Hvor lang tid varer et stjerneskud?

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Hvordan kan man ud fra en meteors masse og hastighed beskrive dens vej ned gennem atmosfæren? Her giver forfatteren en fremstilling af fysikken bag.

Søndag den 18. januar kunne man observere en meteor over store dele af det østlige Danmark. Alle ved, at meteorer opnår så høje temperaturer, at de fleste brænder op og fordamper på deres vej ned gennem Jordens atmosfære. Ikke ualmindeligt bliver man som fysiklærer spurgt, om man kan forklare dette.

Det kan man måske godt, men hvis det er en forklaring, der involverer tal, så skal man nok ikke tilføje, at spørgeren sandsynligvis ikke har nogen mulighed for at forstå forklaringen.

Umiddelbart kender jeg ikke til beregninger, der omtrentlig ud fra meteorens masse og hastighed kan beskrive, hvad der sker med meteoren på dens vej ned gennem atmosfæren. Det som populært kaldes et stjerneskud. Jeg vil forsøge at besvare nogle af disse spørgsmål nedenfor. Vi antager, at en meteor er et klippestykke.

Hvorfor nedbremses en meteor

For kvalitativt at forstå nedbremsningen af en meteor betragter vi luftmodstanden som et fuldstændig uelastisk stød mod luftens molekyler. At meteoren og luften ikke fortsætter som ét legeme er af mindre betydning for beregningerne nedenfor.

Meteorens masse betegnes m_0. I tidsrummet dt støder den ind i en massen dm af luftmolekyler og får derved en hastighedstilvækst dv. Der gælder ifølge impulsbevarelse.

$$(m_0 + dm)\cdot(v + dv) = m_0 \cdot v \Leftrightarrow$$

$$v+dv = \frac{m_0}{m_0 + dm}\, v = \frac{1}{1+\frac{dm}{m_0}}v$$

Idet $\frac{dm}{m_0} << 1$, anvender vi tilnærmelsen $\frac{1}{1+h} \approx 1-h$ på nævneren. Vi får da

$$v+dv = \frac{1}{1+\frac{dm}{m_0}}v = \left(1-\frac{dm}{m_0}\right) v \Rightarrow dv = -\frac{dm}{m_0}\, v.$$

Den sidste ligning kan omskrives til

$m_0 \cdot dv + dm \cdot v = 0$, som udtrykker en differentiel impulsbevarelse, og dette kunne vi selvfølgelig også have opstillet direkte.

Vi antager, at atmosfærens massefylde ρ er konstant og ikke – som det er tilfældet – eksponentielt aftagende efter formlen

$$\rho(h) = \frac{M}{RT}\cdot p_0 \cdot \exp\left(-\frac{Mg}{RT}\, h\right).$$

Dette er ikke nogen egentlig indskrænkning, idet vi kan erstatte den virkelige atmosfære med en atmosfære med konstant massefylde og mindre tykkelse. Det følger af ligningen: $\rho_{\text{luft}} \cdot g \cdot h = p_0$, hvor $\rho_{\text{luft}} = 1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, og $p_h = 1{,}013\cdot 10^5$ Pa, som giver h = 8,0 km. Dette får kun betydning for de beregnede afstande i det følgende.

For at finde et udtryk for dm betragter vi det "rør", som et tværsnit af meteoren pløjer igennem i tidsrummet dt. Rørets længde er $ds = v \cdot dt$, og tværsnittet af røret, som er meteorens tværsnit, kalder vi A. Rumfanget er derfor $dV = A \cdot v \cdot dt$.

Vi kan da opstille et udtryk for massen $dm = \rho \cdot A \cdot v \cdot dt$ og dermed $\frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \cdot v$, et almindelig kendt udtryk for væskestrømning, mv.

Divideres ligningen $dv = -\frac{dm}{m_0}\, v$ med dt, får man en ligning, der kan integreres.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{dm}{dt}}{m_0}\, v = -\frac{\rho A v}{m_0}\, v = -\frac{\rho A v}{m_0}\, v^2,$$

en ligning, der er kendt fra turbulent luftmodstand.

