ af y-aksen.

Hvis $b = 0$, så er ligningen af formen: $ax + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{a}$. Dette fremstiller en ret linie parallel med y-aksen. Hvis $a = b = 0$, fremstiller ligningen ikke noget

Vi ser altså, at en førstegradsligning i alle tilfælde fremstiller en ret linie i et koordinatsystem. På den anden side kan enhver linie fremstilles ved en førstegradsligning i x og y.

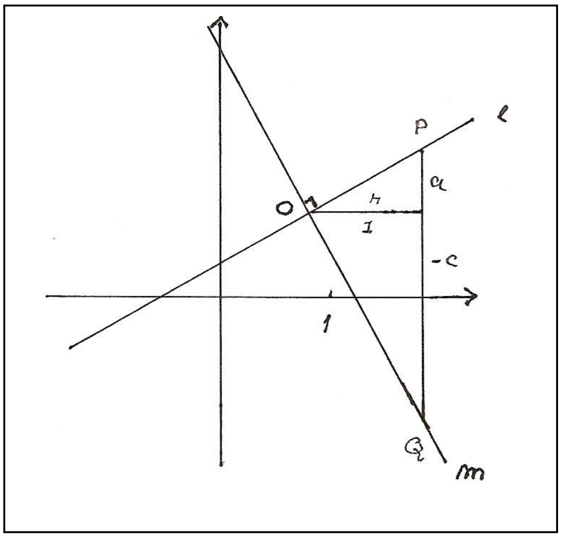
Ligningerne $y = ax + b$ (hældning a, afskærer b af y-aksen), $y = b$ (linien parallel med *x-aksen*) og $x = x_o$ (linien parallel med y-aksen), kan alle omskrives til en *førstegradsligning* i x og y ved at samle leddene på venstre side.

$$y = ax + b \quad \Leftrightarrow \quad ax + (-1)y + b = 0$$

$$y = b \quad \Leftrightarrow \quad 0x + 1y + (-b) = 0$$

$$x = a \quad \Leftrightarrow \quad 1x + 0y + (-a) = 0$$

4. Ortogonale linier



Figuren viser to *ortogonale* linier l og m, dvs. to linier der står vinkelret på hinanden. Vi antager, at ingen af linierne er akseparallelle. Hældningskoefficienterne for linierne betegnes a og c. På figuren er $a > 0$ mens $c < 0$.
Vi minder om, at hældningskoefficienten kan bestemmes som tilvæksten på y-aksen, svarende til en tilvækst på 1 på x-aksen.
a er den lodrette katete i en trekant, hvis vandrette katete er 1, og hvor hypotenusen ligger på linien l.
$-c$ (fordi *c er negativ*) er den lodrette katete i en trekant, hvis vandrette katete også er 1, og hvor hypotenusen ligger på linien m.
Trekant OPQ er retvinklet og højden fra O er $h = 1$.

Fra geometrien ved vi at $h^2 = \alpha\beta$, hvor α og β er de stykker, hvori højden deler hypotenusen. I dette tilfælde er $\alpha = a$ og $\beta = -c$. Heraf følger

$$h^2 = \alpha\beta \quad \Rightarrow \quad 1^2 = a\cdot(-c) \quad \Leftrightarrow$$

$$a\cdot c = -1$$

For ortogonale linier, der ikke er akseparallelle gælder, at produktet af deres hældningskoefficienter er -1.

Denne sætning kan f.eks. anvendes, når man vil finde ligningen for en tangent til en cirkel i et punkt. Tangenten er nemlig ortogonal på linien gennem cirklens centrum og punktet.

Eksempel

Bestem ligningen for den linie, som går gennem (-5,2) og som står vinkelret på linien y = 3x-4.

Hældningskoefficienten bestemmes af: $a \cdot c = -1 \;\Rightarrow\; 3c = -1 \;\Leftrightarrow\; c = -\frac{1}{3}$

Ligningen bestemmes da af: $y - y_0 = a(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{1}{3}(x+5) \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

5. Liniers skæring. To ligninger med to ubekendte.

Vi vil i dette afsnit søge at løse og opstille løsningsformel for to ligninger med to ubekendte. Ligningerne opskrives traditionelt som vist nedenfor.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (a_1, b_1) \neq (0,0)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (a_2, b_2) \neq (0,0)$$

a_1, b_1, c_1 og a_2, b_2, c_2 er reelle tal, som betegnes *ligningssystemets koefficienter*, og x, y er de ubekendte, som man ønsker at bestemme.
Et talsæt (x,y) siges at være løsning til ligningssystemet - eller tilfredsstille ligningssystemet - hvis ligningerne er opfyldt, når talsættet indsættes.

