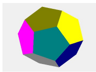
Analytiske funktioner af en kompleks variabel



Ole Witt-Hansen 2018 (1966)

Indhold

1. Analytiske (holomorfe) funktioner

En funktion af en kompleks variabel z.

$$w = f(z)$$

som afbilder de komplekse tal ind i de komplekse tal ($C \to C$) kaldes en analytisk eller en holomorf funktion.
Idet z og w er komplekse tal kan funktionen også skrives $u + iv = f(x+iy)$.

Definitionen på kontinuitet og differentiabilitet, er helt den samme som for reelle funktioner

Funktionen $f(z)$ er *kontinuert* i z_0 hvis: $f(z) \to f(z_0) \quad for \quad z \to z_0$

Funktionen $f(z)$ er *differentiabel* i z_0 hvis brøken: $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ har en grænseværdi for $z \to z_0$.
Hvis grænseværdien eksisterer kaldes den for differentialkvotienten for $f(z) \ i \ z_0$, vi har altså:

(1.1) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

På samme måde, som det er tilfældet for reelle funktioner kan differentiabiliteten udtrykkes på flere måder, idet vi sætter $h = z - z_0$.

(1.2) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

Eller

(1.3) $$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(h)h \quad \text{, hvor } \varepsilon(h) \to 0 \quad for \quad h \to 0$$

Den sidste ligning er nemlig ensbetydende med: $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) + \varepsilon(h)$

Differentialkvotienten $f'(z_0)$ skrives som bekendt $\dfrac{df(z)}{dz}$, og vi definerer differentialet af *f*, som:

(1.4) $$df(z) = f'(z_0)dz$$

Formelt har vi blot ganget med dz på begge sider, og vi skal herefter regne med differentialer, som om det er almindelige variable.

For regning med differentialkvotienter, gælder helt de samme regler som for reelle funktioner, og regnereglerne bevises helt analogt.

- $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$
- $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

- $(\frac{f(z)}{g(z)})' = \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{g(z)^2}$

For den sammensatte funktion $g \circ f(z) = g(f(z))$ gælder som hidtil:

- $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$

For den omvendte funktion f^{-1} (hvis den eksisterer) til en differentiabel funktion *f*:

(1.5) $$w = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(w) = z$$

Med differentialkvotienten

(1.6) $$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad hvor \quad w = f(z)$$

Regnereglerne for differentialkvotienten af sammensat og omvendt funktion, kan også ses ved (ubekymret) brug af differentialer, idet $w = f(z) \;\; og \quad y = g(w)$ fås nemlig rent algebraisk.

(1.7) $$\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dw}\frac{dw}{dz}$$

Denne regel kaldes ligesom for reelle funktioner for *kædereglen*.

Tilsvarende for den omvendte funktion:

(1.8) $$z' = (f^{-1})'(w) = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

2. Cauchy – Rimanns differentialligninger

En analytisk funktion kan også skrives som realdel plus imaginær del:

(2.1) $$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

(2.2) $$df(z) = f'(z)(dx + idy) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

Da koefficienterne i (2.2) til *dx* og *dy* skal være den samme på begge sider, må der gælde:

$$(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) = f'(z) \quad og \quad \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}) = f'(z) \quad \Rightarrow$$

(2.3) $$(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})$$

Samler man realdelen og imaginærdelen får man Cauchy-Riemanns differentialligninger.

(2.4) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad og \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ligningerne kan også formuleres som:

(2.5) $$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

Den sidste formulering er meget vigtig, idet den, (som vi viser nedenfor), betyder, at en analytisk funktion altid har en stamfunktion.

For en *reel* funktion af to variable $f(x, y)$ gælder der for differentialet.

(2.6) $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Fra analysen ved vi at:

(2.7) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

I ovenstående ligning (2.6) er f en stamfunktion til df.

Man kan vise (ikke overraskende) at (2.7) er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at en funktion $f(x, y)$ har en stamfunktion $F(x, y)$.

Er nemlig $dg = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ en differentialform, siges *dg* at være et total differential (og dermed har en stamfunktion *g*), hvis:

(2.8) $$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

men dette er jo netop tilfældet med en analytisk funktion, på grund af Cauchy-Riemanns differentialligninge, idet de ifølge (2,5) kan skrives: $\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$, hvoraf vi slutter at

- Enhver analytisk funktion har en stamfunktion.

For en vektorfunktion (f_x, f_y), som har en stamfunktion *F*, således at: $(f_x, f_y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$, gælder det, at integralet af *f* langs en kurve $s(t) = (x(t), y(t))$ er uafhængig af den tilbagelagte vej mellem de to endepunkter (1) og (2).

$$(2.9)\qquad \begin{aligned}&\int_{(1)}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} (\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})\cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} (\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})\cdot(x'(t),y'(t))dt = \\ &\int_{(1)}^{(2)} (\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t))dt = \left[F(x(t),y(t))\right]_{(1)}^{(2)} = F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)\end{aligned}$$

Integralet af *f* langs en kurve afhænger kun af værdierne af *F* i endepunkterne af kurven, som det jo også er tilfældet for en reel funktion af en variabel.

