Raket fysik
i gymnasieundervisningen

Ole Witt-Hansen Køge Gymnasium 2010

Indhold

1. Raketligningen

Raketligningen kan udledes ud fra impulssætningen. Vi antager at vi har en raket med masse $m = m(t)$, Raketten drives frem ved at der udslynges en konstant masse μ pr. tidsenhed $\mu = -dm/dt$ med hastigheden u i forhold til raketten. Herved forøges rakettens hastighed fra v til $v+dv$.
I forhold til en iagttager, hvor raketten har hastighed v, udslynges massen dm med hastighed $v - u$.
Impulssætningen $p(t) = p(t+dt)$ giver herefter:

(1.1)
$$\begin{aligned} mv &= (m+dm)(v+dv) + (-dm)(v-u) \quad \Leftrightarrow \\ mv &= mv + mdv + vdm + dmdv + udm - vdm \end{aligned}$$

Vi bortkaster leddet $dmdv$ (da det bliver 0, ved division med dt og dt -> 0). Efter reduktion af ligningen får man:

(1.2)
$$mdv + udm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dv = -u\frac{dm}{m}$$

som integreres til raketligningen

(1.3)
$$v - v_0 = u\ln\frac{m_0}{m}$$

Hvor $m = m_v = m_0 - \mu t$

1.1 Kinematiske forhold ved raketopsendelse fra jorden

Opfatter vi m og v, som funktioner af tiden, bliver ligningen: $dv = -u\frac{dm}{m}$ efter division med dt omskrevet til:

(1.4)
$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

Hvis raketten opsendes lodret, må vi ved beregningen af hastigheden tage hensyn til tyngdeaccelerationen g, hvilket giver:

(1.5)
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m}\frac{dm}{dt} - g$$

som integreres (ledvis) til:

(1.6)
$$v - v_0 = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

Skal vi bestemme stighøjden (den strækning, som raketten tilbagelægger), skal vi udregne:

$$s - s_0 = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt\right)dt = u\int_0^t (\ln(m_0) - \ln(m(t))dt - g\int_0^t tdt$$

For at udregne integralet: $\int_0^t \ln(m(t)dt$, anvender vi formlen: $\int \ln x dx = x\ln x - x$

$$\int_0^t \ln(m(t)dt \;=\; -\frac{1}{\mu}\int_0^t \ln(m)dm = \left[-\frac{1}{\mu}(m(t)\ln(m(t)) - m(t))\right]_0^t =$$

$$\int_0^t \ln(m(t)dt = -\frac{1}{\mu}(m(t)\ln(m(t)) - m(t) - (m_0\ln(m_0) - m_0)$$

Efter reduktion finder man udtrykket for strækningen:

(1.7) $$s - s_0 = u\frac{m(t)}{\mu}\ln(\frac{m_0}{m(t)}) - ut - ½gt^2 \qquad ; \quad hvor\ m(t) = m_0 - \mu t$$

2. Gastryk-raketten (Vandraketten)

Vi antager, at vi har en raket, hvor drivmidlet (vand/gas) stødes bagud med hastigheden u i forhold til raketten, hvilket sker gennem en lille åbning med tværsnitsareal A.

Vi antager, at trykket, hvormed vandet/gassen presses ud er konstant under hele forløbet. Dette kan naturligvis ikke opretholdes, men uden denne antagelse bliver tingene simpelthen for indviklede.

Trykket udenfor er normaltryk p_0 , mens trykket inde i raketten er p. For at bestemme hastigheden, hvormed drivmidlet udstødes, anvender vi *Bernoullis lov*, der gælder langs en strømningslinie fra (1) til (2). Vi benytter betegnelserne: p = tryk, ρ = massefylde (konstant), v = hastighed.

