Tsunamiens fysik

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

I alle de år, hvor jeg har skullet gennemgå bølger i min fysikundervisning, og hvor jeg altid har understreget, at der ikke sker en stoftransport ved bølgeudbredelse, bliver jeg som regel konfronteret med det faktum, at vandbølger brydes og bliver skyllet op på stranden.

Jeg vælger da den klassiske undvigemanøvre med, *"at det er alt for kompliceret til at blive forklaret på gymnasialt niveau"*. Hvad angår hydrodynamik, er det nu sandt nok!

Hvis en elev drister sig til at spørge, om jeg måske selv forstår det, har svaret hidtil været undvigende. At det skyldes, at dybden bliver mindre er jo ikke nogen forklaring, men blot en konstatering.

På KU læste vi på 3. år i 1967 efter Sommerfelds: *Mechanics of Deformable Bodies* fra 1964. Uden solidt kendskab til vektoranalyse, operatorerne grad, div og rot, samt Stokes og Greens sætninger er denne (glimrende) bog ikke rigtig anvendelig.

I årets emne om katastrofer er der mange, der har skrevet om tsunamier. Efter at have set utallige flotte billeder af den enorme flodbølge er det naturligt at overveje muligheden af en analytisk forklaring – udmøntet i en formel. Naturligvis har jeg søgt på nettet, men det er nu aldrig lykkedes mig at finde noget rigtig brugbart teoretisk fysik der.

Heller ikke i andre bøger, som *Feynman* eller *University Physics*, er der nogen hjælp at hente. Det var først, da jeg i Sommerfelds bog fandt nogle formler for udbredelseshastigheden af tyngdebølger på dybt og middeldybt vand, at jeg øjnede noget, som måske var anvendeligt. De to formler fra Sommerfeld er vist nedenfor.

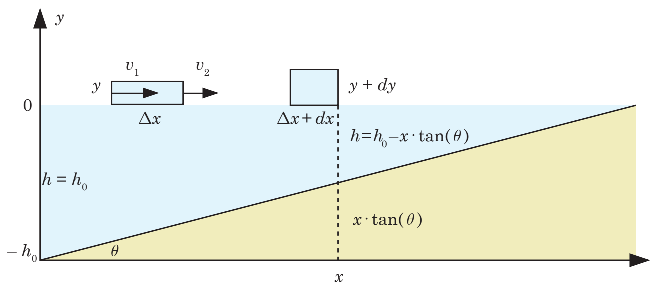
v er bølgens udbredelseshastighed, g er tyngdeaccelerationen, λ er bølgelængden, k er bølgetallet og h er dybden.

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \text{dybt vand}$$

$$v = \sqrt{gh} \qquad \text{middeldybt vand}$$

At udlede af disse formler er langt fra simpelt. Udledningen af formlerne er tilføjet til sidst. Det er nu kun den sidste af formlerne, der er interessant i sammenhæng med dannelse af en tsunami, fordi udbredelseshastigheden her afhænger af dybden.

Ifølge formlen vil bagsiden af en bølgepakke, der bevæger sig mod lavere vanddybde, stadigt bevæge sig hurtigere end forenden. Den vil *kravle op på ryggen af bølgen* for derefter at indhente og overhale forenden, hvilket præcis er det man ser, når en bølge, der nærmer sig land, rejser sig og brydes.



For at formalisere dette, er det nødvendigt med nogle simplificerede antagelser. Vi antager derfor, at bølgens form er rektangulær med en bund, som flugter med overfladen. Havdybden aftager lineært med en hældningsvinkel θ.

Ved $x = 0$ er havdybden $h = h_0$ og ved x er havdybden $h = h_0 - x{\cdot}\tan\theta$. Udbredelseshastigheden ved bagende og forenden af *kassebølgen* er henholdsvis v_1 og v_2, hvor $v_1 > v_2$. Da det er den samme vandmasse, som er i bevægelse – blot med en anden form, må arealet af de to rektangler være lige store, se figuren ovenfor:

$$A = y{\cdot}\Delta x = (\Delta x + dx)(y + dy)$$

hvilket giver $\Delta x{\cdot}dy + y{\cdot}dx = 0$, som løses mht. dy:

$$dy = -\frac{y}{\Delta x}dx$$

På middeldybt vand gælder formlen

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{g(h_0 - x\tan\theta)}$$

På grund af de forskellige hastigheder på forsiden og bagsiden af *kassebølgen*, vil denne blive trykket et stykke dx sammen i løbet af tidsrummet dt

$$dx = (v_2 - v_1)dt = \Delta v dt$$

Indsættes dette i ligningen ovenfor får man

$$dy = -\frac{y}{\Delta x}dx = -\frac{y}{\Delta x}\Delta v dt \quad \Leftrightarrow$$

$$dy = -y\frac{\Delta v}{\Delta x}dt \approx y\frac{dv}{dx}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -y\frac{dv}{dx}$$

