

Tolegemeproblemet og Keplers love

Ole Witt-Hansen, lektor emeritus

1. Tolegemeproblemet. Reduktion til centralbevægelse

Tolegemeproblemet handler om at beskrive bevægelserne af to legemer, hvor kraften (eller deres potentielle energi), kun afhænger af deres indbyrdes afstand. Det kan enten være gravitationskraften F_G mellem to legemer med masser m_1 og m_2 , givet ved Newtons gravitationslov:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

hvor $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ og r er afstanden mellem de to (kugleformede) legemer, eller coulombkraften F_C mellem to ladninger Q_1 og Q_2 :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

hvor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

Det viser sig, at tolegemeproblemet kan reduceres til at løse en differentiaalligning for en centralbevægelse, hvilket jo betyder, at kraften på legemet kun afhænger af afstanden til et fast givet punkt.

Hvis det ene legeme er langt tungere end det andet, vil bevægelsen af det lille legeme med god tilnærmelse være en centralbevægelse. Det gælder fx for bevægelsen af en satellit omkring Jorden eller planeternes bevægelse omkring Solen.

Men ser vi på systemet Måne og Jord, så er der mærkbare afvigelser fra centralbevægelse.

I det følgende betegner vi differentiation med hensyn til tiden med en prik over bogstavet, således

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{eller} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}.$$

Massemidtpunktet for de to legemer, betegnes G . Hvis \vec{r}_1 og \vec{r}_2 betegner stedvektorerne til de to masser m_1 og m_2 er stedvektoren til massemidtpunktet givet ved:

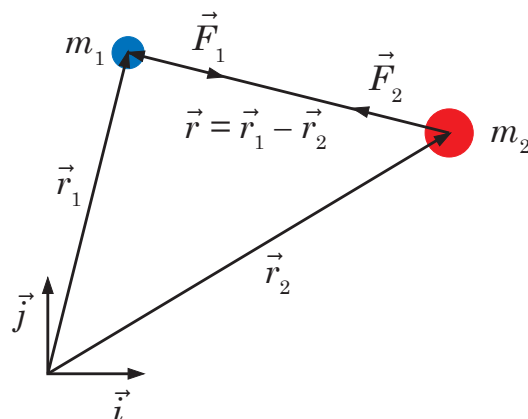
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.1)$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ er vektoren fra m_2 til m_1 , som vist på figuren. De to ligninger løses nu, så vi får udtrykt \vec{r}_1 og \vec{r}_2 ved \vec{r} og \vec{r}_G . $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ganges derfor med m_2 .

$$\begin{aligned} m_2 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{r}_G \\ m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2 &= m_2 \vec{r} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \wedge \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (1.2)$$



Såvel kraften imellem de to legemer, samt deres indbyrdes potentielle energi, afhænger kun af den relative afstand r

$$E_{pot} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Den kinetiske energi er $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$. Ved at indsætte de fundne udtryk for \vec{r}_1 og \vec{r}_2 finder man:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{r}}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{r}}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2$$

Vi sætter $\vec{v}_G = \dot{\vec{r}}_G$ og $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$ og får:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{v}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u} \right)^2$$

Det dobbelte produkt fra de to parenteser, ses at gå ud mod hinanden, og tilbage bliver der:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) u^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \right) u^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} u^2$$

Vi har hermed fået udtrykt den kinetiske energi ved hastigheden af massemidtpunktet og den relative hastighed. Udtrykket

$$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

kaldes for *den reducerede masse*.

Hvis de to legemer udelukkende er påvirket af deres gensidige tiltrækning, er \vec{v}_G konstant, og vi kan vælge vores koordinatsystem med begyndelsespunkt i G , så $\vec{v}_G = 0$. Af udtrykket for den reducerede masse

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx m_2 \quad \text{hvis } m_1 \gg m_2$$

ses at hvis m_1 er meget større end m_2 , svarende til systemet Jord/Måne, så svarer det med tilnærmelse til en central bevægelse af Månen rundt om Jorden.

Energien er summen af den kinetiske og potentielle energi, som hvis der er tale om gravitationskræfter er givet ved:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m u^2 - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

er den reducerede masse, r er afstanden mellem centrene på de to legemer og $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$.