At løse ligningerne vil sige, at undersøge om der findes løsninger, og i givet fald finde dem alle sammen.
Geometrisk set fremstiller de to førstegradsligninger to linier i et koordinatsystem. Et talsæt (x,y), som tilfredsstiller begge ligninger, ligger åbenbart på begge linier og svarer derfor til liniernes skæringspunkt. At løse ligningerne svarer derfor til den geometriske opgave, at bestemme koordinaterne til liniernes skæringspunkt.

Fra et geometrisk synspunkt, er det umiddelbart klart, at ligningssystemet kan have én, ingen eller uendelig mange løsninger - svarende til at linierne skærer hinanden, er parallelle eller sammenfaldende. Dette vil vi nu godtgøre ved regning.

For at løse ligningerne multiplicerer vi den øverste ligning med b_2 den nederste med b_1, og subtraherer den nederste fra den øverste. Metoden kaldes for *lige store koefficienters metode.*

$$b_2a_1x + b_2 b_1y = b_2 c_1$$
$$b_1a_2x + b_1b_2 y = b_1c_2$$

Ved subtraktionen går leddene med y ud mod hinanden, og vi finder:

$$b_2a_1 x - b_1a_2 x \;= c_1 b_2 - c_2 b_1 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x \;= c_1 b_2 - c_2 b_1$$

Af den sidste ligning kan x bestemmes ved at dividere med $a_1b_2 - a_2b_1$. For at gøre dette er det imidlertid nødvendigt at forudsætte, at det ikke er nul.

Størrelsen $D = a_1b_2 - a_2b_1$ kaldes for ligningssystemets *determinant***.**

For determinanter anvendes følgende praktiske skrivemåde, hvor koefficienterne skrives under hinanden:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Ved anvendelse af determinantsymbol, kan den sidste ligning skrives:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

For at bestemme x, må vi forudsætte at $D \neq 0$. Hvis $D \neq 0$ finder man:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

På fuldstændig tilsvarende måde finder man ved at multiplicere den øverste ligning med a_2 og den nederste ligning med a_1 og subtrahere den øverste fra den nederste:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Man bemærker, at koefficienten til y igen er ligningssystemets determinant. Er D ≠ 0, finder man udtrykket for y.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Vi kan således konkludere vores undersøgelse:

Hvis ligningssystemets determinant $D \neq 0$ *, har ligningssystemet*

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

netop 1 *løsning, givet ved udtrykkene:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \wedge \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Vi skal da betragte tilfældet $D = 0$, hvor løsningsformlen ikke kan anvendes.

$$D = 0 \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

a_1 og b_1 er ikke begge 0, så vi antager at $a_1 \neq 0$. Vi kan da bestemme et tal k, således at $a_2 = ka_1$. Indsættes dette i udtrykket for D fås:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 b_2 - k a_1 b_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 - k b_1 = 0 \Leftrightarrow b_2 = k b_1$$

Ved at indsætte udtrykkene $a_2 = ka_1$ og $b_2 = kb_1$ i de oprindelige ligninger finder man.

$$\begin{matrix} a_1x + b_1 y = c_1 & & a_1x + b_1 y = c_1 & & a_1x + b_1 y = c_1 \\ & \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow & \\ a_2x + b_2 y = c_2 & & ka_1x + k b_1 y = c_2 & & a_1x + b_1 y = c_2/k \end{matrix}$$

Af dette fremgår, at hvis og kun hvis $c_2 = kc_1$ er ligningernes koefficienter proportionale.

*Ligningerne er da identiske og ligningssystemet har uendelig mange løsninger***.**

Hvis derimod $c_2 \neq kc_1$ findes der intet talsæt (x, y) som tilfredsstiller begge ligninger.
(Venstresiderne er jo identiske, mens højresiderne er forskellige).

