

# Varmepumpen

## Eksempel på anvendelse af Termodynamikkens 1. og 2. hovedsætning

### Indhold

1. Syrlig indledning om 2005 reformen (Kan overspringes) .....	1
2. Varmepumpen anvendt i fysikundervisningen i gymnasiet .....	1
3. Teoretisk beskrivelse af varmpumpen ud fra 1. og 2. hovedsætning .....	2
4. Ligningerne løst med forskellige masser i de to kar .....	4

## 1. Syrlig indledning om 2005 reformen (Kan overspringes)

I juni var jeg for første gang siden 1988 censor ved et A-niveau hold i fysik. Selvom jeg naturligvis er nogenlunde bekendt med indholdet af de nuværende lærebogssystemer i fysik, så var jeg alligevel overrasket over så langt det analytiske teoretiske aspekt af fysikundervisningen er trængt i baggrunden.

Jeg havde selv et B-niveau og et A-niveau til eksamen og prøvede for første gang den eksperimentelle eksamen.

Jeg har aldrig fattet, hvorfor man har indført en eksperimentel eksamen i fysik. Rent faglig didaktisk, mener jeg at eksperimentelt arbejde er uforeneligt med en eksamen, og jeg vil såmænd godt vædde en halv tønde spegesild på, at Danmark er det eneste land i verden, hvor man praktiserer den prøveform.

I 2004 overværede jeg pligtskyldig den daværende fagkonsulent med imperatorisk ydmyghed befale hvorledes fysikfaget skulle formidles efter reformen. Men jo længere han talte, jo mere begyndte jeg at holde øje med udgangen i den forventning om to herrer i hvide kitler snart ville dukke op og føre ham tilbage til afdelingen.

Det er rigtigt, at den eksperimentelle del af eksamen har et afslappet og uhøjtideligt præg, men dermed er fordelene vist også udtømt.

Til de mest åbenlyse ulemper, hører maraton eksamener og usikker bedømmelser ved gruppeeksamen (som jeg troede var afskaffet), samt indøvede færdigheder til den enkelte øvelse eller mangel på samme.

At lærerens forberedelse til eksamen er blevet flere gange fordoblet med at opstille og afprøve øvelserne, fremskaffe relevante, men nytteløse bilag vejer heller ikke positivt i min bedømmelse af eksamensformen efter 2005.

Med den med 30 min eksamensform, vi havde før 1988, 15 min til et teori spørgsmål og 10 min til en øvelse, beskrevet ud fra en selvstændig rapport, har jeg aldrig oplevet at en elev fik en forkert karakter.

## 2. Varmepumpen anvendt i fysikundervisningen i gymnasiet

En af øvelser, jeg som censor blev præsenteret for, var varmpumpen. Lidt overraskende for mig, idet termodynamikken jo ikke er ganske ukompliceret, og fordi interessen for varmpumper til jordvarme er stilnet af efter at have været på sit højeste i kølvandet på halvfjerdsernes oliekriser.

Forsøget med varmpumpen krævede nu heller ikke andet end 1. hovedsætning, idet den varme  $Q_2$ , som tilføres den ene beholder er lig med den varme  $Q_1$  som hentes fra den anden beholder, plus det arbejde  $A$  som varmpumpen udfører.

$$Q_2 = A + Q_1 \quad \text{Hvor effektiviteten beregnes som} \quad \eta = Q_2/A$$

Hvis man ser bort fra energitabet i varmpumpen, så er effektiviteten teoretisk altid større end 1. Formålet med forsøget, var at bestemme effektiviteten ud fra temperaturkurverne, idet varme-

## Eksempel på brug af termodynamikkens 1. og 2. hovedsætning

mængderne jo kan beregnes ud fra kalorimeterligningerne, hvor  $m_1$  og  $m_2$  er masserne af væske i de to kar.

$$Q_1 = -m_1 c \Delta T_1 \quad \text{og} \quad Q_2 = m_2 c \Delta T_2$$

Temperaturerne i de to beholdere blev dataopsamlet og ført ind i en computer, hvor de to kurver blev tegnet. (Desværre skete der et eller andet, så alle data blev mistet på et sent tidspunkt af forsøget. Noget som jeg godt vil anføre som et andet argument mod eksperimentel eksamen). De temperaturkurver, som jeg nåede at se, så ud til at være lineære, men det fortalte fysiklæreren, at det var de ikke. Jeg savnede nu lidt en teoretisk begrundelse af de to temperaturkurver. Da jeg tænkte over det senere, var det klart, at en teoretisk udledning kun er mulig ved en differentiell anvendelse af 2. hovedsætning, men så har vi jo passeret gymnasieniveauet med flere længder.

