Slinger i valsen – rotation om 3 principale akser

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Hvorfor kan et legeme med 3 forskellige inertimomenter udføre en stabil fri rotation omkring to af akserne, men ikke om den tredje.

Udfordingen kom fra en fysikkollega for et stykke tid siden. Nu kunne jeg tilfældigvis huske, at da jeg lavede fysiske undervisningsforsøg hos K.G. Hansen og Malte Olsen, KU i 1973, skrev jeg netop opgave i rotation og lavede et forsøg, som demonstrerede ovennævnte til eksamen. Forsøget er meget let at udføre med ethvert ikke-skrøbeligt, æskeformet legeme.

Jeg tror ikke, at jeg nogensinde har set en teoretisk forklaring, og jeg har ikke umiddelbart kunne finde mine noter fra dengang. Mit udgangspunkt var nu, at det måtte være nemt nok at forklare, hvilket man også godt kan mene, men de første ideer førte ikke rigtig til noget. Nedenfor er imidlertid nogle regninger, som jeg mener, kan forklare, hvorfor det forholder sig sådan.

Et kasseformet legeme har 3 symmetriakser. Inertimomentet med hensyn til hver af disse akser kan beregnes som inertimomentet af en plade med samme tværsnit, og hvor aksen går gennem symmetricentret lig med massemidtpunktet G. Nedenfor er en udledning af dette inertimoment, hentet fra en øvelsesvejleding i *Elementær Fysik for Gymnasiet*, 1979 – ak ja.

I_G kan for en rektangulær plade med masse m og kantlængderne a og b udregnes ved integralet:

$$I_G = \int r^2 \cdot dm, \text{ hvor } r^2 = x^2 + y^2$$

$A = a \cdot b$ er pladearealet og $dm = \rho \cdot dA = \dfrac{m}{ab} dx\, dy$

Inertimomentet kan således udregnes ved to integrationer først over x og dernæst over y efter formlen:

$$I_G = \frac{m}{ab} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$I_G = \frac{m}{ab} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \left[\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x\right]_{-a/2}^{a/2} dy$$

$$= \frac{m}{ab} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \left(\tfrac{1}{12}a^3 + ay^2\right) dy$$

$$= \frac{m}{ab} \cdot \left[\tfrac{1}{12}a^3 y + \tfrac{1}{3}ay^3\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{m}{12} \cdot (a^2 + b^2)$$

Kaldes sidelængderne i kassen for a, b og c, bliver de 3 inertimomenter:

$$I_a = \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2),\ I_b = \tfrac{1}{12}(a^2 + c^2),\ I_c = \tfrac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

Antager vi, at $a < b < c$, så gælder der indlysende følgende ulighed for inertimomenterne:

$$I_c < I_b < I_a$$

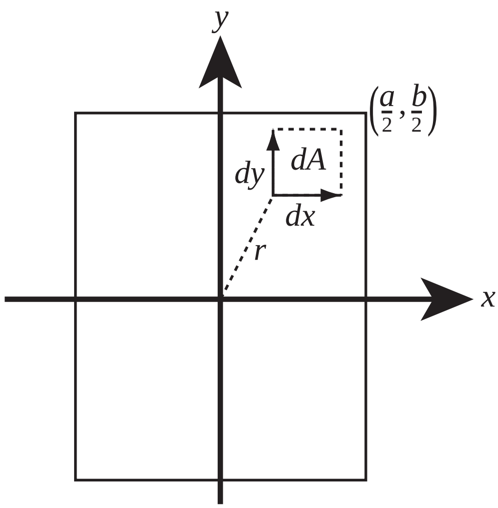
Det er en erfaring, at et kasseformet legeme kan rotere stabilt, når det frit roterer om a-aksen eller c-aksen, mens det viser sig umuligt at have en stabil fri rotation om b-aksen, hvor vi har det mellemste inertimoment.

For en fri rotation er såvel den kinetiske energi som størrelsen af impulsmomentet bevaret.

$$E = \tfrac{1}{2} I_a \omega_a^2 + \tfrac{1}{2} I_b \omega_b^2 + \tfrac{1}{2} I_c \omega_c^2 \Leftrightarrow$$

$$2E = I_a \omega_a^2 + I_b \omega_b^2 + I_c \omega_c^2$$

$$L^2 = I_a^2 \omega_a^2 + I_b^2 \omega_b^2 + I_c^2 \omega_c^2$$



Ud fra disse to ligninger kan man eliminere ω_a^2 ved at multiplicere den første ligning med I_a og subtrahere den fra den anden ligning. Heraf får man:

$$L^2 - 2EI_a = I_b(I_b - I_a)\,\omega_b^2 + I_c(I_c - I_a)\,\omega_c^2$$

Tilsvarende får man to udtryk ved at eliminere ω_b^2 og ω_c^2.

$$L^2 - 2EI_b = I_a(I_a - I_b)\,\omega_a^2 + I_c(I_c - I_b)\,\omega_c^2$$

$$L^2 - 2EI_c = I_a(I_a - I_c)\,\omega_a^2 + I_b(I_b - I_c)\,\omega_b^2$$

Opfatter vi de 3 udtryk som kvadratiske former i vinkelhastighederne, hvor $I_a > I_b > I_c$,så vil én altid være positiv definit (altid positiv eller nul), én vil være negativ definit, og én vil være indefinit (både positiv og negativ).

Hvis begyndelsestilstanden er en rotation om kun en af de tre akser, er hver af venstresiderne lig med nul. Hvis rotationen er omkring a-aksen følger dette af:

$$E = \tfrac{1}{2} I_a \omega_a^2 \text{ og } L^2 = I_a^2 \omega_a^2 \Rightarrow L^2 - 2EI_a = 0.$$

I det første og sidste giver dette kun mulighed for $\omega_b = \omega_c = 0$, da enhver afvigelse fra dette vil gøre højresiden forskellig fra nul. Men i det midterste tilfælde,altså rotation omkring b-aksen, vil der på grund af, at udtrykket er indefinit være mulighed for en ikke forsvindende vinkelhastighed om a-aksen og c-aksen, som lader energien og impulsmomentet være bevaret. At kassen "udnytter" denne mulighed viser forsøg. ◊