Ligningssystemet har ingen løsninger, og ligningerne siges at være i strid med hinanden.

De to tilfælde $D \neq 0$ og $D = 0$, svarer netop til at de tilsvarende linier, som ligningerne fremstiller i et koordinatsystem, har netop et skæringspunkt eller er sammenfaldende/parallelle**.**

$D = 0$ skulle derfor svare til at linierne har samme hældningskoefficient (hvis den er defineret).

Finder man hældningskoefficienterne for de to linier ud fra de oprindelige ligninger finder man $-\frac{a_1}{b_1}$ og $-\frac{a_2}{b_2}$

Betingelsen $D = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ giver imidlertid at $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, hvilket netop udtrykker at de to linier har samme hældning.

Det skal understreges, at man godt kan anvende "lige store koefficienters metode", selv om man ikke anvender determinanterne.

En anden metode kaldes for substitutionsmetoden. Ved denne metode, isolerer man x eller y af den ene ligning og indsætter i den anden, som derefter er en førstegradsligning.

Vi viser de tre metoder ved ét og samme eksempel:

Eksempel Løs ligningerne

$$\begin{aligned} 13x + 8y &= 3 \\ 8x + 5y &= -2 \end{aligned}$$

1. **Substitutionsmetoden**:

$$13x+8y=3 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\tfrac{13}{8}x+\tfrac{3}{8}$$
$$8x+5y=-2 \quad \Rightarrow \quad 8x+5(-\tfrac{13}{8}x+\tfrac{3}{8})=-2 \quad \Leftrightarrow$$
$$8x-\tfrac{65}{8}x+\tfrac{15}{8}=-2 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{8}x=-\tfrac{31}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x=31$$
$$x=31 \;\wedge\; 8x+5y=-2 \quad \Rightarrow \quad 248+5y=-2 \quad \Leftrightarrow \quad y=-50$$
$$13x+8y=31 \quad \wedge \quad 3x+8y=3 \quad \Leftrightarrow$$
$$x=31 \;\wedge\; y=-50$$

2. **Lige store koefficienters metode**

$$13x+8y=3$$
$$8x+5y=-2$$

Vi vælger at eliminere y. Vi kan så gange den første ligning med 5 og den anden med 8 og trække den ene ligning fra den anden. Hvis man vil undgå at lave fejl ved subtraktionen, så er det mere sikkert at gange den første ligning med +5 og den anden med -8 og lægge ligningerne sammen.

$$\begin{matrix} 5(13x+8y=3) \\ -8(8x+5y=-2) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 65x+40y=15 \\ -64x-40y=16 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x=31 \;\wedge\; y=-50$$

y = -50 er fundet ved at indsætte x = 31 i en af de oprindelige ligninger.

3. Determinantmetoden

$$13x+8y=3$$
$$8x+5y=-2$$

Ligningssystemets determinant er $D=\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=13\cdot 5-8\cdot 8=1$

Ligningssystemet har derfor netop 1 løsning, som opskrives:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{1}=31 \quad \wedge \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{1}=-50$$

Hvilke af de 3 metoder, man vælger afhænger af flere ting. Hvis *x* eller *y* står alene i en af ligningerne er det nok lettes at anvende substitutionsmetoden.
I almindelighed er det hurtigst og lettest at anvende lige store koefficienters metode og hvis man vil undgå brøkregning (og det vil man), er det lettes at gange ligningerne igennem med et tal, så der kun optræder hele tal, og så anvende determinantmetoden. Når denne metode alligevel sjældent anvendes, er det fordi det ikke altid er lige let at huske formlerne for determinantmetoden.

6. Afstand fra punkt til linie

Vi vil søge, at bestemme en formel for afstanden fra et punkt P (x_1,y_1) til linien l med ligningen $ax + by + c = 0$.