(2.1) $$p_1 + ½\rho v_1^2 = p_2 + ½\rho v_2^2$$

Vi sætter (1) = ”inde i flasken” og (2) = ”udenfor for flasken”, og derfor $v_1 = 0$, $p_2 = p_0$ og $v_2 = u$, som giver ligningen: $\Delta p = p_1 - p_0 = ½\rho u^2$ .Ligningen kan løses mht. u, som giver:

(2.2) $$u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}\ .$$

Den masse, der pr tidsenhed, udslynges gennem åbningen med tværsnittet A, kan bestemmes af formlen:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \rho u A$$

Nemlig den masse dm, der befinder sig i et ”rør” af længde udt og tværsnit A, altså Rumfang $dV = uAdt$, så $dm = \rho\ dV = \rho\ uAdt$.

(2.3) Eksempel med vandraket.
Vi sætter: Δp = 1,0 atm = 1,0 10^5 *Pa*. ρ = 1,0 10^3 kg/m^3. $A = \pi\ (1.0\cdot 10^{-2})^2\ m^2$.= $3{,}14\cdot 10^{-4}\ m^2$

(2.3.1) $$u = \sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{10^3}}m/s = 14{,}1m/s \qquad \text{og} \qquad \frac{dm}{dt} = 10^3\cdot 14{,}1\cdot 3{,}14\cdot 10^{-4}\,kg/s = 4{,}4\ kg/s$$

Hvis raketten uden vand vejer 50,0 g, og der er 0,5 l vand i raketten, vil den opnå en (lodret) hastighed v. Med $\frac{dm}{dt} = 4{,}4\, kg/s$, vil det tage $\frac{0{,}50\, l}{4{,}4\, l/s} = 0{,}11\, s$ at tømme beholderen.

Hastigheden beregnes af

(2.3.2)
$$v - v_0 = u \ln(\frac{m_0}{m}) - gt \quad \Rightarrow$$
$$v = u \ln(\frac{m_0}{m}) - gt = 14{,}1 \cdot \ln(11) - 9.82 \cdot 0{,}11\, m/s = 32{,}8\, m/s$$

Rakettens lodrette stighøjde kan udregnes af ligningen: $v^2 - v_0{}^2 = 2a(s - s_0)$, som i dette tilfælde bliver: $0 - v_0{}^2 = -2gh \;\Rightarrow\; h = 55\ m$. Dette kan sammenlignes med den målte stighøjde: 14 *m.*

Det er ikke meget overraskende, at man finder en langt mindre stighøjde. Vi har antaget at trykket var konstant i beholderen. Vi har set bort fra enhver form for energitab på grund af friktion. Endelig vokser stighøjden med kvadratet på begyndelseshastigheden, så den halve begyndelseshastighed passer med den målte stighøjde.
Alligevel, har vi en fysisk beregning, der kvalitativt kan forklare hvordan vandraketten fungerer.

3. Lightergasraketten

Lightergasraketten er blot en sodavandsflaske, hvor der er boret et lille hul i kapslen. Med det rigtige blandingsforhold af Butan og ilt i flasken, antænder man indholdet ved at holde en tændt lighter hen foran hullet i kapslen, hvorved blandingen antændes og udvikler sig eksplosivt.

Brændstoffet ved lightergasraketten er Butan: C_4H_{10} (M = 58 g/mol), som reagerer med O_2 (M = 32 g/mol) efter reaktionsligningen:

(3.1) $1\ C_4H_{10} + 6{,}5\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 5\ H_2O$

Hvis reaktionen skal foregå eksplosivt, skal mængden af Butan være afstemt med mængden af oxygen. Det fremgår, at for hvert mol Butan, skal der være 6,5 mol Oxygen.

Ifølge Avogadros lov (og tilstandsligningen for ideale gasser) fylder det samme antal mol af forskellige gasser (ved samme tryk og temperatur) det samme.

Rumfanget af Butan, skal altså være 2/13 (1/6,5) af oxygenrumfanget.

Hvis beholderens rumfang er V, er rumfanget af O_2 ca. 0,20V. (Atmosfæren består af 20% oxygen)

Og rumfanget af Butan skal være: 0,20/6,5 V = $3{,}08\ 10^{-2}\ V$.

