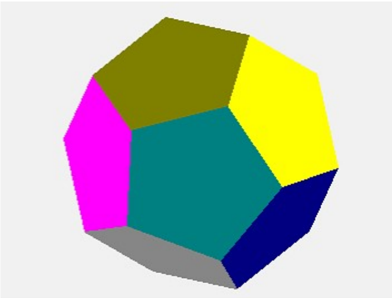
Elementær Matematik

- Rentesregning
- Eksponentialfunktioner,
- Logaritmefunktioner
- Potensfunktioner



Ole Witt-Hansen

Køge Gymnasium 2008

Indhold

Kap 1. Procent og Rentesregning

1. Regning med procenter

Man har indført symbolet % til at betegne 1/100. Vil man f.eks. udregne 3,5% af 450, sker det på følgende måde:

(1.1) 1% = 1/100 af 450 = 4,50.
3,5% = 3,5·4,50 =15,75.

Idet 3,5% = 0,035, så vil 3,5% af 450 fra nu af *altid* blive udregnet som: 450·0,035 = 15,75

Man anvender ofte bogstavet p til at betegne en procentsats. Man skriver da: $p\% = p/100$.
$p/100$ betegnes ofte med r. Der gælder således sammenhængen: $r = p\% = p/100$.

r kaldes for *rentefoden* eller *vækstraten*.

Skal man beregne renten R af kapitalen K, når rentefoden er r, så gælder der, ifølge eksemplet ovenfor formlen:

(1.2) $$R = K \cdot r$$

Denne formel gælder naturligvis også selv om, der ikke er tale om rente af en kapital, men blot almindelig procentregning. Skal man finde $p\% = r$ af en størrelse k, og kaldes resultatet i (interest = rente), gælder der formlen:

(1.3) $$i = k \cdot r$$

Med denne formel kan man f.eks. også besvare spørgsmålet: Hvor mange procent udgør 27 af 179? Indsætter man nemlig $i = 27$ og $k = 179$ i formlen (1.3) og isolerer man r fås:

$$r = \frac{i}{k} = \frac{27}{179} = 0{,}1508 = 15{,}08\%$$

Vi vil nu vise en vigtig formel, der udtrykker hvor meget en kapital K (en størrelse) er vokset til, når den er forøget med $p\%$ svarende til rentefoden r.

Kaldes den forøgede kapital for K_1, er K_1 lig med kapitalen K plus renten R, som er $K \cdot r$.

$$K_1 = K + R = K + K \cdot r = K(1+r), \text{så}$$

(1.4) $$K_1 = K(1 + r)$$

Der gælder naturligvis den samme formel, selv om det ikke drejer sig om rente og kapital.
Skal vi finde, hvor meget en størrelse k er vokset til, når den er forøget med $p\% = r$, gælder:

(1.5) $$k_1 = k(1+r)$$

Bemærk, at vækstraten r godt kan være *negativ*, selv om vi bruger ordet "vokser". At en størrelse aftager med 15% er det samme som, at den vokser med -15%

Eksempel:

1. I et stormagasin annonceres der med, at en vare er nedsat med 20 %. Varen sælges nu for 457,- kr. Hvad kostede varen før nedsættelsen?
   Vi anvender formlen (1.5) med k_1 = 457, r = - 20% = - 0,2 og bestemmer k, får man: k = 457/(1-0.2) = 571,25.

2. Et år havde en virksomhed indtægter på 257.000,- kr. og udgifter på 301.000 kr. Det følgende år vokser indtægterne med 5%, udgifterne med 3%. Hvor mange procent er underskuddet vokset/aftaget med?
Kaldes underskuddene u og u_1 har vi:

$$u = 257.000 - 301.000 = -44.000 \quad \text{og} \quad u_1 = 257.000 \cdot 1.05 - 301.000 \cdot 1.03 = -40.180$$

Vi anvender da formlen (1.5): 40.180 = 44.000(1+r) $\Rightarrow$ (1+r) = 40180/44000 = 0,9132 $\Rightarrow$ r = 0,9132-1 = -0,0868
Underskuddet er reduceret med = 8,68 %.

2. Renteformlen

Når en kapital står til forrentning i et pengeinstitut, tilskrives der rente med konstante tidsintervaller. En periode mellem to rentetilskrivninger kaldes en *termin*. Man kan have helårlige, halvårlige, kvartårlige eller månedlige terminer.
Rentefoden angives alligevel næsten altid som den årlige rentefod, selv om terminerne er kortere.

Hvis banken f.eks. lover 5*% p.a.* (pro annum = årlig), og der er halvårlige rentetilskrivninger, vil renten pr. termin være 2,5%, men som det vil fremgå af det følgende, vil dette *ikke* svare til en effektiv årlig rente på 5 *%*.

Hvis kapitalen K er blevet forrentet med rentefod r i n terminer, kunne man måske umiddelbart tro at den tilskrevne rente var $n \cdot K \cdot r$ (n gange renten i en termin). Dette er imidlertid ikke rigtigt, fordi kapitalen K vokser, når den forrentes, så det beløb der skal beregnes rente af i den næste termin er større, og sådan fremdeles. Dette kaldes for *rentes rente*. Renten bliver nemlig også forrentet.

Vi vil nu opstille en formel for K_n *,* den indestående kapital efter n-terminer, når startkapitalen er K og rentefoden er r.
Vi ved, at vi finder hvad en kapital er vokset til i 1 termin ved at gange med (1+r). Heraf følger:

$$K_1 = K \cdot (1+r) \qquad \text{(kapitalen efter 1. termin)}$$
$$K_2 = K_1 \cdot (1+r) = K \cdot (1+r)^2 \qquad \text{(kapitalen efter 2. terminer)}$$
$$K_3 = K_2 \cdot (1+r) = K \cdot (1+r)^3 \qquad \text{(kapitalen efter 3. terminer)}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$K_n = K_{n-1} \cdot (1+r) = K \cdot (1+r)^n \qquad \text{kapitalen efter } n \text{ terminer)}$$

Vi finder da den vigtige *renteformel:*

(1.6) $$K_n = K \cdot (1+r)^n$$

K_n er indestående, når en kapital K er blevet forrentet i n-terminer til rentefod r.