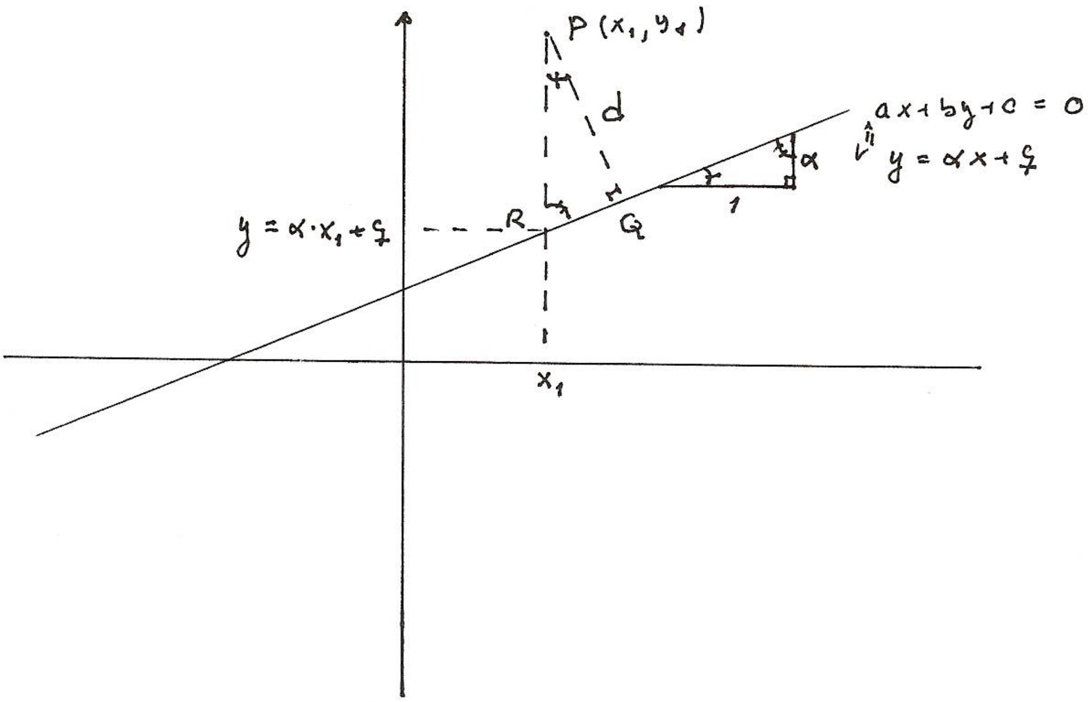
Det mest oplagte, ville være at bestemme ligningen for den linie, der er vinkelret på l og som går gennem punktet P.
l har hældningen $-\frac{a}{b}$, så ligningen for den ortogonale linie er $(y - y_1) = \frac{b}{a}(x - x_1)$.

Hvis man bestemmer skæringspunktet mellem de to linier, kan man til slut finde afstanden mellem skæringspunktet og (x_1,y_1) med afstandsformlen.
Dette vil også fungere udmærket (om end lidt besværligt) med et taleksempel, men det fører til uoverskuelige udregninger i det generelle tilfælde.
Vi vælger derfor en anden metode, hvor vi betragter to ensvinklede trekanter

For at simplificere regningerne, vil vi skrive liniens ligning, $ax + by + c = 0$ som man gjorde tidligere, hvis linien ikke er parallel med y-aksen, så $b \neq 0$.

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad y = \alpha x + q$$

Her betegner α liniens hældningskoefficient og q er stykket linien afskærer af y-aksen.



$d = dist(P,l) = |PQ|$, er det stykke vi ønsker at bestemme.

Som det fremgår af figuren er den lille trekant ensvinklet med trekant PQR. Begge trekanter er retvinklede og de har begge en lodret linie, der skærer l under samme vinkel. Den lille trekant har kateterne 1 og $|\alpha|$ (ifølge definition af hældningskoefficient) og dermed hypotenusen $\sqrt{1+\alpha^2}$. Vi kan nu se:

$$\frac{d}{1} = \frac{|PR|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Det akseparallelle stykke $|PR| = |y_1 - y|$, men da y ligger på linien, svarende til x_1 er $y = \alpha x_1 - q$.