Hvis V = 0,5 l = 500 *ml*, giver det 15,4 *ml* Butan.

Brændværdien for Butan er 45,8 MJ/kg.

15,4 ml = 15,4 *ml*/24 *l* /*mol* = $6{,}42\ 10^{-4}$ *mol.*

Massen af Butan: m = 6,42 10^{-4} *mol* 58 *g/mol* = 3,72 10^{-2} *g* = 3,72 10^{-5} *kg*

Brændværdien: Q = 3,72 10^{-5} *kg*· 45,8 *MJ/kg* = 1,70 *kJ*.

3.1 Trykforhold for lightergasraketten

For gasser er massefylden ikke konstant, hvilket komplicerer regningerne en hel del. På samme måde, som vi antog, at trykket var konstant ved vandraketten, vil vi antage at massefylden er konstant ved lightergasraketten. For en kvalitativ beskrivelse af raketten er det underordnet.
Vi skriver præmisserne nedenfor:

1. Bernoulli (som før): $\Delta p = p_1 - p_0 = ½\rho u^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho}}$

2. $m = n{\cdot}M$ (masse = antal mol x molmasse)

3. Tilstandsligningen: $P = n\dfrac{RT}{V} \;\Rightarrow\; dP = \dfrac{RT}{V}dn$

4. Kontinuitetsligningen: $\mu = -\dfrac{dm}{dt} = \rho u A \quad \Leftrightarrow \quad dm = -\rho u A dt$

Som før presses gassen (dn mol) ud af en åbning med tværsnitsareal A.

(3.2) $$dP = \frac{RT}{V}dn \;=\; \frac{RT}{V}\frac{dm}{M} \;=\; -\frac{RT}{VM}\rho u A dt \qquad \text{og} \qquad u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \qquad \text{giver}$$

$$dp = -\frac{RT}{VM}\sqrt{2(p-p_0)\rho}\,A dt$$

$$dp = -\frac{\sqrt{2\rho}RT}{VM}\sqrt{p-p_0}\,dt$$

(3.3) $$dp = -k_1\sqrt{p-p_0}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{p-p_0}} = -k_1 dt$$

Med nogle passende værdier: A = 1,26 10^{-5} m^2 , T =500 K, p_0 = 1,0 *atm*, V = 0,50 *l*, M =29 *g/mol*, og ρ = 1,29 *kg/m*^{3}, finder man en værdi for k_1 = 5,80 10^3.

Differentialligningen lader sig ret let integrere. Vi antager et (foreløbig ukendt) begyndelsestryk p_1.

$$\int_{p_1}^{p}\frac{dp}{\sqrt{p-p_0}} = -k_1\int_0^t dt \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{p-p_0} - 2\sqrt{p_1-p_0} = -k_1 t$$

Ligningerne kan nu ikke anvendes til så meget, fordi vi ikke kender begyndelsestrykket. I den næste beregning, vil vi forsøge, at beregne dette tryk ud fra varmeudviklingen af den kemiske reaktion.

Vi vil derfor modificere modellen, således at den varme Q, der frigøres ved reaktionen mellem Butan og ilt, forløber over en vis reaktionstid t_r , som vi sætter til 0,50 – 1,0 sek.
Vi har tidligere beregnet Q = 1,70 kJ. Vi sætter $A = 1{,}26\ 10^{-5}\ m^2$. c_{gas} er en værdi for luftens varmefylde.

(3.4) $$dQ = \frac{Q}{t_r}dt = m_{gas}c_{gas}dT \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{Q}{t_r m_{gas} c_{gas}}dt = k_2 dt$$