Den udledte formel er ikke begrænset til forrentning af en kapital.
Hvis en størrelse b har en vækstrate r i en periode, vil den efter n-perioder være vokset til:

$$b_n = b(1+r)^n$$

Opfatter vi dette som en *funktion* af n, kan vi skrive $f(n) = b(1+r)^n$.

Man har tradition for at sætte: $a = 1+r$.

a kaldes for *fremskrivningsfaktoren*, og vi kan således skrive:

$$f(n) = b(1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = b \cdot a^n \quad \text{hvor } a = 1+r \quad \text{eller} \quad r = a-1$$

Sammenhængen mellem renteformlen og *eksponentielle* funktioner $f(x) = b \cdot a^x$, skulle da være indlysende, idet $1+r$ er erstattet af a, og det hele tal n er erstattet af den reelle variabel x.

2.1 Eksempel.
1. I en bank indsættes 2.000,- kr. til 4,5% p.a. Der er halvårlige rentetilskrivninger. Find indestående efter 7 år.
Antallet af terminer n =14. rentefoden r = 0,0225 og k = 2000. Ved at indsætte i (2.1) fås:

$$k_{14} = 2000\,(1{,}0225)^{14} = 2.730{,}97 \text{ kr.}$$

2. Ved en afbetalingshandel tilbydes der et lån med en månedlig rente på 1,5%. Det skulle jo give ca. 12· 1,5% = 18% i årlig rente...? Beregn den korrekte effektive årlige rente.
Vi anvender (2.1) med k=1, for at se hvor meget 1 kr. vil vokse til på 12 terminer med rentefod 1,5% =0,015.

$$k_{12} = (1{,}015)^{12} = 1{,}1956 \quad \text{Som er en forøgelse med } 19{,}56\%$$

På grund af rentes rente, vil den effektive rente i n terminer være større end n gange renten i 1 termin..

3. Sildebestanden i Østersøen i mill. Tons., kan siden 1987 beskrives en eksponentiel funktion, : $f(x) = 132(0{,}82)^x$.
Bestem vækstraten.

a = 0,82, så r = 0,82-1 = -0,18 = - 18%. Sildebestanden er altså aftaget med 18% om året.

3. Gennemsnitlig rentefod (vækstrate)

Den gennemsnitlige rentefod (vækstrate) er defineret som:

Den konstante rentefod, som giver den samme vækst i det samme antal perioder.

Begrebet gennemsnitlig vækstrate illustreres bedst ved et eksempel.

Eksempel
Væksten i produktionen for en virksomhed er 2% fra 1980-82, 5,5% fra 1982-85, 1,5% fra 1985-86, -4,3% fra 1986-88 og -1,8% fra 1988 til 1990. Hvad en den gennemsnitlige vækstrate over denne periode på 10 år?
Vi finder først hvor meget væksten har været i de 10 år. Ifølge formlen ovenfor er det:

$$(1+r_1)^2 \cdot (1+r_2)^3 \cdot (1+r_3) \cdot (1+r_4)^2 \cdot (1+r_5)^2 = (1{,}02)^2 \cdot (1{,}055)^3 \cdot (1{,}015) \cdot (0{,}957)^2 \cdot (0{,}98)^2 = 1{,}0907.$$

Ved den gennemsnitlige vækstrate (rentefod), forstår man den *konstante* vækstrate r, som giver den *samme* vækst i det *samme* antal terminer. Der må altså gælde:

$$(1+r)^{10} = (1+r_1)^2 \cdot (1+r_2)^3 \cdot (1+r_3) \cdot (1+r_4)^2 \cdot (1+r_5)^2 \iff (1+r)^{10} = 1{,}0907$$

$$(1+r) = \sqrt[10]{1{,}0907} = 1{,}0087 \Rightarrow r = 0{,}0087 = 0{,}87\,\% \quad \text{(Den gennemsnitlige vækstrate)}$$

Den samme fremgangsmåde kan anvendes i alle andre eksempler. Det er naturligvis muligt at opskrive en generel formel til beregning af den gennemsnitlige rente, men den er ikke så let at anvende, hvis man ikke forstår princippet.

Kap 2 Opsparings- og gældsannuiteter

1. Annuiteter

En annuitet er en række af indbetalinger, der foretages med konstant tidsinterval. Perioden mellem to indbetalinger kaldes en termin. Det indbetalte beløb forrentes med en rentefod r pr. termin. For at de efterfølgende formler skal være korrekte, skal indbetalingerne foretages samtidig med rentetil-skrivningen.

I det følgende vil n betegne antallet af indbetalinger, og A_n skal betegne værdien af indestående efter n indbetalinger. Dette vil, som vi skal se nedenfor svare til n-1 terminer. Den konstante indbetaling kaldes for ydelsen og betegnes y.

For at føre en kapital 1 termin frem, skal der som sædvanlig multipliceres med $(1+r)$. Nedenfor er opskrevet værdien af indestående, efter 0. terminer, 1. termin, 2. terminer,...,efter n-1 terminer.

$$\begin{aligned}
A_1 &= y \\
A_2 &= y(1+r) + y \\
A_3 &= (y(1+r) + y)(1+r) + y = y(1+r)^2 + y(1+r) + y \\
&\dots \\
A_n &= y(1+r)^{n-1} + y(1+r)^{n-2} + \dots + y(1+r) + y
\end{aligned}$$

Eller, hvis vi skriver leddene i den omvendte rækkefølge

$$A_n = y + y(1+r) + \dots + y(1+r)^{n-2} + y(1+r)^{n-1}$$

Bemærk, at der er n led i rækken, svarende til n indbetalinger, og at eksponenten i det sidste led er n-1 og ikke n.
Bemærk endvidere, at man kommer til det efterfølgende led ved at multiplicere med $1+r$. En række af tal, hvor man kommer fra ethvert led til det efterfølgende ved at gange med den samme faktor kaldes for en *kvotientrække*. Hvad vi ønsker er derfor, at finde en formel for summen af en kvotient-række.

1.1 Sum-formel for en kvotientrække

Vi opskriver nu en kvotientrække, hvor det første led kaldes a og kvotienten kaldes for k. Summen af de n første led betegnes S_n.

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-2} + ak^{n-1}$$

For at udlede en sumformel, multiplicerer vi rækken med k , og subtraherer S_n fra kS_n.

