Raketter i studieretningsprojekter

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Det er efterhånden mere reglen end undtagelsen, at man som matematik- og fysiklærer, bliver stillet over for at skulle vejlede elever i emner, som man ikke har nogen indsigt i overhovedet. Det gælder både studieretningsprojekterne og den afsluttende opgave i almen studieforberedelse.

Når man ser bort fra internettets overfladiske og leksikale informationsflade, så er der mange emner, som eleverne foreslår, hvor det er umuligt at finde litteratur på et niveau, der er tilgængeligt for eleverne eller fagspecifik litteratur overhovedet. Jeg ved ikke, hvordan andre griber det an, men jeg har de sidste mange år været henvist til selv at skrive noter til eleverne, også fordi de simpelthen har måttet opgive de eksisterende referencer. I sådanne tilfælde har eleverne som regel klaret sig godt, hvis de i øvrigt har valgt at følge mig.

I år havde jeg blandt andet 3 studieretningsprojekter om raketter. Her blev jeg for første gang opmærksom på eksistensen af *"vandraketten"*. Jeg havde tidligere fra kemilærerne hørt om lightergasraketten.

Bortset fra, at man kan lave et eksperimentelt forløb, så har jeg ikke noget sted kunnet finde nogen beregninger, der ud fra fysiske lovmæssigheder, kunne beskrive disse raketter.

Så for at bringe lidt teoretisk substans ind i besvarelsen af opgaverne, var jeg henvist til A4–blokken og kuglepennen. Nedenfor er vist, hvad der kom ud af dette. Udledningen af raketligningen findes dog i lærebogen *Elementær Fysik 2* fra 1979.

1. Raketligningen

Raketligningen kan udledes fra impulssætningen. Vi antager, at vi har en raket med masse $m = m(t)$. Raketten drives frem ved, at der udslynges en konstant masse μ pr. tidsenhed $\mu = -dm/dt$ med hastigheden u i forhold til raketten. Herved forøges rakettens hastighed fra v til $v + dv$. I forhold til en iagttager, hvor raketten har hastighed v, udslynges massen dm med hastighed $v - u$. Impulssætningen $p(t) = p(t + dt)$ giver herefter:

$$\begin{aligned} m\cdot v &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u) \quad \Leftrightarrow \\ m\cdot v &= m\cdot v + m\cdot dv + v\cdot dm + dm\cdot dv + u\cdot dm - v\cdot dm \end{aligned}$$

Vi bortkaster leddet $dm{\cdot}dv$ (da det bliver 0 ved division med dt når $dt \to 0$). Efter reduktion fås

$$m\cdot dv + u\cdot dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dv = -u\frac{dm}{m},$$

som integreres til raketligningen

$$v - v_0 = u\cdot\ln\frac{m_0}{m} \qquad \text{hvor } m = m_v = m_0 - \mu\cdot t.$$

1.1 Kinematiske forhold ved raketopsendelse fra jorden

Opfatter vi m og v som funktioner af tiden, bliver ligningen

$$dv = -u \cdot \frac{dm}{m} \quad \text{omskrevet til} \quad \frac{dv}{dt} = -u \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Hvis raketten opsendes lodret, må vi tage hensyn til tyngdeaccelerationen g, hvilket giver

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m} \cdot \frac{dm}{dt} - g \quad \text{som integreres (ledvis) til}$$

$$v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

Skal vi bestemme højden (strækningen, som raketten tilbagelægger), skal vi udregne:

$$s - s_0 = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \left(u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - g \cdot t\right) dt$$

$$= u \int_0^t (\ln(m_0) - \ln(m(t))\,dt - g \int_0^t t\,dt$$

For at udregne integralet $\int_0^t \ln(m(t)\,dt$, anvender vi formlen $\int \ln x dx = x \ln x - x$.

$$\int_0^t \ln(m(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{\mu} \int_0^t \ln(m)\,dm = \left[-\frac{1}{\mu}(m(t)\ln(m(t)) - m(t)) \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{\mu}(m(t) \cdot \ln(m(t)) - m(t) - (m_0 \cdot \ln(m_0) - m_0)$$

Efter reduktion under anvendelse af $m(t) = m_0 - \mu \cdot t$, finder man udtrykket for strækningen:

$$s - s_0 = u \cdot \frac{m(t)}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - u \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

2. Gastryk–raketten (vandraketten)

Vi antager, at vi har en raket, hvor drivmidlet (vand/gas) stødes bagud med hastighed u i forhold til raketten gennem en lille åbning med tværsnitsareal A.