I denne ligning er der ikke taget hensyn til den hastighedsforøgelse, der sker på grund af tyngdeaccelerationen. I ligningen ovenfor er det nu meget let at tilføje et led g til højre side, hvorefter ligningen bliver:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho A v}{m_0}\, v^2 + g$$

Denne ligning kan kun vanskeligt integreres, men man kan løse uligheden:

$$g < \frac{1}{10}\, a_{\text{luft}} \Leftrightarrow g < \frac{1}{10}\frac{\rho A}{m_0}\, v^2,$$

som giver

$$v > \sqrt{\frac{10 \cdot m_0 g}{\rho A}} \Rightarrow v > 241\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

hvoraf vi konstaterer, at tyngdeaccelerationen er helt uden betydning, hvilket også fremgår ved en numerisk løsning.

Uden g kan ligningen separeres og integreres.

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}\,dv = -\frac{\rho A}{m_0}\int_0^t dt \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\rho A}{m_0}\,t \Leftrightarrow$$
$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t}$$

Vi kan også finde et udtryk for den tilbagelagte strækning.

$$ds = v \cdot dt = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t}\,dt \Leftrightarrow$$
$$\int ds = \int \frac{v_0}{1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t}\,dt \Rightarrow$$
$$s = \frac{m_0}{\rho A} \cdot \ln\left(1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t\right)$$

Er strækningen s givet, kan man bestemme "faldtiden" t af den sidste ligning, som så kan indsættes i udtrykket for hastigheden, til at bestemme v.

Udledningerne ovenfor kan ikke opretholdes af flere grunde, men vi vil udregne tabet i kinetisk energi for at få en fornemmelse af temperaturstigningen. Vi skal da bruge nogle data.

$$\rho = \rho_{\text{luft}} = 1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ v_0 = 10\,\frac{\text{km}}{\text{s}},\ m_0 = 100\text{ kg},$$
$$\rho_{\text{meteor}} = 2{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3},\ \frac{4}{3}\pi \cdot r^3_{\text{meteor}} \cdot \rho_{\text{meteor}} = 100\text{ kg},$$
giver $r_{\text{meteor}} = 0{,}204$ m og $A = 0{,}131\text{ m}^2$.

Heraf følger: $\frac{\rho A}{m_0} = 1{,}69 \cdot 10^{-3}\text{ m}^{-1}$.

Vi kan for eksempel undersøge, hvor lang tid der går, før meteoren har reduceret sin hastighed til $\frac{1}{10}v_0$.

Da vi ikke ved, hvor lang en strækning, der skal anvendes til dette, beregner vi først tiden. Vi løser derfor ligningen:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t}\,dt = \frac{1}{10}v_0,\ \text{som giver}$$
$$t = \frac{m_0}{\rho A v_0}(10 - 1)\cdot t = 0{,}533\text{ s.}$$

Selv om denne tid er sammenlignelig med et stjerneskud, kan man ikke lægge så meget i dette resultat. Tilføjer man nemlig en "formfaktor" $\alpha < 1$ til tværsnitsarealet A, vil tiderne blive forlænget med reciprokværdien til denne formfaktor. Strækningen, den har bevæget sig, fås af

$$s = \frac{m}{\rho A} \cdot \ln\left(1 + \frac{\rho A v_0}{m_0}t\right) = 1{,}36\text{ km}$$

Bemærk at afstande skal sættes i relation til atmosfærens tykkelse, som er sat til 8,0 km. Vi udregner dernæst tilvæksten på den kinetiske energi:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}m_0(v^2 - v_0^2) = \tfrac{1}{2}m_0((0{,}1v_0)^2 - v_0^2)$$
$$= -\,0{,}99 \cdot \tfrac{1}{2}m_0\,v_0^2 = -\,0{,}99 \cdot 5{,}0 \cdot 10^9\text{ J}$$

Ud fra denne beregning mister meteoren 99% af sin energi på en strækning på 1,36 km. Hvor meget af den mistede energi, der går til opvarmning af stenen, kan vi kun gisne om.

Sætter vi stenens varmefylde til $c_{sten} = 800\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ og antager vi, at brøkdelen $\eta = \frac{1}{10}$ går til opvarmning af stenen, kan vi beregne temperaturstigningen:

$$\Delta E = mc\Delta T = \tfrac{1}{10} \cdot 0{,}99 \cdot 5{,}0 \cdot 10^9\text{ J} = 4{,}95 \cdot 10^8\text{ J},$$
som giver $\Delta T = 6{,}2\ 10^3$ K.