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-1} + ak^n$$
$$kS_n - S_n = ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-1} + ak^n - (a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-2} + ak^{n-1})$$

Ved subtraktionen vil alle leddene $ak,\ ak^2\ ak^3.....ak^{n-1}$ ud mod hinanden, og vi finder:

$$kS_n - S_n = ak^n - a \quad \Leftrightarrow \quad S_n(k - 1) = a(k^n - 1)$$

formlen for S_n bliver således:

(1.1) $$S_n = a\frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Bemærk, at n betegner antallet af led i rækken.

1.2 Opsparingsannuitet

Vi anvender nu denne formel på vores annuitet. Vi skal da blot indsætte n = antallet af indbetalinger), $a = y$ (ydelsen) og $k = 1+r$. Efter en triviel omskrivning af nævneren finder man:

(1.2) $$A_n = y\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bemærk, at n står for *antallet* af indbetalinger. Indbetaler man f.eks. 1000 kr. hver termin i 12 år er der 12 terminer og 13 indbetalinger.

1.3 Gældsannuitet

Et annuitetslån er et lån, der betales tilbage med en *konstant ydelse*, hvoraf en del er rente og resten afdrag. Afdraget er altså det beløb, hvormed gælden nedbringes.

I begyndelsen af lånets løbetid er hovedparten af ydelsen renter, (som man kan fratrække i skat), men i slutningen af løbetiden er hovedparten afdrag.

Vi ønsker at udlede en formel for restgældens størrelse efter n terminer. Lånets oprindelige størrelse kaldes for *hovedstolen* og betegnes G. Restgælden efter n terminer (lig med n indbetalinger) betegnes G_n. Rentefoden pr. termin betegnes r, og ydelsen betegnes y.

Vi opskriver nu et udtryk for restgælden efter 0, 1, 2.., n terminer.

$G_0 = G$

$G_1 = G(1+r) - y$; Kapitalen G er vokset til G(1+r), hvorefter der indbetales y

$G_2 = G_1(1+r) - y = (G(1+r)-y))(1+r) - y = G(1+r)^2 - y(1+r) - y$

$G_3 = G_2(1+r) - y = G(1+r)^3 - y(1+r)^2 - y(1+r) - y$

...

$$G_n = G(1+r)^n - y(1+r)^{n-1} - y(1+r)^{n-2} - ... - y(1+r) - y$$

Vi ser nu, at der gælder formlen:

$$G_n = G(1+r)^n - A_n \;.$$

Hvor A_n betegner den tidligere udledte annuitetsformel. Indsættes denne formel fås:

$$(1.3) \qquad G_n = G(1+r)^n - y\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Med denne formel, kan man udregne restgælden efter n terminer. Vi er specielt interesserede i en formel, hvor $G_n = 0$, altså hvor restgælden er 0, det vil sige, hvor lånet er betalt tilbage:

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} 0 = G(1+r)^n - y\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad &\Leftrightarrow \\ G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \end{aligned}$$

For at opnå det sidste udtryk, har vi divideret med $(1+r)^n$ og flyttet G over på den anden side af lighedstegnet.

Den sidste formel angiver sammenhængen mellem *hovedstol* G (Lånets oprindelige størrelse), *ydelsen* y pr. termin, *rentefoden* r og *løbetiden* n (antallet af terminer = antallet af indbetalinger)

1.5 Eksempel. Gælds-annuitet

En huskøber optager et realkredit lån på en million. Løbetiden er 20 år, der er månedlige afdrag og den årlige rentefod er 2,4% = 0,002% per år. Bestem den månedlige ydelse y.

Løsning: Vi anvender formlen (1.4) idet vi først isolerer y.

$$y = \frac{rG}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{0.002 \cdot 1{,}000{,}000}{1-1.002^{-240}} = 5.240{,}00$$

Kap 3. Eksponentialfunktioner

1. Potensbegrebet

Symbolet a^n , hvor $a \in R$ og $n \in Z_+$ er defineret ved:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n\text{-faktorer})$$

a^n kaldes en potens. a kaldes for *roden* og n kaldes for *eksponenten*. For potenser gælder følgende

1.1 Potensregneregler

Hvis $a, b \in R$ og $n, m \in Z_+$ gælder:

1) *Man multiplicerer to potenser med samme rod ved at addere eksponenterne*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2) *Man dividerer to potenser med samme rod ved at subtrahere nævnerens eksponent fra tællerens eksponent.*

Hvis $n > m$: $$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

3) *Man opløfter en potens til potens ved at multiplicere eksponenterne*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

4) *Man opløfter et produkt til potens ved at opløfte hver af faktorerne.*

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5) *Man opløfter en brøk til potens, ved at opløfte tæller og nævner hver for sig*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Bevis for 1)

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-faktorer} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m-faktorer} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n+m-faktorer} = a^{n+m}$$

Bevis for 2)

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n-faktorer}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m-faktorer}} = a^{n-m}$$

Bevis for 3)

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n-faktorer} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \cdot m-faktorer} = a^{m \cdot n}$$

Bevis for 4)

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n-faktorer} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-faktorer} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n-faktorer} = a^n \cdot b^n$$

Beviset for 5) laves helt tilsvarende

2. Udvidelse af potensbegrebet til negative heltal og nul

Hvis man ønsker at udvide potensbegrebet til at omfatte negative heltal og nul, så vil vi stille det (indlysende) krav, at *potensregnereglerne* 1-5 *fortsat skal være gyldige*.

Vi foretager da det man kalder en analyse, idet vi anvender potensregnereglerne 1-5 for at fastlægge betydningen af f.eks. 2^0 og 3^{-5}.

Først ser vi på a^0, hvor a er et reelt tal forskelligt fra 0. Der gælder ifølge (1.2):

$$1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 .$$

Vi kan heraf se, at hvis (1.2) stadig skal gælde må vi sætte

$$a^0 = 1 \qquad \text{for alle } a \text{ forskellig fra 0.}$$

Vi ser dernæst på:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n} .$$

Vi ser da, at hvis den anden potensregel fortsat skal være gyldig, må vi sætte:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vi mangler da blot at godtgøre, at alle potensreglerne faktisk stadig er gyldige, ved disse fastsættelser. (Hvis det ikke var tilfældet, ville de nye definitioner være meningsløse).