2. Løsning af differentiaalligningerne for en centralbevægelse

Det er velkendt, at løsningen til bevægelsesligningerne for en centralbevægelse er en ellipse, en hyperbel med grænsetilfældene cirkel og parabel. Udledningen er dog langt fra simpel. Der findes flere metoder, men jeg har valgt at anvende Lagrange formalismen, som jeg har hentet og bearbejdet fra Landau og Lifshitz: *Mechanics* fra 1960.

I Lagrange formalismen er den kinetiske energi T og den potentielle energi U udtrykt i generaliserede koordinater $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

med hastigheder $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$, hvor $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

Lagrange funktionen er $L = T - U$, og bevægelsesligningerne er:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.1)$$

For at behandle centralbevægelsen udtrykker vi først den kinetiske og potentielle energi i polære koordinater (r, θ)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{hvor} \quad x = r \cos \theta \quad \text{og} \quad y = r \sin \theta,$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta \quad \text{og} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta$$

Ved at kvadrere disse udtryk, finder man under anvendelse af $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, at

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

hvilket også kan ses geometrisk, idet en infinitesimal forskydning ds fra (r, θ) til $(r + dr, \theta + d\theta)$ består af en tangential forskydning $r d\theta$ langs buen med radius r , efterfulgt af en radial forskydning dr . Stykkerne $r d\theta$, dr og ds danner en retvinklet trekant, så $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, hvorefter udtrykket ovenfor følger ved division med dt^2 .

Ifølge Newtons gravitationslov er den potentielle energi

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}, \quad \text{hvor } M \text{ er massen af centrallegemet, } m \text{ er}$$

massen af satellitten, og r er afstanden mellem deres centre. Vi sætter for nemheds skyld $\alpha = GmM$, så $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Herefter bliver Lagrange funktionen:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (2.2)$$

Det giver bevægelsesligningerne:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \dot{A} \quad (\text{konstant}) \quad (2.3)$$

Den sidste ligning udtrykker Keplers 2. lov, at arealhastigheden er konstant.

Det areal der begrænses af en vinkel $d\theta$ på en bue med radius r er arealet af en trekant med "højde" $r d\theta$ og grundlinie r lig med $\frac{1}{2} r^2 d\theta$.

Den tangentielle hastighed er $v = r \dot{\theta}$, så konstant arealhastighed kommer ud på det samme som, at impulsmomentet $M = m r^2 \dot{\theta} = m r v$ er konstant, som vi også ved fra mekanikken.

Til bestemmelse af banekurven er de Lagrange'ske bevægelsesligninger ikke så anvendelige, da det er 2. ordens differentiaalligninger, så vi anvender i stedet udtrykket for energien, som er en 1. ordens ligning.

$$E = T + U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \quad (2.4)$$

Her eliminerer vi $\dot{\theta}^2$, ved at anvende udtrykket for impulsmomentet $M = m r^2 \dot{\theta}$ og isolerer $\dot{\theta}^2 = \frac{M^2}{m^2 r^4}$, som indsat giver:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2 m r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (\text{isolerer } \dot{r} = \frac{dr}{dt})$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2} + \frac{2\alpha}{m r}} \quad (\text{isolerer } dt)$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2} + \frac{2\alpha}{m r}}}$$

Endelig noterer vi os, at $M = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{m r^2}{M} d\theta$, som indsat giver:

$$d\theta = \frac{M}{m r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2} + \frac{2\alpha}{m r}}} = \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2m\alpha}{r}}}$$

Ved integration, finder man herved sammenhængen mellem θ og r , det vil sige banekurven i polære koordinater.

$$\theta = M \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{2mE - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2m\alpha}{r}}}$$

Vi anvender nu substitutionen $z = \frac{1}{r} \Rightarrow dz = -\frac{1}{r^2} dr$:

$$\theta = M \int \frac{-dz}{\sqrt{2mE - M^2 z^2 + 2m\alpha z}}$$

Vi vil forsøge, at omskrive nævneren, så den kommer på formen $\sqrt{1-x^2}$. Hvis $M^2 z^2$ er kvadratet på 1. led og $-2m\alpha z$ skal være det dobbelte produkt, må det andet led være givet ved $2m\alpha z = 2Mz y \Rightarrow y = \frac{m\alpha}{M}$. På denne måde fås

$$\theta = -M \int \frac{dz}{\sqrt{2mE - (Mz - \frac{m\alpha}{M})^2 + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2}}$$