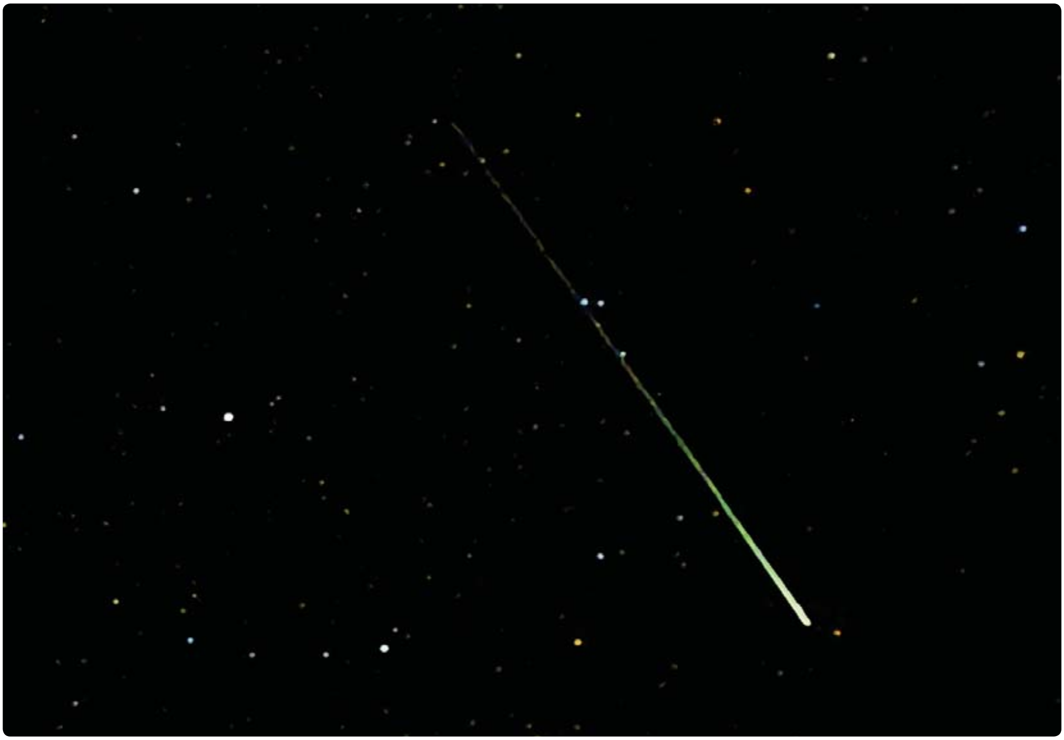
Altså omkring 6.000 K. Ud fra denne beregning er det altså langt fra overraskende, at en meteor er stærkt lysende og fordamper på sin vej ned gennem atmosfæren.

Vi har ikke nogen rigtig mulighed for at bestemme, hvilken brøkdel, der går til opvarmning af stenen. Antager vi, at $\eta = \frac{1}{100}$ finder man (naturligvis), at $\Delta T = 6{,}2 \cdot 10^2$ K. Da meteorsten faktisk fordamper, er den første antagelse nok den, der ligger nærmest virkeligheden.

Beregningen ovenfor kan kun kvalitativt redegøre for opvarmningen af en meteorsten ved sin passage gennem Jordens atmosfære. Man bemærker, at formlen for luftmodstanden er den samme, som man i almindelighed anvender for turbulent strømning, dog med tilføjelse af en formfaktor, som erstatter tværsnitsarealet A.

Tilføjer man en formfaktor ved at erstatte A med en reduceret værdi A_r, så $A_r = \alpha \cdot A$, og sætter $\alpha = \frac{1}{10}$, bliver både tiden og strækningen, indtil hastigheden er reduceret til $\frac{1}{10}v_0$, groft taget multipliceret med en faktor 10, så vi får $t = 5{,}91$ s og $s = 14{,}2$ km. Dette synes at være bedre i overensstemmelse med virkeligheden.

Begyndelseshastigheden for en meteor er nok snarere 20-30 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Laver man de samme beregninger for en sådan meteor, finder man, at tiden t reduceres med $\frac{1}{3}$ til 2,0 s, mens s er 8,7 km. Man kan selvfølgelig skrue på formfaktoren α og brøkdelen η, indtil man får præcis det resul-



Meteor i Leonidesværmen november 2006. Bemærk farveskiftet og ændringen i lysstyrke! Foto: Jesper Grønne, Silkeborg. Billeddata findes på astrophoto.dk/gallery/displayimage.php?pos=-435.

tat, man ønsker, men modellen ovenfor er i virkeligheden helt urealistisk.