Vi nøjes med at vise dette ved at par eksempler, hvor m og n her betegner hele positive tal:

$$a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m} \qquad \text{(Ifølge de oprindelige potensregler)}$$

$$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \text{(Ifølge udvidelsen til negative eksponenter)}$$

$$(a^m)^{-n} = (a^{-m})^n = a^{-m \cdot n} \qquad \text{(Ifølge de oprindelige potensregler)}$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-m \cdot n} \qquad \text{(Ifølge udvidelsen til negative eksponenter)}$$

3. Udvidelse af potensbegrebet til rational eksponent

Vi minder om definitionen af symbolet $\sqrt[n]{a}$, hvor $a \in R \setminus R_- \quad og \quad n \in Z_+$.

(1.8) $\sqrt[n]{a}$ er det *ikke negative tal*, som opløftet til *n*'te potens giver *a*.

Udtrykt mere formelt: $\sqrt[n]{a} = b \;\Leftrightarrow\; b \geq 0 \;\wedge\; b^n = a$

Eksempler.

$\sqrt[3]{8} = 2 \;\; i\text{det} \;\; 2 \geq 0 \;\; og \;\; 2^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3 \;\; i\text{det} \;\; 3 \geq 0 \;\; og \;\; 3^4 = 81$

Bemærk i det sidste eksempel at betingelsen $b \geq 0$ er nødvendig, idet såvel $3^4 = 81$ og $(-3)^4 = 81$.

Vi vil nu søge at fastlægge en betydning af symbolet $a^{\frac{p}{q}}$, hvor $p, q \in Z_+$.

Betingelsen for at foretage en udvidelse af potensbegrebet er som før, at regnereglerne 1) til 5) fortsat skal være gyldige. Helt på samme måde som før, foretager vi en analyse ved hjælp af disse regneregler.

Vi ser først på $a^{\frac{1}{q}}$, hvor eksponenten er en stambrøk.

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^{\frac{1}{q} \cdot q} = a^1 = a \qquad \text{(3. regneregel)}$$

På den anden side, gælder der også ifølge definitionen af $\sqrt[q]{a}$: $\left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a$,
hvoraf vi fastsætter:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Og fortsætter,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Vi mangler blot at godtgøre at regnereglerne for potenser stadig er opfyldt med de nye fastsættelser. Det kan i princippet gøres, som ved den første udvidelse. Regningerne er ligetil, men lidt ”snørklede”, så vi springer det over.

Udvidelsen af potensbegrebet til *negative* rationale *eksponenter* er helt ligetil.

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

Bemærk i øvrigt følgende omskrivning, som man ofte med fordel kan gøre brug af.

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)$$

Eksempel

$$\frac{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[4]{2})^3}{\sqrt[6]{2^4}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{4}{6}}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2}^{\,5}$$

At foretage en udvidelse af potensbegrebet til alle *reelle* eksponenter, er ikke så ligetil, idet det kræver kendskab til nogle lidt dybere sætninger vedrørende de reelle tals legeme, hvis det skal gøres matematisk korrekt.

Man kan f.eks. ikke fra regnereglerne slutte sig til betydningen af f.eks. $3^{\sqrt{2}}$ *eller* $2^{-\pi}$.

Der gælder imidlertid en sætning fra talteorien, at ethvert irrationelt tal, kan tilnærmes vilkårligt nøjagtigt med et rationalt tal. Da potenserne er defineret for alle rationale tal, vil vi derfor antage, at de også kan defineres for irrationale tal – og dermed at potensreglerne også gælder for potenser med irrational eksponent.

Vi definerer da for *positiv reel rod* og *reel eksponent* et generelt potensbegreb

$$a^x \quad hvor \quad a \in R_+ \quad og \quad x \in R$$

Hvorledes man udregner a^x, når x er irrational, må vi foreløbig vente med til vi har indført logaritmefunktioner, men a^x kan naturligvis findes på en matematisk lommeregner.

(Vi udskyder definitionen af *logaritmefunktioner*, til slutningen af integralregningen)

Funktionen a^x opfattet som en funktion af x, kaldes for *eksponentialfunktionen med grundtal a*, og skrives:

$$f(x) = a^x \quad hvor \quad a \in R_+ \quad og \quad x \in R$$

Ifølge det foregående gælder *potensregnereglerne for alle eksponentialfunktioner*, og vi repeterer dem derfor igen:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Der gælder, at a^x er *voksende* for $a > 1$ og *aftagende* for $0 < a < 1$:

Bevis:
En funktion f er voksende i et interval *I*, hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$ gælder:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Først noterer vi os at:

$$x > 0 \quad \wedge \quad a > 1 \quad \Rightarrow \quad a^x > 1$$

og

$$x > 0 \quad \wedge \quad 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad a^x < 1$$

Det følger da at a^x er voksende for $a > 1$, idet:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \quad => \quad a^{x_2 - x_1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$$

Derimod er a^x aftagende for $0 < a < 1$, idet:

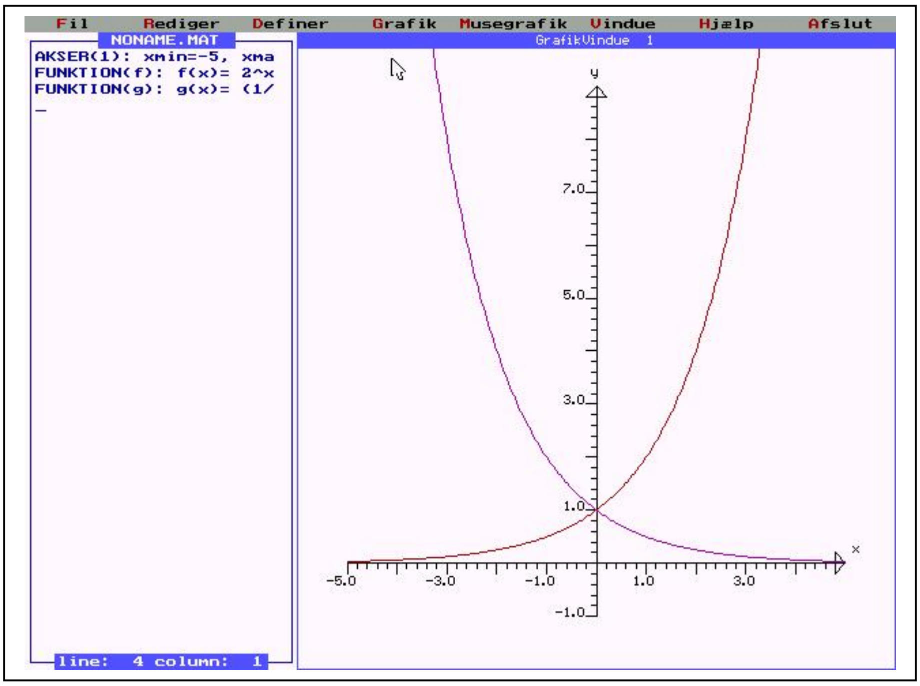
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \quad => \quad a^{x_2 - x_1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}$$