### 3. Teoretisk beskrivelse af varmpumpen ud fra 1. og 2. hovedsætning

Vi opskriver derfor 1. og 2. hovedsætning på differentiell form :

$$1. \text{ Hovedsætning: } dQ_2 = dA + dQ_1$$

$$2. \text{ Hovedsætning: Entropien: } dS = dS_1 + dS_2. \text{ Hvor } dS_1 = \frac{dQ_1}{T_1} \quad \text{og} \quad dS_2 = \frac{dQ_2}{T_2}$$

Det antages det, at processerne er reversible – og det bliver vi nødt til at antage, hvis vi vil udlede noget som helst. Reversibilitet betyder at  $dS = 0$ . Der vil derfor gælde:

$$dS = 0 \Leftrightarrow dS_1 + dS_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

Her kan vi så indsætte udtrykkene ovenfor for  $dQ_1 = c m_1 dT_1$  og  $dQ_2 = c m_2 dT_2$ .

Vi kan uden egentlig indskrænkning antage at  $m_1 = m_2 = m$ , og ved at forkorte med  $c \cdot m$ , får man ligningen:

$$\frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} = 0 \Leftrightarrow \ln T_1 + \ln T_2 = k_1 \Leftrightarrow T_1 T_2 = k$$

Vi finder som konsekvens af entropibevarelse det simple resultat, at  $T_1$  og  $T_2$  er omvendt proportionale.

For at anvende dette i 1. hovedsætning, bliver vi nødt til at have en sammenhæng mellem  $dT_1$  og  $dT_2$ . Ud fra ligningen:  $T_1 T_2 = k$  følger imidlertid:

$$T_1 = \frac{k}{T_2} \Rightarrow dT_1 = -\frac{k}{T_2^2} dT_2 \quad \text{og tilsvarende} \quad T_2 = \frac{k}{T_1} \Rightarrow dT_2 = -\frac{k}{T_1^2} dT_1$$

Indsættes det ene eller det andet udtryk 1. hovedsætning

$$dQ_2 = dA + dQ_1 \Leftrightarrow c m dT_2 = P dt - c m dT_1,$$

## Eksempel på brug af termodynamikkens 1. og 2. hovedsætning

(minustegnet fordi  $dT_1$  er negativ), og hvor  $dA = Pdt$ , hvor  $P$  er varmepumpens effekt, finder man:

$$cm \cdot dT_2 - cm \frac{k}{T_2^2} dT_2 = Pdt \Rightarrow \left(1 - \frac{k}{T_2^2}\right) dT_2 = \frac{P}{cm} dt$$

$$cm \cdot dT_1 - cm \frac{k}{T_1^2} dT_1 = Pdt \Rightarrow \left(1 - \frac{k}{T_1^2}\right) dT_1 = \frac{P}{cm} dt$$

Tilsyneladende er der fuldstændig symmetri mellem de to ligninger, men  $k = T_1 T_2 = T_0^2$ , hvor  $T_0$  er den fælles begyndelsestemperatur.

Hvis  $T_2$  forøges blot en lille smule, vil  $T_1$  formindskes tilsvarende, ifølge relationen  $k = T_1 T_2 = T_0^2$ , så  $T_2^2 > k$ , mens  $T_1^2 < k$ .

De to faktorer i parenteserne vil derfor få forskelligt fortegn så  $T_1$  vil aftage mens  $T_2$  vil vokse. Begge ligninger lader sig nemt integrere til at give:

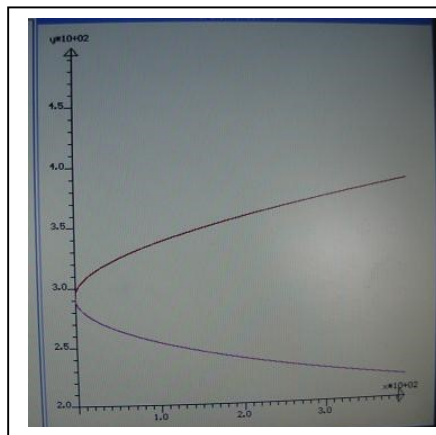
$$T_2 - T_{20} + \frac{k}{T_2} - \frac{k}{T_{20}} = \frac{P}{cm} t \quad \text{og} \quad T_1 - T_{10} + \frac{k}{T_1} - \frac{k}{T_{10}} = \frac{P}{cm} t$$

Ganger man den første ligning igennem med  $T_2 T_{20}$  fremkommer en 2.gradsligning, som efter reduktion bliver:

$$T_2^2 - \left(T_{20} + \frac{k}{T_{20}} + \frac{P}{cm} t\right) T_2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_2^2 - q T_2 + k = 0; \quad \text{hvor} \quad q = \left(T_{20} + \frac{k}{T_{20}} + \frac{P}{cm} t\right)$$

Samt en helt tilsvarende ligning for  $T_1$ . Selv om løsningen af andengradsligningen er helt ligetil, er den ikke særlig anvendelig. Det letteste er faktisk, at løse differentilligningerne numerisk.