Vi omskriver nu

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dy}{dx}$$

hvorefter man får den ønskede formel

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{v}\frac{dv}{dx}$$

Indsættes $v = \sqrt{g(h_0 - x\tan\theta)}$ og $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{\sqrt{g}\tan\theta}{2\sqrt{h_0 - x\tan\theta}}$

finder vi endelig en differentialligning, der bestemmer, hvorledes bølgehøjden y afhænger af afstanden ind til bredden.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{y\cdot\tan\theta}{h_0 - x\tan\theta} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{\tan\theta dx}{h_0 - x\tan\theta}$$

som direkte kan integreres til

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y} = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{x}\frac{\tan\theta dx}{h_0 - x\tan\theta} \quad\Leftrightarrow$$

$$[\ln y]_{y_0}^{y} = -\tfrac{1}{2}[\ln(h_0 - x\tan\theta)]_0^x$$

Ligningen løses for y, som giver

$$y = y_0\sqrt{\frac{h_0}{h_0 - x\tan\theta}}$$

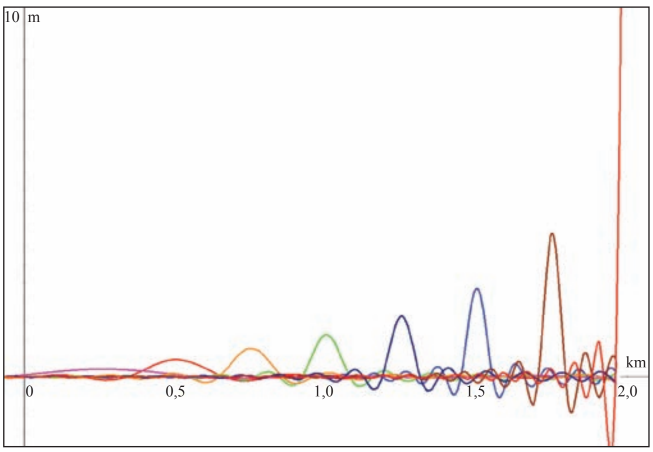
Bølgehøjden går ifølge formlen mod uendelig, når dybden går imod 0, og det forklarer derfor kvalitativt dannelsen af en tsunami. I betragtning af, hvor kompliceret hydrodynamikken er omkring vandbølger, der rejser sig og brydes, må denne (kvalitative) formel siges at være overraskende simpel.

Man kunne naturligvis blot tegne bølgehøjden y som funktion af x, men det er mere illustrativt – og relevant for beskrivelse af en tsunami – at gange bølgehøjden med en bølgepakke, som fx er et resultat af et undervands jordskælv. En sådan bølgepakke kan fås ved at integrere over bølgetallet k for en plan harmonisk bølge $\varphi(x,t) = e^{i(\omega t - kx)}$:

$$\psi = e^{i\omega t}\int e^{-ikx}dk = e^{i\omega t}\frac{e^{-ikx}}{-ix} = e^{i\omega t}\frac{\cos(kx) - i\sin(kx)}{-ix}$$

som efter omskrivning med additionsformlerne er realdelen

$$\mathrm{Re}\,\psi = \frac{\sin(kx - \omega t)}{x}$$



Øjebliksbilleder af tsunamiens fremadskridende udvikling frem mod kysten ifølge ovenstående modellering.

For $t = 0$ er bølgens form

$$\frac{\sin kx}{x}$$

og bølgens form i x_0 kan fås ved at gange bølgehøjden $y(x)$ med

$$\frac{\sin k(x - x_0)}{x - x_0}$$

Nedenstående figur viser, hvorledes bølgens form ifølge denne formel ændrer sig, når den nærmer sig kysten fra 200 m dybde. Formlen er kvalitativ, men illustrativ.

Bølgehastigheden på middeldybt vand

I dette afsnit anvender vi følgende symboler:

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad \text{gradient af et skalarfelt } \varphi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{divergens af et vektorfelt } \vec{v}$$

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad \text{Laplaceoperatoren}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad \textbf{rot–}$$

operatoren, som vi dog ikke anvender direkte.

Fra vektoranalysen ved vi, at for et rotationsfrit vektorfelt $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0$ kan man definere et potential. Anvender vi dette på hastighedsvektoren $\vec{v}$ i et to–dimensionalt strømningsfelt uden turbulens får man

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi \qquad \vec{v} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

Hvis hastighedsfeltet også er divergensfrit $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ (væsken er inkompressibel), vil potentialet opfylde Laplaces ligning

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

For enhver analytisk funktion $f(x + i\,y) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)$ vil såvel realdelen $\Phi(x, y)$ som imaginærdelen $\Psi(x, y)$ være løsning til Laplaceopratoren. Dette følger af Cauchy–Riemanns differentialligninger.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad\text{og}\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

idet

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} = 0$$

Hvis $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ vil kurverne $\Phi(x, y) = \Phi_0$ være kurver med samme hastighed. På grund af Cauchy–Riemanns ligninger, og idet $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)$ er tværvektor til $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$, vil kurverne $\Psi(x, y) = \Psi_0$ og $\Phi(x, y) = \Phi_0$ være ortogonale kurvesystemer, og $\Psi(x, y)$ vil derfor repræsentere strømningslinier.