Vi noterer til slut, (uden bevis, da det kræver kendskab til logaritmer) at:

$$a > 1: \quad a^x \to \infty \quad for \quad x \to \infty \quad og \quad a^x \to 0 \quad for \quad x \to -\infty$$
$$0 < a < 1: \quad a^x \to 0 \quad for \quad x \to \infty \quad og \quad a^x \to \infty \quad for \quad x \to -\infty$$

På figuren nedenfor er skitseret graferne for $f(x) = 2^x \quad og \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Man bemærker at de to grafer er symmetriske om y-aksen, idet $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



Kap 4. Logaritmefunktioner

1. Logaritmefunktioner

Idet $f(x) = a^x$ for $a \neq 1$ er monoton, det vil sige voksende eller aftagende, så har den en omvendt funktion. Den omvendte funktion kaldes for logaritmefunktionen med grundtal a og skrives:

(2.1) $$f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Om en funktion og dens omvendte funktion, gælder følgende:

(2.2) $$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$Dm(f^{-1}) = Vm(f) \;\; og \;\; Vm(f^{-1}) = Dm(f)$$

Når vi anvender dette på $f(x) = a^x$, får man:

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = log_a(y) \qquad \text{og} \qquad y = log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

$$Dm(log_a) = R_+ \quad og \quad Vm(log_a) = R$$

Specielt får man:

$$a^0 = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; log_a(1) = 0 \qquad \text{og} \qquad a^1 = a \quad \Leftrightarrow \quad log_a(a) = 1$$

Graferne for $y = a^x$ og $x = log_a(y)$ er identiske, da de to udtryk er ensbetydende, men når man ombytter x med y, spejler man i linien $x = y$, så grafen for $y = log_a(x)$ er grafen for $y = a^x$ spejlet i linien $y = x$.

Det viser sig, at alle logaritmefunktioner er proportionale, som vist nedenfor med et eksempel.
Vi skal kun beskæftige os med to logaritmefunktioner, nemlig den logaritmefunktion med grundtal 10, som skrives log (*titalslogaritmen*), og som har været anvendt til numeriske beregninger, siden 1600-tallet og indtil computere for alvor blev taget i brug i starten af 1970, samt logaritmefunktion med grundtallet e= 2,718281828….
Tallet e er irrationalt (egl. *transcendent*). Denne logaritmefunktion skrives ln og kaldes *den naturlige logaritme*. Forklaringen på dette vil først blive givet i slutningen af integralregningen.

Eksponentialfunktionen med grundtal e skrives e^x. Såvel ln(x), e^x, log(x) *og* 10^x findes på alle grafregnere og matematiske lommeregnere. Som for alle funktioner og deres omvendte funktioner, gælder der for ethvert x.

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y) \qquad \text{og} \quad y = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(y)$$

For alle logaritmefunktioner gælder der de samme logaritmeregneregler. Vi vil nøjes med at bevise dem for den naturlige logaritme ln, da det letter beviset lidt, og da alle logaritmefunktioner er proportionale.

For alle $a,b \in R_+$ *og* $x,y \in R$, gælder følgende regneregler:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

Vi viser: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

$$x = \ln(a) \quad \Leftrightarrow \quad a = e^x \quad \text{and} \quad y = \ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad b = e^y.$$

Hvoraf følger

$$ab = e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \ln(ab) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Vi viser dernæst: $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

$$\ln(a) = \ln(\frac{a}{b}b) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

Bevis for: $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Vi sætter: $y = \ln(a) \quad \Leftrightarrow \quad a = e^y$

$$a^x = (e^y)^x = e^{y \cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = \ln(a^x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a^x) = x\ln(a)$$

Specielt gælder der for *n* positiv og hel, og a positiv og reel:

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(a)$$

Endvidere gælder der de vigtige identiteter, som man ofte har brug for.

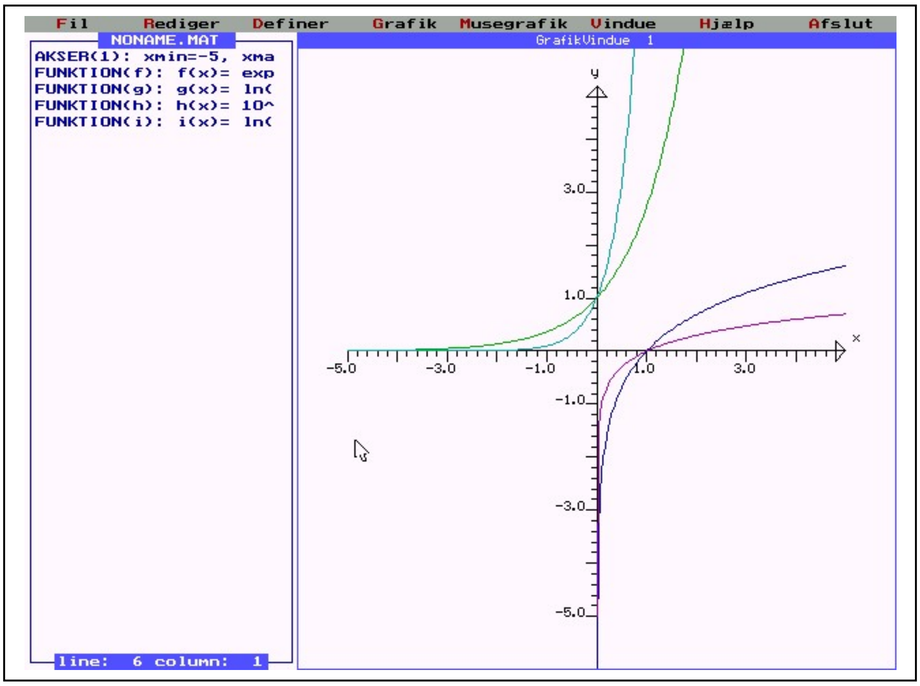
$$\ln(e^x) = x \quad og \quad e^{\ln x} = x \quad og \quad \log(10^x) = x \quad og \quad 10^{\log x} = x$$

Der gælder – lidt overraskende – at alle logaritmefunktioner er proportionale. Vi viser dette med et eksempel, idet vi viser, at $\ln(x)$ *og* $\log(x)$ er proportionale.