Vi antager, at trykket, hvormed væsken presses ud, er konstant under hele processen. Dette er naturligvis ikke korrekt, men uden denne antagelse bliver tingene simpelthen for indviklede. Vi regner derfor med et konstant middeltryk.

Trykket udenfor er normaltryk p_0, mens trykket inde i raketten er p. For at bestemme hastigheden, hvormed drivmidlet udstødes, anvender vi Bernoullis lov, der gælder langs en strømningslinie fra (1) til (2). p = tryk, ρ = massefylde (konstant), v = hastighed.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2$$

Sætter vi (1) = inde i flasken og (2) = udenfor, så er $v_1 = 0$, $p_2 = p_0$ og $v_2 = u$, som giver ligningen: $\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho \cdot u^2$. Ligningen kan løses mht. u, og løsningen er

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

Den masse dm, der pr. tidsenhed udslynges gennem åbningen med tværsnittet A, kan bestemmes af kontinuitetsligningen:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \rho \cdot u \cdot A$$

Dvs. massen, der befinder sig i et "rør" af længde $u \cdot dt$ og tværsnit A, altså i rumfanget $dV = u \cdot A \cdot dt$, så $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot u \cdot A \cdot dt$.

2.1 Forsøg med vandraketten

Ved en afprøvning, var beholderen pumpet op til 2,0 atm og var ca. halvt fyldt med vand. Regner man herefter med et middeltryk på 1,5 atm, finder man for vandraketten:

Δp = 0,5 atm = $5{,}0 \cdot 10^4$ Pa
$\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m^3
r = 1,1 cm og dermed $A = \pi \cdot (1{,}1 \cdot 10^{-2})^2$ m^2 = $3{,}8 \cdot 10^{-4}$ m^2

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^4}{10^3}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ og}$$

$$\frac{dm}{dt} = 10^3 \cdot 10{,}0 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 3{,}8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Med denne værdi vil det tage $\frac{0{,}525 \text{ L}}{3{,}8 \text{ L/s}} = 0{,}14$ s at tømme beholderen.

Hvis raketten uden vand vejer 62,0 g, og der er 0,525 L vand i raketten, vil den ifølge raketligningen opnå en (lodret) hastighed.

$$v - v_0 = u \cdot \ln(\frac{m_0}{m}) - g \cdot t \Rightarrow v = u \cdot \ln(\frac{m_0}{m}) - g \cdot t \Rightarrow$$

$$v = 10{,}0 \cdot \ln(\frac{0{,}062 + 0{,}525}{0{,}062}) - 9.82 \cdot 0{,}14 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Rakettens lodrette stighøjde kan udregnes af ligningen $0 - v_0^2 = -2g \cdot h \Rightarrow h = 25$ m. Den målte stighøjde for raketten var under disse betingelser 14 m.

Det er ikke overraskende, at man finder en langt mindre stighøjde. For det første er anvendelsen af Bernuillis lov, der gælder for laminar strømning, kun den bedst mulige tilnærmelse. Vi har antaget, at trykket var konstant i beholderen, hvilket ikke er tilfældet, og vi har set bort fra enhver form for energitab på grund af friktion og luftmodstand. Alligevel har vi en beregning, baseret på fysiske lovmæssigheder, der kvalitativt kan forklare, hvordan vandraketten fungerer.

3. Lightergasraketten

Lightergasraketten er blot en sodavandsflaske, hvor der er boret et lille hul i kapslen. Med det rigtige blandingsforhold af butan og ilt i flasken antænder man indholdet ved at holde en tændt lighter hen foran hullet i kapslen, hvorved blandingen antændes og udvikler sig eksplosivt.

Brændstoffet ved lightergasraketten er butan, C_4H_{10} (M = 58 g/mol), som reagerer med O_2 (M = 32 g/mol) efter reaktionsligningen:

$$1\ C_4H_{10} + 6{,}5\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 5\ H_2O$$

Hvis reaktionen skal foregå eksplosivt, skal mængden af butan være afstemt med mængden af oxygen. Det fremgår, at for hvert mol butan skal der være 6,5 mol oxygen. Ifølge Avogadros lov (og tilstandsligningen for ideale gasser) fylder det samme antal mol af forskellige gasser (ved samme tryk og temperatur) det samme. Rumfanget af butan skal derfor være 2/13 (= 1/6,5) af oxygenrumfanget.