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(t)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Dette er også velkendt i fysikken. For en konservativ kraft *F*, som kan afledes af et potential *U.*

$(F_x,F_y) = (-\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\partial U}{\partial y})$ er kraftens arbejde: $\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{s}$ uafhængig af den valgte vej imellem endepunkterne (1) og (2) for kurven.
Heraf følger umiddelbart at for en vektorfunktion, som har en stamfunktion er integralet langs en lukket kurve altid lig med nul, idet $F(x_1,y_1)-F(x_1,y_1)=0$.

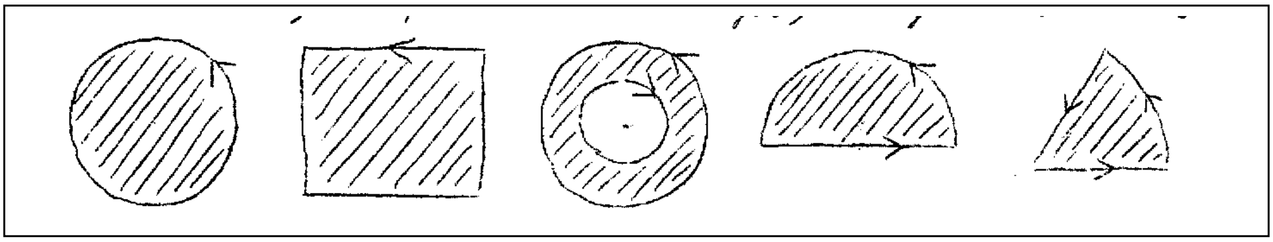
3. Cauchy's integralsætninger

Cauchy's første integralsætning:

Idet en analytisk funktion $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ækvivalent kan repræsenteres ved en vektorfunktion $(u(x,y),v(x,y))$, gælder det for alle analytiske funktioner, at integralet langs en kurve er uafhængig af den tilbagelagte vej mellem de to endepunkter for kurven, og integralet langs en lukket kurve er lig med nul.

$$(3.1)\qquad \int_{(1)}^{(2)} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1) \qquad\qquad \int_{\text{lukket kurve}} f(z)dz = 0$$

Vi vil give denne sætning en lidt anden formulering, idet vi indfører begrebet en *simpel figur*, som en sammenhængende mængde begrænset af én eller flere lukkede kurver.
Den eller de kurver, som begrænser en simpel figur *F*, kaldes for randen af *F*, og betegnes ∂F .
Vi skal ikke specificere begrebet simpel figur yderligere, men blot henvise til figurerne nedenfor. Randen på figurerne orienteres i positiv omløbsretning, hvis den omslutter den sammenhængende mængde og modsat hvis figuren omslutter randen, (i hvilket tilfælde må figuren være omsluttet af både en indre og ydre rand).



Da integralet af en analytisk funktion langs en lukket kurve er nul, følger så Cauchy's første integralsætning

For enhver simpel figur F i $A \subseteq C$ og for enhver analytisk funktion $f : A \to C$ gælder:

(3.2) $$\int_{\partial F} f(z)dz = 0$$

Vi vil da anvende integralsætningen på funktionen $f(z) = z^n$.

Vi betragter figuren (en cirkelskive): $F = \{z \mid |z| \le r\}$, der som rand har cirklen: $C = \{z \mid |z| = r\}$ med positivt omløb, og udregner integralet langs randen for heltalligt n. Vi viser så:

(3.3) $$\int_C z^n dz = \begin{cases} 0 & for \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & for \quad n = -1 \end{cases}$$

Vi anvender parameterfremstillingen: $z = re^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$, vi får da:

(3.4) $$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{\text{int}} rie^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & for \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & for \quad n = -1 \end{cases}$$

3.1 Anvendelse af Cauchy's integralsætning til udregning af integraler

Som eksempel på en sådan anvendelse, vil vi for et reelt tal y udregne integralet.

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{ixy} dx$$

Om normalfordelingsfunktionen $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ved vi, (hvilket også bevises i analysen):

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

Vi betragter nu funktionen $f(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} = e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - ixy}$

Vi ser da på rektanglet med hjørnerne $\pm a, \pm a + iy$, og hvis rand vi betegner K. For at kunne behandle de to tilfælde $y > 0$ og $y < 0$ under et, vælger vi på K den positive omløbsretning, hvis $y > 0$, og den negative omløbsretning, hvis $y < 0$.