Idet vi anvender de udledte logaritmeregler, kan vi skrive:

$$x = 10^{\log x} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10^{\log x}) = \log x \ln(10) \Leftrightarrow \log x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10)\log x$$

$\ln(10) = 2{,}302585\ldots$ Nedenfor er vist graferne for $\ln(x)$, $\log(x)$, e^x *og* 10^x.



Eksempel. Der gælder den lidt overraskende sætning.

$$(1+\frac{1}{n})^n \;\rightarrow\; e \quad for \quad n \rightarrow \infty$$

Dette er et eksempel på en følge af rationelle tal, der går mod et transcendent tal .

Vi beviser det ved at vise, at $\ln(1+\frac{1}{n})^n \;\rightarrow\; 1 \;\; for \;\; n \rightarrow \infty$. Da ln er kontinuert og injektiv, følger at tallet selv vil gå imod e.

$$\ln(1+\frac{1}{n})^n = n\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

Sætter vi h = $\frac{1}{n}$ således at $h \;\rightarrow\; 0$ for $n \rightarrow \infty$, og anvender at ln 1 = 0 får man:

$$\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} \rightarrow 1 \quad for \quad h \;\rightarrow\; 0$$

Idet ln er differentiabel i 1 med differentialkvotienten 1. Heraf følger sætningen

Kap 5. Eksponentiel vækst og potensfunktioner

1. Eksponentielle funktioner

En eksponentiel funktion (nogen gange taler man om en eksponentiel vækst) er en funktion, der er proportional med en eksponentialfunktion. Hvis $a, b \in R_+$ defineres den som:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Da en eksponentiel funktion er proportional med en eksponentialfunktion, ligner graferne for de eksponentielle funktioner hinanden meget.
Eksponentielle funktioner optræder talrige steder i naturen. I fysik, i biologi og i økonomi.
Ofte får man stillet den opgave, at bestemme a og b, således at grafen for en eksponentiel funktion, går gennem to punkter (x_1, k_1) og (x_2, y_2). Metoden illustreres lettest ved et eksempel.

Eksempel. Exponentiel funktion gennem to punkter

$$f(3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ba^3 = 4 \qquad \text{and} \qquad f(-2) = ½ \quad \Leftrightarrow \quad ba^{-2} = ½$$

Ved at dividere den første ligning med den sidste:

$$\frac{ba^3}{ba^{-2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad a^5 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[5]{8}\ .$$

Dette kan så indsættes i en af ligningerne til at bestemme b.

$$ba^3 = 4 \quad \Rightarrow \quad b(\sqrt[5]{8})^3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{4}{(\sqrt[5]{8})^3} = 4 \cdot 8^{-\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4 \cdot 8^{-\frac{3}{5}}(\sqrt[5]{8})^x$$

For alle eksponentielle funktioner gælder: $f(0) = ba^0 = b$, så grafen for $y = ba^x$ går gennem $(0,b)$.

1.1 Løsning af eksponentielle ligninger

En ligning af formen $f(x) = c \ \Leftrightarrow \ ba^x = c$, løses ved at isolere eksponentialfunktionen og tage logaritmen på begge sider.

$$ba^x = c \Leftrightarrow a^x = \frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \log a^x = \log(\frac{c}{b}) \quad \Leftrightarrow \quad x \log a = \log(\frac{c}{b}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log(\frac{c}{b})}{\log a}$$

I dette tilfælde, har vi anvendt 10-tals logaritmen, men vi kunne lige så vel erstatte den med ln.

Eksempel:

$$5 \cdot 3^x = 7 \ \Leftrightarrow \ x \ln 3 = \ln(\frac{7}{5}) \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\ln(\frac{7}{5})}{\ln 3} \approx 0{,}3063$$

2. Fordoblings- og halveringskonstant

Eksponentielle funktioner har den egenskab, at de har en konstant relativ (procentisk) vækst, for en konstant tilvækst på den uafhængige variabel. Hvis vi sammenligner en eksponentiel funktion med renteformlen, og erstatter k_n med $f(x)$, k med b, $1+r$ med a og n med x, er dette indlysende.

$$k_n = k(1+r)^n \quad \text{bliver til} \quad f(x) = ba^x \qquad \text{med} \quad k = b \quad \text{og} \quad a = 1+r$$

r kaldes som bekendt for vækstraten og a for fremskrivningsfaktoren.
Men vi kan også vise sætningen om den konstante relative (procentiske) vækst direkte.
Giver vi nemlig x en tilvækst på h, vil vi udregne først den *absolutte tilvækst* på $f(x)$ og dernæst den relative tilvækst på $f(x)$.

Absolut tilvækst: $f(x+h) - f(x) = ba^{x+h} - ba^x = ba^x(a^h - 1)$

Den relative tilvækst finder man ved at dividere med $f(x) = ba^x$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^h - 1$$

Hvoraf det ses, at den relative vækst er uafhængig af x.

(For en lineær funktion $f(x) = ax + b$, gælder det omvendt at den absolutte tilvækst $f(x+h) - f(x) = ah$ er uafhængig af x, mens den relative tilvækst afhænger af x).

For en voksende eksponentiel funktion er fordoblingskonstanten defineret som den tilvækst, man skal give den uafhængige variabel (x) for at funktionen bliver fordoblet.

Da en eksponentiel funktion er karakteriseret ved at have konstant relativ vækst, kan vi på forhånd vide, at fordoblingskonstanten ikke kan afhænge af x. Fordobling svarer jo til en relativ vækst på 100%.