Hvor lang tid varer et stjerneskud?

Antagelsen, at hele meteoren bliver opvarmet til samme temperatur, hvorefter den fordamper, kan naturligvis ikke opretholdes.

Vi betragter da problemet på en helt anden måde, idet vi antager, at det kun er det alleryderste lag af meteoren, som bliver opvarmet, og som så fordamper. Herved mister meteoren gradvis sin masse på vej ned gennem atmosfæren. Umiddelbart langt rimeligere, men de fremkomne ligninger kan ikke længere løses analytisk, og for at lave beregningen må man kende fordampningsvarmen for stenen.

Vi antager som før, at kun brøkdelen η af tabet i kinetisk energi går til opvarmning af meteoren, og α betegner som før formfaktoren, så $A_r = \alpha \cdot A$.

Ud fra den tidligere formel $\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho\,\alpha\,A}{m}v^2$, kan vi udtrykke den effekt, som meteoren mister.

$$P = \eta\, F_{\text{res}}\, v = -\,\eta m \frac{dv}{dt} v = -\,\eta m \frac{\rho \alpha A}{m} v^2 \cdot v$$
$$= -\,\eta\,\alpha\,\rho\, A v^3.$$

Bemærk, at den afsatte effekt vokser proportionalt med v^3.

Når massen ikke er konstant, kan vi ikke længere direkte integrere ligningen for $\frac{dv}{dt}$. Det er imidlertid muligt at opstille en ligning, som beskriver sammenhængen mellem masse og hastighed.

Antagelsen er, at det kun er en lille masse *dm,* som er den yderste skal, som opvarmes så kraftigt, at den fordamper. Hertil anvendes en energi $dQ = L \cdot dm$, hvor L er fordampningsvarmen for meteoren. Energien hertil leveres som før af sammenstødet med luftens molekyler.

$$dQ = \eta\, Pdt = \eta m \frac{dv}{dt} vdt = Ldm \Rightarrow$$

$$\eta mvdv = Ldm \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = \frac{\eta}{L} vdv$$

som integreres til:

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \frac{\eta}{2L}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

Ligningen kan løses med hensyn til m eller v^2

Fysik

$$m = m_0 \exp\left(\frac{\eta}{2L}(v^2 - v_0^2)\right)$$
$$v^2 = v_0^2 + \frac{2L}{\eta}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

Vi kan ud fra nogle simple antagelser få et begreb om størrelsen af $\frac{\eta}{2L}$.

På grund af den eksponentielle afhængighed er formlen særdeles følsom over for værdien af $\frac{\eta}{2L}$.

Antager vi f.eks., at for $v_0 = 20\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$, hvor massen er reduceret til $\frac{1}{100}\,m_0$, når hastigheden er reduceret til $\frac{1}{10}\,v_0$, så finder man $\frac{2L}{\eta} = 8{,}7\cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Antager vi som før, at $\eta = \frac{1}{10}$, giver dette $L = 4{,}35\cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Fordampningsvarmen for jern er $L_{\text{jern}} = 6{,}26\cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, så denne værdi, kan ikke umiddelbart afvises. Afhængig af valget af værdier for α, η og L opnår man naturligvis forskellige resultater.

I det følgende vil vi anvende $\alpha = \eta = \frac{1}{10}$ og $L = 4{,}35\cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Vi er interesserede i at finde, hvorledes hastigheden v, strækningen s og massen m afhænger af tiden. Vi vender tilbage til den oprindelige differentialligning $\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho\alpha A}{m}v^2$, men hvor massen nu afhænger af hastigheden efter formlen:

$$m = m_0 \exp\left(\frac{\eta}{2L}(v^2 - v_0^2)\right)$$

Indsættes dette udtryk får man:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho\alpha A}{m_0 \exp\left(\frac{\eta}{2L}(v^2 - v_0^2)\right)}v^2$$

Men når massen formindskes, kan vi ikke længere regne med, at tværsnitsarealet A er konstant.