Ifølge Cauchys integralsætning: $\int_K f(z)dz = 0$, får vi da:

$$\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - ixy} dx + \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz = 0$$

Hvor K_1 og K_2 svarer til de lodrette sider med en gennemløbsretning, som svarer til gennemløbsretningen af K. På disse sider er imidlertid:

$$|f(z)| \le e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{1}{2}y^2}$$

Og længden $\lambda(K_1) = \lambda(K_2) = |y|$. Følgelig gælder der:

$$\left| \int_{K_1} f(z)dz \right| \le e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{1}{2}y^2} |y| \quad og \quad \left| \int_{K_2} f(z)dz \right| \le e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{1}{2}y^2} |y|$$

Hvoraf ses, at integralerne $\int_{K_1} f(z)dz$ og $\int_{K_2} f(z)dz$ går imod nul for a gående mod uendelig.

Vi finder derfor:

$$\lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-ixy} + \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz = 0 \right) \Rightarrow$$

$$1 - \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-ixy} dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-ixy} dx = 1$$

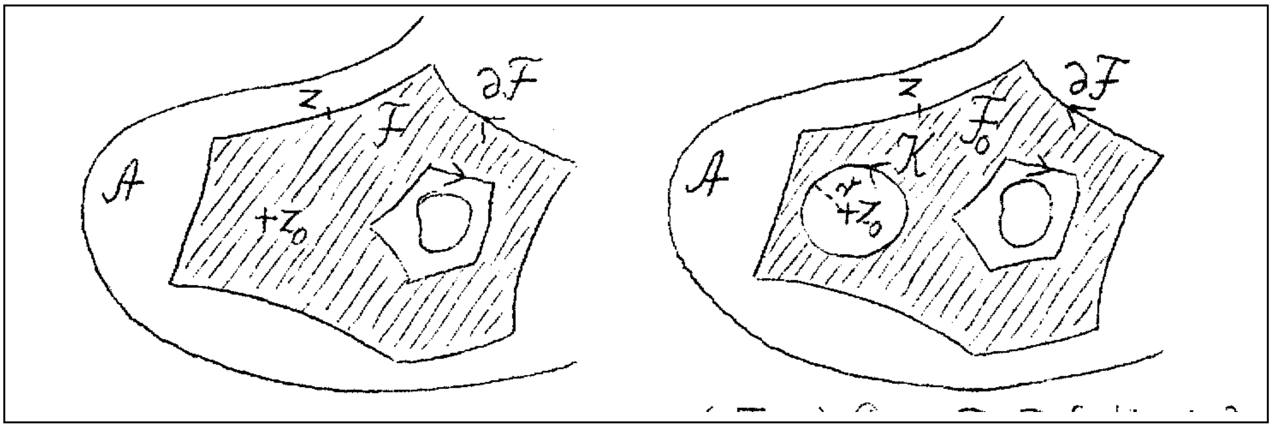
(3.5) $$I(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-ixy} dx = e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

3.2 Cauchys anden integralformel

Lad A være en åben sammenhængende mængde i C.
For enhver analytisk funktion $f : A \to C$, og for enhver simpel figur F i A er værdien af f i ethvert indre punkt z_0 af F bestemt ud fra værdierne af f på randen af F ved Cauchy's integralformel.

(3.6) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Bevis: På $A \setminus \{z_0\}$ betragter vi funktionen: $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, som åbenbart er analytisk



Lad r være et positivt tal mindre end $\operatorname{dist}(\partial F, z_0)$, da er også $F_0 = F \setminus \{z \mid |z - z_0| < r\}$ en simpel figur i $A\setminus\{z_0\}$, og vi har $\partial F_0 = \partial F - K$, hvor K betegner cirklen $\{z \mid |z - z_0| = r\}$ med positivt omløb. Ifølge Cauchy's første integralsætning, har vi derfor.

(3.7) $$\int_{\partial F} g(z)dz - \int_K g(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Når r er et "lille" tal er værdierne af $f(z)$ på K "omtrent" lig med $f(z_0)$. Vi omskriver derfor det sidste integral:

$$\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_K \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$\int_K \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0)\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i \quad \text{, ifølge sætning (3.4)}$$

For det andet integral foretager vi vurderingen.

$$\left|\int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz\right| \leq \sup_{z\in K}\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \cdot \lambda(K) =$$
$$\frac{1}{r}\sup_{z\in K}|f(z) - f(z_0)| 2\pi\, r = 2\pi \sup_{z\in K}|f(z) - f(z_0)|$$

Sammenfattende finder vi således:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0)\right| \leq \sup_{z\in K}|f(z) - f(z_0)|$$

Her er venstre side uafhængig af r, mens højre side går imod 0 for r -> 0.
Altså er venstre side lig med nul, hvormed sætningen er bevist.

For enhver analytisk funktion $f: A \to C$, og for enhver simpel figur F i A er værdien af f i ethvert indre punkt z_0 af F bestemt ud fra værdierne af f på randen af F ved Cauchy's formel.

(3.8) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \,.$$

Vi omskriver formlen (3.8), ved at ændre integrationsvariablen til ζ, og z_0 til z.

(3.9) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ved at differentiere denne formel med hensyn til z, får man:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Og ved at differentiere n gange.

(3.10) $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Formlen viser at enhver analytisk funktion, er vilkårlig ofte differentiabel