Betegnes fordoblingskonstanten med T_2, skal der derfor gælde:

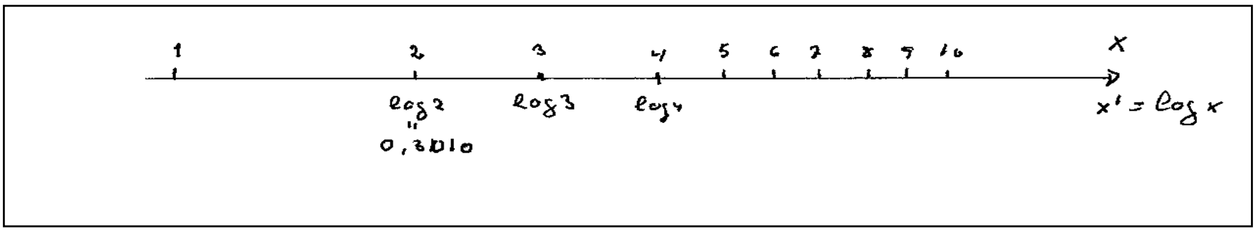
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^{T_2} - 1 = 1 \Leftrightarrow a^{T_2} = 2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\log 2}{\log a}$$

Helt tilsvarende definerer man for en aftagende eksponentiel funktion halveringskonstanten som den tilvækst $T_{½}$, man skal give den uafhængige variabel x for at funktionen bliver halveret.

En halvering af en funktion, svarer til en relativ tilvækst på -½. Vi får derfor ligesom før:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^{T_{\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln a} = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log a}$$

3. Logaritmisk skala



Ovenfor er vist et udsnit af en tallinie i intervallet [0,1]. Nederst er angivet den almindelige koordinat, som vi i dette tilfælde skriver med et mærke *x'*. Øverst er afsat det tal *x*, hvis logaritme er *x'*. Der gælder således: *x'* = log(*x*).
F.eks. er der ud fra *x'* = 0,3010 angivet 3, fordi log(3)= 0,3010.

x kaldes for den logaritmiske koordinat, så logaritmen til den logaritmiske koordinat er lig med en almindelige koordinat.

En tallinie, hvor der kun er angivet de logaritmiske koordinater *x*, kaldes for en *logaritmisk skala.* Fortsætter man den logaritmiske skala fra 10 til 100, vil den almindelige skala være intervallet [1,2] og inddelingen vil se ligesådan ud.

Dette følger af at f.eks. log(30) = log(10·3) = log(3)+log(10) = log(3) +1.

Når de logaritmiske koordinater bliver multipliceret med 10, sker der blot en forskydning på +1 i de almindelige koordinater. Tilsvarende med 0,3 , idet log(0,3) = log(3/10)= log(3) -1

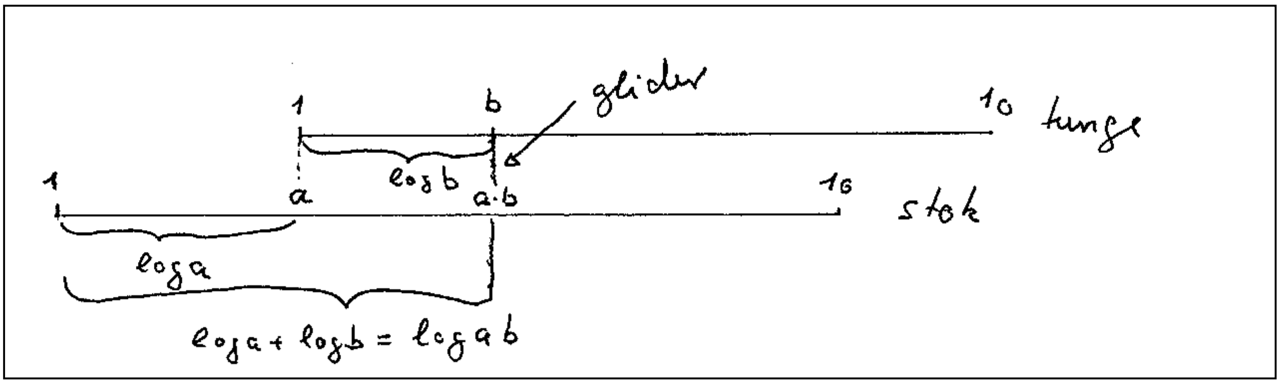
Når de logaritmiske koordinater bliver divideret med 10, sker der blot en forskydning på -1 i de almindelige koordinater.

[1/100,1/10] vil afbildes i [-2,-1]. [1/10,1] -> [-1,0]. [1,10] -> [0,1]. [10,100] -> [1,2].

Et afsnit af den logaritmiske skala f.eks. [1/100,1/10] eller [1,10], kaldes for en dekade.

Før lommeregnerens tid (1973) anvendte man logaritmiske skalaer til at foretage multiplikationer, divisioner, potensopløftning, roduddragning, samt sinus og cosinus af decimaltal.
Det skete ved hjælp af en såkaldt regnestok, hvor man havde 2 (faktisk flere) logaritmiske skalaer, der kunne forskydes i forhold til hinanden. Se figuren nedenfor. Den nederste skala, er placeret på "stokken", mens den øverste, som er forskydelig kaldes for "tungen". På regnestokken findes også en glider, der kan forskydes på stokken med nogle tynde lodrette streger, beregnet til at indstille to tal på stokken og tungen nøjagtig ud for hinanden.

Skal man multiplicere *a* med *b*, så indstiller man 1-tallet på tungen ud for *a*. Flytter dernæst glideren hen, så stregen står ud for *b* på tungen. På stokken, kan man da aflæse *a·b*, idet afstandene (de alm. koor.) til *a* og *b* er henholdsvis log(*a*) og log(*b*).
Summen af disse afstande er log(*a*)+log(*b*) = log(*a·b*), er placeret på stokken ud fra et punkt, som har den logaritmiske koordinat *a·b*.



Fordelen ved at anvende logaritmisk papir i forbindelse med *eksponentielle funktioner er, at sådanne funktioner alle danner en ret linie i enkelt logaritmisk afbildning*.