Hvis beholderens rumfang er V, er rumfanget af O_2 ca. $0{,}20 \cdot V$. Og rumfanget af butan skal være $0{,}20/6{,}5 \cdot V = 3{,}08 \cdot 10^{-2} \cdot V$.
Hvis V = 0,5 L = 500 mL, giver det 15,4 mL butan.
Brændværdien for butan er 45,8 MJ/kg.
15,4 mL butan = 15,4 mL/24 L/mol = $6{,}42 \cdot 10^{-4}$ mol butan.
Massen $m = 6{,}42 \cdot 10^{-4}$ mol·58 g/mol = $3{,}72 \cdot 10^{-5}$ kg.
Brændværdien Q = $3{,}72 \cdot 10^{-5}$ kg·45,8 MJ/kg = 1,70 kJ, som er den energi, der udvikles.

3.1 Trykforhold for lightergasraketten

For gasser er massefylden ikke konstant, hvilket komplicerer regningerne en hel del. På samme måde, som vi antog, at trykket var konstant ved vandraketten, vil vi antage at massefylden for den gas, der presses ud er konstant ved lightergasraketten. For en kvalitativ beskrivelse af raketten er det underordnet. Vi skriver præmisserne for beregningerne nedenfor:

1. Bernoulli (som før):

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho \cdot u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

2. $m = n \cdot M$ (masse = antal mol · molmasse)

3. Tilstandsligningen:

$$p = n\frac{R \cdot T}{V} \Rightarrow dp = \frac{R \cdot T}{V} dn$$

4. Kontinuitetsligningen:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \rho \cdot u \cdot A \Leftrightarrow dm = -\rho \cdot u \cdot A \cdot dt$$

Som før presses gassen (dn mol) ud af en åbning med tværsnitsareal A.

$$dp = \frac{R \cdot T}{V} dn = \frac{R \cdot T}{V} \frac{dm}{M} = -\frac{R \cdot T}{V \cdot M} \cdot \rho \cdot u \cdot A \cdot dt$$

Fysik

og $u = \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho}}$ giver

$$dp = -\frac{R\cdot T}{V\cdot M}\sqrt{2(p - p_0)\cdot\rho}\cdot A\,dt$$

$$dp = -\frac{\sqrt{2\rho}\cdot R\cdot T}{V\cdot M}\cdot A\cdot\sqrt{p - p_0}\,dt$$

$$dp = -k_1\sqrt{p - p_0}\,dt$$

Med nogle passende værdier: A = 1,26·10^{-5} m^2, T = 500 K, p_0 = 1,0 atm, V = 0,50 L, M = 29 g/mol og ρ = 1,29 kg/m^3, finder man en værdi for k_1 = 5,80·10^3 SI.

Differentialligningen lader sig ret let integrere. Vi antager et (foreløbig ukendt) begyndelsestryk p_1.

$$\int_{p_1}^{p}\frac{dp}{\sqrt{p - p_0}} = -k_1\int_0^t dt \quad\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{p - p_0} - 2\sqrt{p_1 - p_0} = -k_1\cdot t$$

Ligningerne kan nu ikke anvendes til så meget, fordi vi ikke kender begyndelsestrykket p_1. I den næste beregning vil vi forsøge at beregne dette tryk ud fra varmeudviklingen af den kemiske reaktion.

Vi antager at den varme Q, der frigøres ved reaktionen mellem butan og ilt, forløber over en vis reaktionstid t_r , som vi sætter til 0,50 – 1,0 s. Vi har tidligere beregnet Q = 1,70 kJ. Vi sætter A = 1,26·10^{-5} m^2. c_{gas} er en værdi for luftens specifikke varmefylde.

$$dQ = \frac{Q}{t_r}dt = m_{gas}\cdot c_{gas}\cdot dT \quad\Rightarrow$$

$$dT = \frac{Q}{t_r\cdot m_{gas}\cdot c_{gas}}dt$$

Ud fra tilstandsligningen $p\cdot V = n\cdot R\cdot T$ finder man $dp = \frac{n\cdot R}{V}dT$, når det antages at V og n holdes konstante. Faktisk, så er n ikke konstant, da der forsvinder gas ud af raketten, men tingene kan også gøres for indviklede). Indsættes nu udtrykket for dT, finder man ligningen:

$$dp = \frac{n\cdot R}{V}dT = \frac{n\cdot R}{V}\frac{Q}{t_r\cdot m_{gas}\cdot c_{gas}}dt = k_2\cdot dt$$