Vi får således: $|PR| = |y_1 - \alpha x_1 - q|$, som indsat ovenfor giver den ønskede formel:

$$d = dist(P,l) = \frac{|y_1 - \alpha x_1 - q|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Denne formel, kan anvendes, som den er, men den bliver mere enkel, hvis vi indsætter α som $-\frac{a}{b}$ og $\alpha x_1 + q$ som $-\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$.

$$d = dist(P,l) = \frac{|y_1 - \alpha x_1 - q|}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{|y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}|}{\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}} = \frac{|b||y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}|}{|b|\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}} = \frac{|by_1 + ax_1 + c|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

Efter ombytning af leddenes rækkefølge får man:

Formlen for afstanden mellem punktet $P\ (x_1,y_1)$ og linien med ligningen $ax + by + c = 0$

$$d = dist(P,l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Eksempel

Bestem afstanden fra (-5,7) til linien med ligningen 3x – 4y + 5 = 0. Det er blot, at indsætte punktets koordinater i "liniens ligning".

$$dist(P,l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3(-5) - 4\cdot 7 + 5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{38}{5}$$

Eksempel

Vi vil bestemme arealet af en trekant givet ved vinkelspidserne $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ og $C(c_1, c_2)$. Arealet udregnes som T = ½hg (en halv højde gange grundlinie). Vi vælger højden fra C. Grundlinien er da |AB|, som beregnes med afstandsformlen: $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$. Højden h_c bestemmes som afstanden fra C til linien gennem A og B.

Denne linie har ligningen: $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) \Leftrightarrow (y-a_2)(b_1-a_1) - (b_2-a_2)(x-a_1) = 0$

$$h_c = \frac{(c_2-a_2)(b_1-a_1) - (b_2-a_2)(c_1-a_1)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

Herefter kan vi opskrive en formel for trekantens areal

$$T = \tfrac{1}{2}h_c|AB| = \frac{1}{2}\,\frac{|(c_2-a_2)(b_1-a_1) - (b_2-a_2)(c_1-a_1)|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}} \cdot \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\,|\,(c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)\,|$$

Formlen er mere overskuelig, hvis den opskrives som en determinant.

$$T = \tfrac{1}{2}\,\left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}\right|$$

Vi skal senere vise denne formel på en mere enkel måde ved vektorregning.

Eksempel
Bestem arealet af trekanten med vinkelspidserne: A(-3,-4) , B(4,2) og C(-1,8). Man kan selvfølgelig gennemfør de samme regninger som ovenfor, men det er lettere at indsætte i formlen:

$$T = \tfrac{1}{2}\,\left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\,\left|\begin{vmatrix} 4-(-3) & -1-(-3) \\ 2-(-4) & 8-(-4) \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\,\left|\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\,|\,7\cdot 12 - 6\cdot 2\,| = 36$$

7. Cirklens ligning

Hvis man opskriver en ligning, der indeholder x og y, så svarer det til en punktmængde i en plan, der er forsynet med et koordinatsystem. Vi anfører (de to sidste uden bevis)

$\{(x,y) \mid 2x\text{-}3y - 5 = 0\}$ er en ret linie med hældning $\frac{2}{3}$ som afskærer stykket $-\frac{5}{3}$ på y-aksen.

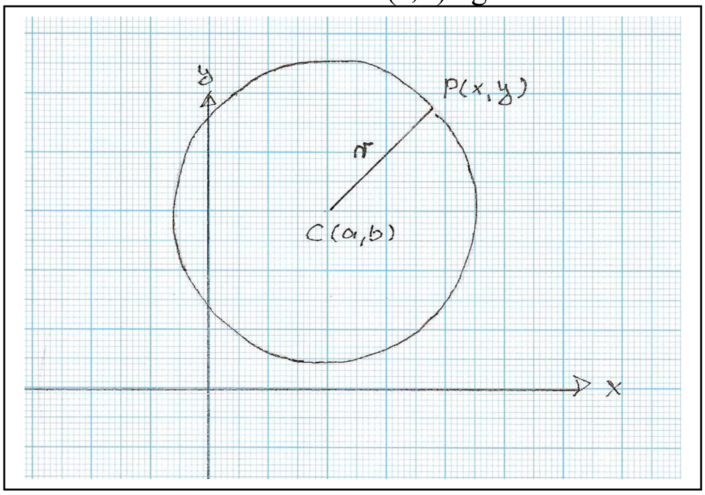
$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$ er en cirkel med centrum i (0, 0) og radius 3

$\{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y = \sqrt{x}\}$ er en parabelgren.