Dette følger idet, mærkede koordinater, som hidtil betegner de almindelige koordinater, mens umærkede betegner logaritmiske koordinater.

$$y = ba^x \Leftrightarrow \log y = \log b + x \cdot \log a \Leftrightarrow y' = a' \cdot x' + b'$$

Da det sidste udtryk fremstiler en ret linie i de almindelige (geometriske) koordinater følger påstanden.
Det er sådan, at den eneste kurve man med sikkerhed kan genkende visuelt er en ret linie.
Hvis man derfor har et observationsmateriale, og vil undersøge om det svarer til en eksponentiel funktion, så afsætter man punkterne i et enkelt logaritmisk koordinatsystem.
Hvis punkterne med tilnærmelse kan siges, at ligge på en ret linie, så repræsenterer observationsmaterialet med stor sikkerhed en eksponentiel funktion.
Hvis funktionen hedder $f(x) = ba^x$, kan man bestemme a og b ved at aflæse *to punkter på linien*, (ikke to punkter af observationsmaterialet), og bestemme a og b, på samme måde, som vi viste det i et eksempel ovenfor.

Ofte vælger man i stedet at bestemme fordoblingskonstanten (halveringskonstanten) på følgende måde:
Man vælger to punkter på y-aksen, som svarer til en fordobling. For eksempel $y_1 = 2$ og $y_2 = 4$ eller $y_1 = 19$ og $y_2 = 38$, og finder derefter de tilsvarende punkter x_1 *og* x_2 på x-aksen.
Fordoblingskonstanten er da lig med:

$$T_2 = x_2 - x_1.$$

På helt tilsvarende vis finder man halveringskonstanten $T_{½}$, som forskellen $x_2 - x_1$ mellem to x-værdier, som svarer til en halvering af funktionen. Eksempelvis: $y_1 = 12$ and $y_2 = 6$.

Hvis eksponentialfunktionen er $f(x) = ba^x$ så kan a bestemmes af ligningen:

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a} \quad \Leftrightarrow \quad a = 10^{\frac{\log 2}{T_2}} = 2^{\frac{1}{T_2}}$$

På samme måde for en aftagende eksponentiel funktion: $T_{\frac{1}{2}} = -\frac{\log 2}{\log a} \quad \Leftrightarrow \quad a = 10^{-\frac{\log 2}{T_2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{T_2}}$

Herefter kan eksponentialfunktionen også skrives som: $f(x) = b2^{\frac{x}{T_2}}$, hvilket kan ses af, at funktionen går gennem de to punkter (0, *b)* and (T_2, 2*b*).

4. Potensfunktioner

En potensfunktion er en funktion, der er givet ved udtrykket:

(5.1) $$f(x) = b \cdot x^a \quad ; \quad x,b \in R_+ \ \ og \ \ a \in R$$

Når *a* er et helt positivt tal, kan definitionsmængden udvides til *R*, og når *a* er et helt negativt tal, kan definitionsmængden udvides til *R*\{0}. I det generelle tilfælde er en potensfunktion defineret ved omskrivningen:

(5.2) $$f(x) = b \cdot x^a = be^{a \ln x} \quad ; \quad x,b \in R_+ \ \ og \ \ a \in R$$

Vi har tidligere beskæftiget os med nogle simple potensfunktioner, f.eks:

$$f(x) = 2x^2, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = x^{-4},$$
$$f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}, \quad f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = 4x^{-\frac{2}{3}}.$$

Det ses af udtrykket: $f(x) = bx^a = be^{a \ln x}$, at $f(x) = bx^a$ er voksende for $a > 0$, fordi såvel e^{ax} og ln(x) er voksende og $f(x) = bx^a = be^{a \ln x}$ er aftagende for $a < 0$, fordi e^{-kx}, eraftagende for k > 0.

Bemærk forskellen mellem potensfunktionen $f(x) = bx^a$ og den eksponentielle funktion $f(x) = b \cdot a^x$
Fiorskellen er at *a* og *x* har byttet rolle.
Regninger med potensfunktioner og eksponentielle funktioner "ligner" hinanden, da de i begge tilfælde er baseret på potensreglerne.

Eksempel.

Bestem den potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$, der går gennem punkterne (2,4) og (7,3). Vi opstiller ligningerne

$$f(2) = 4 \Leftrightarrow b \cdot 2^a = 4 \quad og \quad f(7) = 3 \Leftrightarrow b \cdot 7^a = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{b \cdot 2^a}{b \cdot 7^a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^a = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{2}{7}} \approx -0{,}2296 \quad heraf\ fås\ b = \frac{4}{2^a} \approx 4{,}691$$

Hvis man vil undersøge, hvorvidt et talmateriale kan beskrives ved en potensfunktion, anvender man ofte dobbeltlogaritmisk papir, altså et koordinatsystem med to logaritmiske akser.
Der gælder nemlig at alle potensfunktioner afbildes i en ret linie i dobbeltlogaritmisk papir. Hvis mærkede koordinater, som hidtil betegner de almindelige koordinater, mens umærkede betegner logaritmiske koordinater kan man skrive:

$$y = b \cdot x^a \quad \Leftrightarrow \quad \log y = \log b + a \log x \quad \Leftrightarrow \quad y' = a \cdot x' + b'$$

Det sidste udtryk er netop ligningen for en ret linie med hældning *a* i geometriske koordinater.

Hvis man indtegner et observationsmateriale på dobbeltlogaritmisk papir, og punkterne ligger på en ret linie, kan man med rimelig sikkerhed antage, at materialet kan repræsenteres ved en potensfunktion $f(x)=b \cdot x^a$. For at bestemme *a* og *b*, kan man aflæse to punkter (x_1, y_1) og (x_1, y_1) på linien og bestemme *a* og *b* på næsten den samme måde, som det var tilfældet for eksponentialfunktioner. Dette fører til en formel for *a*.

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$, hvorefter b bestemmes ved at indsætte i en af ligningerne.

Det er imidlertid lettere og bedre, at bestemme *a*, som den geometriske hældningskoefficient af linien på sædvanlig vis, som $a = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$, bortset af *udmålingen* af de to stykker $y'_2 - y'_1$ og $x'_2 - x'_1$, skal ske på en *lineal*, idet det jo ikke er de geometriske koordinater, der er placeret på akserne.

Hvis tallet 1, befinder sig på den logaritmiske 1. akse kan *b* aflæses på 2. aksen ved 1. dette følger trivielt af, at $f(x) = b \cdot x^a \;\Rightarrow\; f(1) = b \cdot 1^a = b$.