$$k_2 = \frac{n\cdot R}{V}\frac{Q}{t_r\cdot m_{gas}\cdot c_{gas}}$$

$$= \frac{2{,}1\cdot10^{-2}\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}31\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot 1{,}7\cdot10^{3}\,\mathrm{J}}{5{,}0\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^3\cdot 1{,}0\,\mathrm{s}\cdot 0{,}604\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}0\cdot10^{3}\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}}$$

$$= 9{,}8\cdot10^{5}\ \mathrm{SI}$$

Differentialligningen bliver herefter

$$\frac{dp}{dt} = -k_1\sqrt{p - p_0} + k_2$$

$$\frac{dp}{dt} = -5{,}801\cdot10^{3}\sqrt{p - p_0} + 9{,}8\cdot10^{5}$$

Differentialligningen kan separeres og (med kun lidt besvær) integreres

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{k_2 - k_1\sqrt{p - p_0}} = \int_0^t dt \quad\Leftrightarrow$$

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\dfrac{k_2}{k_1} - \sqrt{p - p_0}} = k_1\cdot\int_0^t dt$$

Integralet er af formen $\int\frac{dx}{a - \sqrt{x}}$. Det løses ved substitutionen

$\sqrt{x} = t \;\Rightarrow\; x = t^2 \;\Rightarrow\; dx = 2t\,dt$, der giver

$$\int\frac{dx}{a - \sqrt{x}} = \int\frac{2t}{a - t}dt$$

Efterfulgt af substitutionen $a - t = z$ og $dt = -dz$ fås

$$\int\frac{2t}{a - t}dt = 2\int\frac{z - a}{z}dz = 2z - 2a\cdot\ln z$$

$$= 2(a - \sqrt{x}) - 2a\cdot\ln(a - \sqrt{x})$$

Indsætter vi heri $x = p - p_0$, men beholder $a = k_2/k_1$ får vi for vores oprindelige integral:

$$2(a - \sqrt{p - p_0}) - 2a\cdot\ln(a - \sqrt{p - p_0}) + 2a\cdot\ln a - 2a = k_1\cdot t \quad\Leftrightarrow$$

$$2a\cdot\ln\frac{a - \sqrt{p - p_0}}{a} + 2\sqrt{p - p_0} = -k_1\cdot t$$

Denne løsning kan imidlertid heller ikke anvendes til ret meget, da man ikke fra ligningen kan isolere $p = p(t)$.

For at undersøge, hvorledes trykket vokser, er man henvist til en numerisk integration. Hvor meget trykket vokser, afhænger en del af, hvor længe den kemiske reaktion varer.

Vi er især interesseret i at beregne den (totalt) overførte impuls til gasraketten.

$d(m\cdot v) = u\cdot dm = u\cdot\rho\cdot u\cdot A\cdot dt = \rho\cdot A\cdot u^2\cdot dt$ og

$u = \sqrt{\dfrac{2(p - p_0)}{\rho}}$ giver

$$dp_{\mathrm{impuls}} = d(m\cdot v) = 2A\cdot(p - p_0)\,dt$$

Den sidste ligning kan samtidig løses numerisk, når vi beregner trykket.

Antager man, at reaktionstiden t_r er 0,5 s, finder man ud fra en numerisk integration, at trykket vokser til 2,1 atm og impulsen overført til raketten er 1,15 kg·m/s.

Antager man, at reaktionstiden t_r er 1,0 s, finder man, at trykket vokser til 1,3 atm og impulsen overført til raketten er 0,65 kg·m/s.

Et tryk på 2,1 atm er næppe realistisk, så vi regner videre på den sidste værdi.

p_{total} = 0,65 kg·m/s. Sætter vi dette lig med impulsen overført til raketten, får man:

$p_{total} = m_{raket} \cdot v$ = 0,65 kg·m/s og idet m_{raket} = 22,3 g får man

$$v = \frac{0{,}65}{2{,}23 \cdot 10^{-2}} = 29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ved forsøg, hvor lightergasraketten blev affyret på en rampe med en elevation på omkring 15° fandt man ud fra kastevidden en målt hastighed på omking 12 m/s.

Som det var tilfældet med vandraketten, så er der ikke noget egentlig foruroligende ved afvigelsen af den beregnede hastighed og forsøget. For det første bruger vi tilnærmede antagelser, fx Bernoullis ligning, men den største årsag er nok snarere enhver form for friktion. Pointen er mere den, at man kan lave en beregning baseret på fysiske lovmæssigheder, der giver en kvalitativ forklaring på raketten.