Udtrykkene

$$2x\text{-}3y - 5 = 0, \qquad x^2 + y^2 = 9 \qquad og \qquad x \geq 0 \wedge y = \sqrt{x}$$

kaldes for ligningerne for de pågældende punktmængder. Foreløbig har vi kun udledt et udtryk for liniens ligning, og vi fortsætter med at udlede et udtryk for cirklens ligning.
Lad cirklen have centrum $C(a,b)$ og radius r.



Vi kan nu indse, at P ligger på cirklen c, *hvis og kun hvis*

$$|CP| = r$$

$|CP|$ beregnes med afstandsformlen.

$$|\,CP\,| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \;\Leftrightarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Det sidste udtryk betegnes som ligningen for cirklen med centrum i (a,b) og radius r.

Eksempler

1. Bestem ligningen for cirklen med centrum i (-3,2) og radius 4.

   Løsning: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$

2. Det sker, at der er forelagt et andengradsudtryk i x og y, som fremstiller en cirkel, og man så skal bestemme centrum og radius for cirklen. F.eks.

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 1 = 0$$

   Vi omskriver da leddene med x og y til kvadratet på en toleddet størrelse. Da kvadratet på 2. led som regel ikke findes i udtrykket, må vi trække det fra bagefter. Regningerne udføres bedst (uden fejl) som vist nedenfor:

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

   Cirklen har derfor centrum i (1,-3) og radius 3.

3. Undersøg om linien l med ligningen $y = x+2$ skærer cirklen med centrum C= (2,3) og radius 4.
   Find i givet fald skæringspunkterne.

   Betingelsen for at linien skærer cirklen er, at afstanden fra linien til centrum er mindre end radius.

   Linien kan skrives: $x - y + 2 = 0$

$$d = dist(C,l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1\cdot 2 - 1\cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 4 \qquad \text{Linien skærer cirklen.}$$

Cirklen har ligningen $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$. For at finde skæringspunkterne indsætter vi $y = x+2$ i cirklens ligning, hvorefter vi får en andengradsligning i x.

$$(x-2)^2 + (x+2-3)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (x-1)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 6x - 11 = 0$$

$$d = 6^2 - 4\cdot 2\cdot 11 = 124 \qquad x = \frac{6 \pm \sqrt{124}}{4} \approx \begin{cases} 4{,}28 \\ -1{,}28 \end{cases} \quad \wedge \quad y = x + 2 = \frac{14 \pm \sqrt{124}}{4} \approx \begin{cases} 6{,}28 \\ 0{,}716 \end{cases}$$

Linien skærer altså cirklen i punkterne (4,28; 6,28) og (-1,28; 0,716).

4. Bestem ligningerne for de tangenter til cirklen $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$, som er parallelle med linien $2x - 3y + 5 = 0$.
   Alle linierne $2x - 3y + c = 0$ har samme hældningskoefficient. Det gælder så blot om at bestemme c, således at afstanden til cirklens centrum er lig med radius.

$$d = dist(P,l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2\cdot(-2) - 3\cdot 3 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{|-13 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -13 + c = 3\sqrt{13} \ \vee \ -13 + c = -3\sqrt{13} \quad \Leftrightarrow$$

$$c = 3\sqrt{13} + 13 \quad \vee \quad c = -3\sqrt{13} + 13$$

De to ligninger er derfor

$$2x-3y+3\sqrt{13}+13=0 \quad \vee \quad 2x-3y+-3\sqrt{13}+13=0$$

5. **Ligningen for tangenten til en cirkel gennem et givet punkt**

Lad cirklen have centrum $C(a,b)$ og radius r, og lad $P_0=(x_0,y_0)$ være et punkt på cirklen..
Linien fra C to P_0 har hældningen: $\frac{y_0-b}{x_0-a}$, og derfor vil tangenten i P_0 have hældningen $-\frac{x_0-a}{y_0-b}$,
(fordi produktet af hældningskoefficienterne for ortogonale linier er -1)
Ligningen for tangenten gennem (x_0, y_0) bliver derfor.

$$y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (y_0-b)(y-y_0)+(x_0-a)(x-x_0)=0$$