Ud fra tilstandsligningen $PV = nRT$ finder man: $dP = \frac{nR}{V}dT$ (når det antages at V og n holdes konstant). Faktisk, så er n ikke konstant, da der forsvinder gas ud af raketten, men tingene kan også gøres for indviklede. Indsættes nu udtrykket for dT, finder man ligningen:

$$dP = \frac{nR}{V}dT = \frac{nR}{V}\frac{Q}{t_r m_{gas} c_{gas}}dt = k_2 dt$$

(3.5) $$k_2 = \frac{nR}{V}\frac{Q}{t_r m_{gas} c_{gas}} = \frac{2{,}1\cdot 10^{-2}\, mol \cdot 8{,}31\, J/(mol\, K)\cdot 1{,}7\cdot 10^3\, J}{5{,}0\cdot 10^{-4}\, m^3 \cdot 1{,}0\, s \cdot 0{,}604\cdot 10^{-3}\, kg \cdot 1{,}0\cdot 10^3\, J/kgK} = 9{,}8\cdot 10^5 \text{ SI}$$

Differentialligningen bliver herefter:

(3.6) $$\frac{dp}{dt} = -k_1\sqrt{p - p_0} + k_2 \qquad \frac{dp}{dt} = -5{,}801\cdot 10^3\sqrt{p - p_0} + 9{,}8\cdot 10^5$$

Differentialligningen kan separeres og (med kun lidt besvær) integreres:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{k_2 + k_1\sqrt{p - p_0}} = -\int_0^t dt$$

Integralet er af formen: $\int \frac{dx}{a+\sqrt{x}}$. Det løses ved substitutionen $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$$\int \frac{dx}{a+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{a+t}$$. Efterfulgt af substitutionen $a + t = z$.

$$\int \frac{2tdt}{a+t} = 2\int \frac{z-a}{z}dz = 2z - 2a\ln z = 2(a+\sqrt{x}) - 2a\ln(a+\sqrt{x})$$

Indsætter vi: $x = p - p_0$, men beholder $a = k_2/k_1$ får vi for vores oprindelige integral:

$$2(a+\sqrt{p-p_0})-2a\ln(a+\sqrt{p-p_0})-2a+2a\ln a=-k_1t \quad \Leftrightarrow$$

$$2a\ln\frac{a+\sqrt{p-p_0}}{a}-2\sqrt{p-p_0}=k_1t$$

Løsningen kan imidlertid ikke anvendes til ret meget, da man ikke fra ligningen kan isolere $p = p(t)$.

For at undersøge, hvorledes trykket vokser op er man henvist til en numerisk integration. Hvor meget trykket vokser til, afhænger en del af, hvor længe den kemiske reaktion varer.

Vi er interesseret i at beregne den (totalt) overførte impuls til gasraketten.

$$d(mv)=udm=u\rho uAdt=\rho Au^2dt \quad \text{og} \qquad u=\sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}} \quad \text{giver:}$$

$$dp_{impuls}=d(mv)=2A(p-p_0)dt$$

Den sidste ligning kan samtidig løses numerisk, når vi beregner trykket.

Antager man, at reaktionstiden t_r er 0,5 *s*, finder man at trykket vokser til 2,1 *atm* og impulsen overført til raketten er 1,15 *kg m/s*.

Antager man, at reaktionstiden t_r er 1,0 *s*, finder man at trykket vokser til 1,3 *atm* og impulsen overført til raketten er 0,65 *kg m/s*.

Et tryk på 2,1 *atm* er næppe realistisk, så vi regner videre på den sidste værdi.

P_{total} = 0,65 *kgm/s*. Sætter vi dette lig med impulsen overført til raketten, får man:

$P_{total} = m_{raket}v$ =0,65 *kgm/s* og m_{raket} = 22,3 *g*. får man: $v=\dfrac{0{,}65}{2{,}23\cdot10^{-2}}=29\ m/s$.

Ved forsøg, hvor lightergasraketten blev affyret på en rampe med en elevation på omk. 15^0 fandt man ud fra kastevidden en målt hastighed på omk. 12 m/s.

Som det var tilfældet med vandraketten, så er der ikke noget egentlig foruroligende ved afvigelsen af den beregnede hastighed og forsøget. For det første bruger vi tilnærmede antagelser, men den største årsag er nok snarere, at vi ikke tager hensyn til enhver form for friktion og viskositet.

Ole Witt-Hansen
www.olewitthansen.dk