For begge beholdere med 2 liter vand og fælles begyndelsestemperatur på  $20^\circ\text{C}$  bliver kurverne som vist nedenfor. Temperaturen i den ene beholder falder imidlertid hurtigt til under frysepunktet, så kurverne er ikke realistiske. For at få en mere realistisk beskrivelse, må vi antage at det ene reservoir er meget større end det andet. Dette modificerer dog ligningerne noget.



#### 4. Ligningerne løst med forskellige masser i de to kar

Vi reformulere da ligningerne ovenfor en lille smule

$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0 \quad \text{og} \quad dQ_1 = c m_1 dT_1 \quad \text{og} \quad dQ_2 = c m_2 dT_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{m_1 dT_1}{T_1} + \frac{m_2 dT_2}{T_2} = 0$$

Som fører til  $T_1 T_2^\beta = k$ , hvor  $\beta = \frac{m_2}{m_1}$ . Dette giver så til ligningerne:

$$T_1 = \frac{k}{T_2^\beta} \Rightarrow dT_1 = -\beta \frac{k}{T_2^{1+\beta}} dT_2 \quad T_2^\beta = \frac{k}{T_1} \Rightarrow \beta T_2^{\beta-1} dT_2 = -\frac{k}{T_1^2} dT_1$$

$$dT_2 = -\frac{k}{\beta T_2^{\beta-1} T_1^2} dT_1 = -\frac{k}{\beta (T_2^\beta T_1) T_2^{-1} T_1} dT_1 = -\frac{k T_2}{\beta k T_1} dT_1 = -\frac{k (k T_1^{-1})^{\frac{1}{\beta}}}{\beta k T_1} dT_1$$

$$dT_2 = -\frac{(k T_1^{-1})^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1 = -\frac{k^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1^{1+\frac{1}{\beta}}} dT_1 \quad dT_2 = -\frac{\left(\frac{k}{T_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1$$

Herefter kan man opstille differentialligningerne for de to temperaturkurver.

$$c m_2 \cdot dT_2 + c m_1 \cdot dT_1 = P dt \quad \Rightarrow$$

$$c m_2 \cdot dT_2 - c m_1 \frac{\beta k}{T_2^{\beta+1}} dT_2 = P dt \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{k}{T_2^{\beta+1}}\right) \beta dT_2 = \frac{P}{c m_1} dt$$

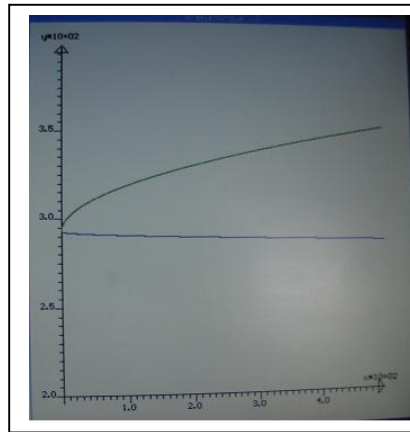
$$c m_1 \cdot dT_1 + c m_2 \cdot dT_2 = P dt \quad \Rightarrow$$

$$c m_1 \cdot dT_1 - c m_2 \frac{\left(\frac{k}{T_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\beta T_1} dT_1 = P dt \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 - \left(\frac{k}{T_1}\right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{T_1}\right) dT_1 = \frac{P}{c m_1} dt$$

I dette tilfælde er en eventuel analytisk løsning ikke særlig meningsfuld, så vi nøjes med en numerisk løsning. Sætter vi f.eks.  $\beta = m_2/m_1 = 0.1$  fremkommer følgende kurver:

Eksempel på brug af termodynamikkens 1. og 2. hovedsætning



Og det ser jo ud til at være i den skønneste orden og i god overensstemmelse med de kurver jeg nåede at se fra forsøget.

Ole Witt-Hansen

Køge Gymnasium 2010