Massen er imidlertid proportional med r^3, mens A er proportional med r^2, så

$$\frac{A_m}{A} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Indsættes dette i $\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho\,\alpha\,A}{m}v^2$, får man:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho\alpha A\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2}{3}}}{m}v^2 = -\frac{\rho\alpha A}{m_0^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{1}{3}}}v^2$$
$$= -\frac{\rho\alpha A}{m_0 \exp\left(\frac{\eta}{2L}(v^2 - v_0^2)\right)^{\frac{1}{3}}}v^2$$
$$= -\frac{\rho\alpha A}{m_0}v^2\exp\left(-\frac{\eta}{6L}(v^2 - v_0^2)\right)$$

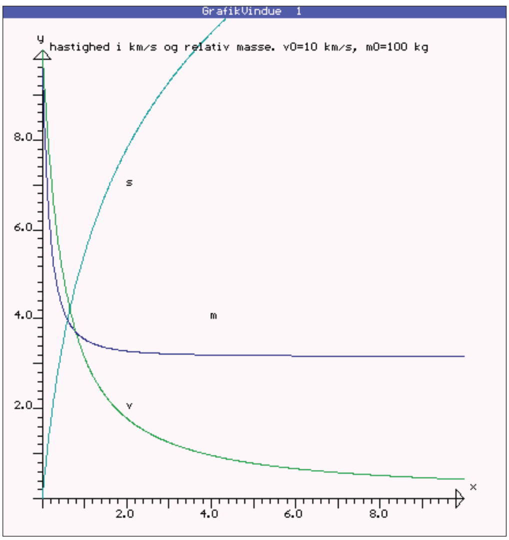
Ud fra ligningerne: $P = -\eta\alpha\rho A v^3$ og $P = L\frac{dm}{dt}$ kan man også finde en differentialligning for massens afhængighed af tiden:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\eta\alpha\rho A_m}{L}v^3 = -\frac{\eta\alpha\rho\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2}{3}}A}{L}v^3$$

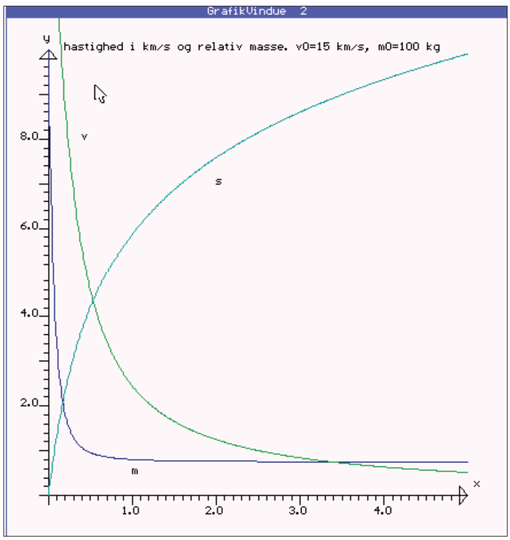
Skal vi bestemme strækningen s, som meteoren tilbagelægger, anvender vi formlen $\frac{ds}{dt} = v$.

Formlerne for hastigheden v, strækningen s og massen m er givet ovenfor som 3 koblede differentialligninger. For at løse differentialligningerne er man imidlertid henvist til numeriske metoder.

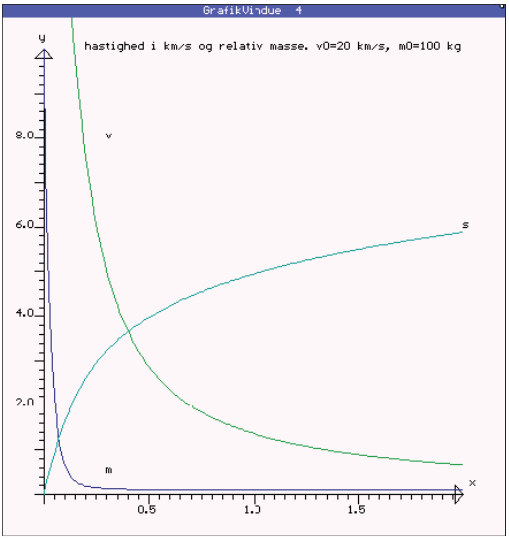
Nedenfor er vist nogle løsninger, hvor $m_0 = 100$ kg i alle eksempler undtagen de sidste to, og $v_0 = 10$, 12, 15, 25 og 30 km/s. Graferne viser massen, hastigheden og strækningen i den samme graf. Massen måles i enheden 10 kg, hastigheden i $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ og strækningen i km, for at man i