Endelig sætter vi $2mE + \left(\frac{m\alpha}{M}\right)^2 = \beta^2$ og flytter denne faktor uden for kvadratrodtegnet. Da $\frac{1}{\beta}(Mz - \frac{m\alpha}{M}) = x \Rightarrow$

$dz = \frac{\beta}{M} dx$ kan integralet reduceres til:

$$\theta = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos \theta$$

Og ved at substituere tilbage:

$$\frac{1}{\beta}(Mz - \frac{m\alpha}{M}) = \cos \theta \Rightarrow \left(\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}\right) = \beta \cos \theta$$

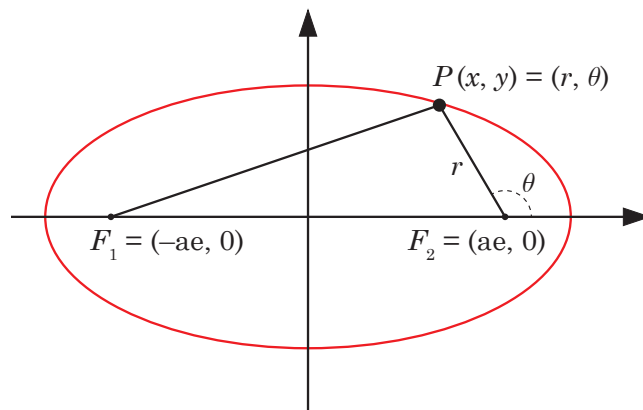
Sætter man $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ og $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, kan udtrykket reduceres til

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.5)$$

Denne ligning genkendes som ligningen for et keglesnit i polære koordinater, se nedenfor. Ifølge definitionen er $e > 0$.

Hvis $0 \leq e < 1$, vil r variere mellem værdierne $\frac{p}{1+e}$ og $\frac{p}{1-e}$. Banekurven er en ellipse eller cirkel for $e = 0$.

Hvis $1 \leq e$ er bevægelsen ikke begrænset, idet ligningen $1 + e \cos \theta = 0$ har løsningen $\cos \theta = -e^{-1}$.



3. Ellipsens ligning i polære koordinater

Ellipsens halve storakse er a . Punktet P har koordinaterne (x, y) og de polære koordinater (r, θ) , som vist på tegningen. De to brændpunkter F_1 og F_2 , har koordinater $(-ae, 0)$ og $(ae, 0)$, hvor e er excentriciteten. I en elementær fremstilling og udledning af ellipsens ligning finder man følgende for "brændstrålerne"

$$|F_1 P| = a + ex \quad \text{og} \quad |F_2 P| = a - ex$$

Samtidig er $|F_2 P| = r$, og det ses af figuren, at

$$x - ae = r \cos \theta \Rightarrow x = r \cos \theta + ae$$

som indsat i $|F_2 P| = r = a - ex$ giver

$$r = a - e(r \cos \theta + ae) \Rightarrow r(1 + e \cos \theta) = a(1 - e^2) \Leftrightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3.1)$$

Dette ses, at være i overensstemmelse med (2.5).

4. Keplers love

Keplers 1. lov: Alle planeterne bevæger sig i plane elliptiske baner med solen i det ene brændpunkt. Løsningen til bevægelsesligningerne $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ fremstiller for $0 \leq e < 1$ en ellipse, hvilket er indholdet af Keplers 1. lov.

Keplers 2. lov: Alle planeter bevæger sig med konstant arealhastighed.

Dette følger af (2.3), da

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dot{A} \quad (\text{konstant})$$

Keplers 3. lov: Forholdet mellem 3. potens af middelfaststanden a (den halve storakse) og 2. potens af omløbstiden T , er den samme for alle planeter.

$$\frac{a^3}{T^2} = k_s$$

Vi tager udgangspunkt i udtrykket for impulsmomentet $M = mr^2\dot{\theta}$, som vi omskriver til:

$$M dt = mr^2 d\theta \Rightarrow M \int_0^T dt = 2m \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Det første integral er lig med omløbstiden T , og det andet er lig med arealet af ellipsen, som er πab . Så der gælder, at $MT = 2m\pi ab$, hvor b er den halve lilleakse.