Det mest generelle hastighedspotential, der repræsenterer en bølgeudbredelse kan skrives

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}(Ae^{-ky} + Be^{+ky})$$

Vi sætter $y = 0$ ved overfladen. Randbetingelsen ved bunden ($y = -h$) er $v_y = 0$ eller $\frac{\partial\Phi}{\partial y}|_{y=-h} = 0$.

Dette fører til ligningen $-Ae^{kh} + Be^{-kh} = 0$. Indfører vi konstanten C ved $\frac{1}{2}C = Ae^{kh} = Be^{-kh}$, således at $A = \frac{1}{2}Ce^{-kh}$ og $B = \frac{1}{2}Ce^{+kh}$ antager potentialet formen

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}\,\tfrac{1}{2}C(e^{-k(h+y)} + e^{k(h+y)})$$
$$= e^{i(kx-\omega t)}C\cosh(k(y+h))$$

Udledningen af udtrykket for udbredelseshastigheden på middeldybt vand tager udgangspunkt i bevægelsesligningen for et rumfangselement af væsken. Her betegner ρ massefylden, som antages konstant, p er trykket, v hastigheden og F kraften pr. rumfangsenhed af væsken.

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}p = \vec{F}$$

Hvis væsken er rotationsfri og divergensfri, $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0$ og $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, kan man ved hjælp af vektoranalysen omskrive det til

$$-\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\rho\vec{\nabla}v^2 + \vec{\nabla}p = \vec{F}$$

Hvis F er en konservativ kraft (tyngdekraften), så kan $\vec{F}$ udtrykkes som gradienten af en potentiel energi U, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Indfører man endelig hastighedspotentialet $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ og flytter gradientoperatoren uden for en parentes får man Bernoullis lov:

$$\vec{\nabla}(-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\rho(\vec{\nabla}\Phi)^2 + p + U) = 0$$

For moderate variationer af hastigheden kan vi se bort fra leddet $(\vec{\nabla}\Phi)^2$, og hvis vi foreløbig kun er interesseret i overfladeprofilen af bølgen sætter vi $p = 0$. Herved bliver bevægelsesligningen voldsomt forsimplet:

$$-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U = \text{konstant}$$

Konstanten kan i princippet afhænge af tiden, men for en utvungen bevægelse er den eneste mulighed konstant = 0. Samtidig er $U = \rho \cdot g \cdot y$, hvor y er dybden, regnet positiv opad og 0 ved overfladen. Herefter er ligningen den simple:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = gy$$

Hvis der er tale om en harmonisk fremadskridende bølge er overfladeprofilen y af formen: $y = u(x, t) = c \cdot e^{i(kx-\omega t)}$, hvor c i almindelighed er et kompleks tal, der indeholder en fase. Sammenholdes dette med udtrykket for

$$\Phi = e^{i(kx-\omega t)}C\cosh(k(y+h))$$

som udledt ovenfor, får man af $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = gy$, at

$$-i\omega e^{i(kx-\omega t)}C\cosh(k(y+h)) = cge^{i(kx-\omega t)} \quad\Rightarrow$$
$$-i\omega C\cosh(k(y+h)) = cg$$

For at bestemme et udtryk for udbredelseshastighed ved overfladen har vi brug for endnu en betingelse, som er, at hastigheden af et punkt af overfladen V_n, vinkelret på overfladen, må være den samme som hastigheden af det tilsvarende væskeelement v_n på samme sted.

Udtrykt ved hastighedspotentialet: $v_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n}$. Hastigheden af overfladen i samme punkt V_n kan fås som hastigheden i bølgeprofilens op– og nedadgående bevægelser: $V_n = \frac{\partial u}{\partial t}$, hvor $u(x, t) = c \cdot e^{i(kx-\omega t)}$.

Hvis bølgelængden er betragtelig større end amplituden, kan vi erstatte $v_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n}$ med $v_n = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$.

Ved at anvende udtrykkene for overfladeprofilen $u(x, t) = c \cdot e^{i(kx-\omega t)}$ og hastighedspotentialet $\Phi = e^{i(kx-\omega t)}C\cosh(k(y+h))$, finder man så, idet vi dropper bølgefaktoren $e^{i(kx-\omega t)}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad\Leftrightarrow\quad kC\sinh(ky+kh) = i\omega c$$

Sætter vi $y = 0$ (tæt på overfladen) bliver de to ligninger

$$-i\omega C\cosh(k(y+h)) = cg \quad \text{og} \quad kC\sinh(ky+kh) = i\omega c$$

til

$$-i\omega C\cosh(kh) = cg \quad \text{og} \quad kC\sinh(kh) = i\omega c$$

Heraf fås:

$$\frac{C}{c} = \frac{g}{-i\omega\cosh(kh)} = \frac{i\omega}{k\sinh(kh)} \quad\Rightarrow$$
$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kh)$$

og dermed

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)}$$

Vi ser da på to grænsetilfælde: $kh << 1$ => $\tanh(kh) \approx kh$. og $kh >> 1$ => $\tanh(kh) \approx 1$. I de to tilfælde bliver udbredelseshastighederne:

$v = \sqrt{\frac{g}{k}}$ dybt vand

$v = \sqrt{gh}$ middeldybt vand

som angivet på første side.