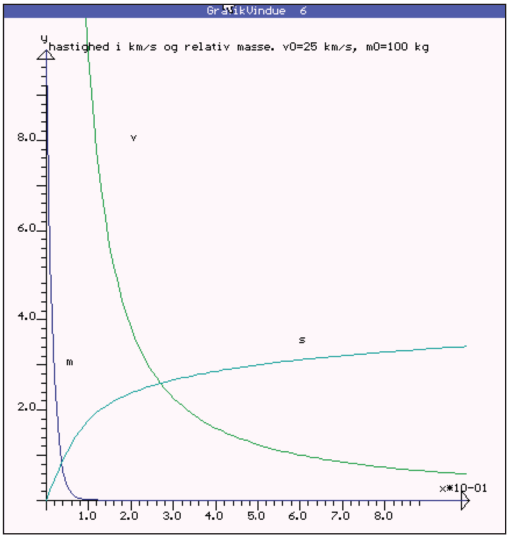
$m_0 = 100$ kg, $v_0 = 10\ \frac{\text{km}}{s}$



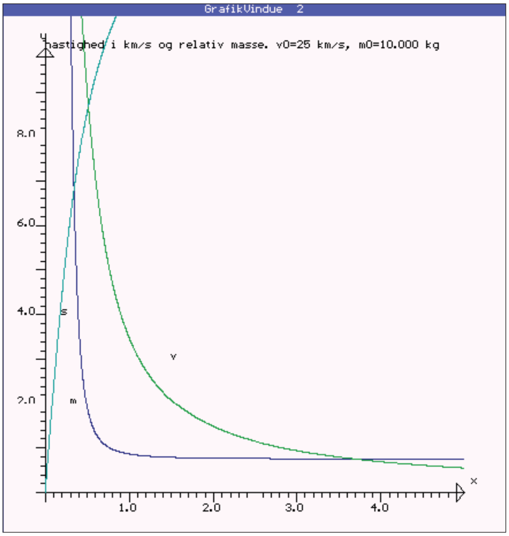
$m_0 = 100$ kg, $v_0 = 15\ \frac{\text{km}}{s}$



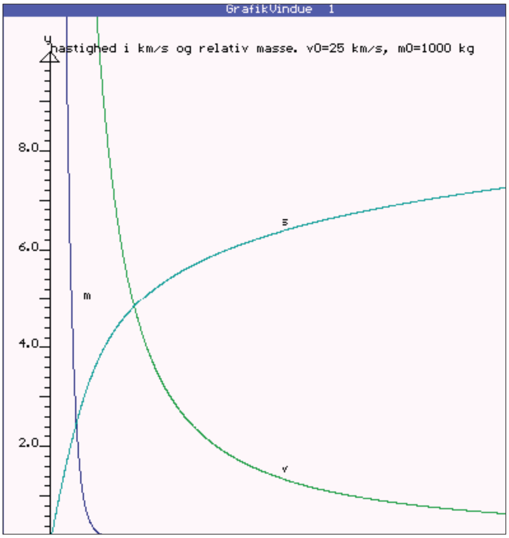
$m_0 = 100$ kg, $v_0 = 20\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$



$m_0 = 100$ kg, $v_0 = 25\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$



$m_0 = 10.000$ kg, $v_0 = 25\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$



$m_0 = 1000$ kg, $v_0 = 25\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

de fleste tilfælde kan anvende samme enhed på 2. aksen. Graferne viser blandt andet, at for en masse på 100 kg vil meteoren brænde op, hvis hastigheden overstiger 20 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$, mens en meteor med massen 1000 kg først brænder op, når hastigheden overstiger 25 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Som det fremgår af figurerne, mister en 100 kg meteor mere en 90% af sin energi på mindre end et sekund, hvis hastigheden er over 15 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Vi slutter heraf, at i almindelighed er varigheden af stjerneskud omkring et sekund. I løbet af ca. et sekund vil den enten være brændt op eller have ramt jorden.

I det tilfælde, at den ikke har haft tilstrækkelig hastighed til at brænde helt op, vil den muligvis kunne ses som en glødende kugle i længere tid, især hvis dens bane er nær parallel med jordoverfladen. ◊