For en ellipse gælder formlerne:

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{og} \quad \frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2) \Rightarrow b = \frac{P}{\sqrt{(1 - e^2)}}$$

For ellipsen fandt vi:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \Rightarrow M^2 = pm\alpha \Rightarrow M = \sqrt{pm\alpha}$$

Dette indsættes i

$$T = \frac{2\pi mab}{M} = \frac{2\pi mab}{\sqrt{pm\alpha}} = \frac{2\pi ap}{\sqrt{pm\alpha}\sqrt{1 - e^2}}$$

Indsættes $\sqrt{p} = \sqrt{a(1 - e^2)}$ får man

$$T = \frac{2\pi ap}{\sqrt{pm\alpha}\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi a\sqrt{p}}{\sqrt{m\alpha}\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{m\alpha}}$$

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m\alpha}} \Leftrightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{m\alpha}{4\pi^2} \quad (4.4)$$

Dette er indholdet af Keplers 3. lov.

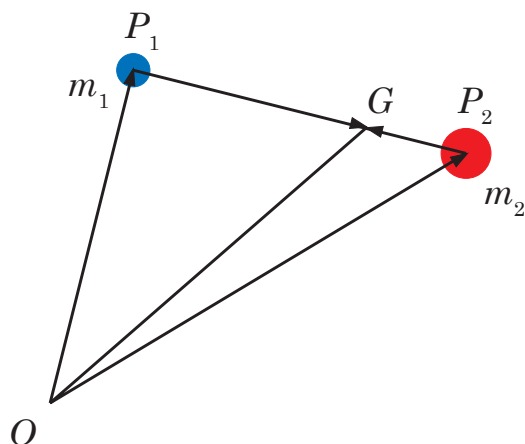
5. Tilbage til tolegemeproblemet geometri

Når banekurven (2.4) for centralbevægelsen af den reducerede masse er fundet, kan banekurven for hvert af de to legemer bestemmes ud fra (1.2).

Dette kræver dog, at man kender positionen af massemidt-punktet G på forbindelseslinien mellem de to legemer. Den kan imidlertid elegant bestemmes ved hjælp af figuren øverst.

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{OP}_1 + m_2 \vec{OP}_2) \Leftrightarrow$$

$$(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OP}_1 + m_2 \vec{OP}_2 \Leftrightarrow$$



$$m_1(\vec{OG} - \vec{OP}_1) = -m_2(\vec{OG} - \vec{OP}_2) \Leftrightarrow$$

$$m_1 \vec{P}_1 G = -m_2 \vec{P}_2 G \Rightarrow \frac{|P_1 G|}{|P_2 G|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.1)$$

Af ovenstående fremgår, at massemidt-punktet G er placeret på forbindelseslinien mellem de to masser, og at G deler linie-stykket fra P_1 til P_2 i det omvendte masseforhold.

Dette kan man for eksempel anvende til at udregne massemidt-punktets placering for systemet bestående af Jorden og Månen.

Forholdet $\frac{M_{måne}}{M_{jord}} = 0,0123$ og afstanden mellem deres centre er ca. $60R$, hvor R er jordradius.

Hvis r_G er afstanden fra jordens centrum til massemidt-punktet G , så gælder der ifølge ovenstående

$$\frac{r_G}{60R - r_G} = \frac{M_{måne}}{M_{jord}} = 0,0123 \Rightarrow r_G = 0,729R \quad (5.2)$$

Massemidt-punktet befinder sig altså inden for Jordens overflade. Som følge af deres gensidige massetiltrækning bevæger både Jorden og Månen sig i ellipsebaner om deres fælles brænd-punkt og med den samme omløbstid. Månens påvirkning af Jorden giver derfor anledning til mindre uregelmæssigheder i Jordens bane omkring Solen, de såkaldte *perturbationer*.