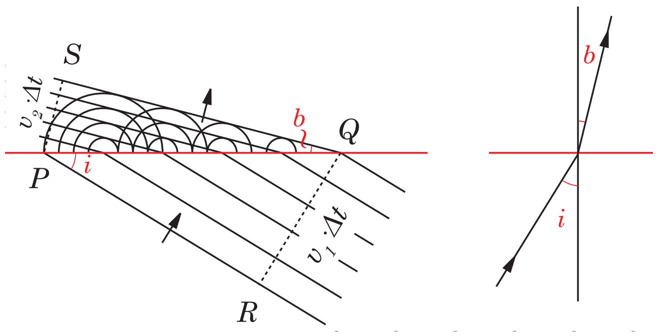
Brydningsloven og "Principle of least time"

Ole Witt-Hansen, lektor emeritus

Der findes vist ikke en egentlig dansk oversættelse af begrebet *"principle of least time"*, men alligevel hører *"principle of least time"* til de allermest fundamentale principper i fysikken. Således fører dette princip ud fra Lagrange–formalismen til den analytiske mekanik, som er den mest generelle udledning af bevægelsesligningerne i fysikken. I dette tilfælde taler man dog om *"principle of least action"*.

Hvad angår bølger, og især lys, så udtrykker princippet, at lyset altid bevæger sig fra et punkt til et andet langs den bane, som tager den korteste tid.

Dette betyder trivielt, at lyset udbreder sig langs rette linier, når det udbreder sig i samme stof. Når lys bevæger sig fra et stof til et andet, fx fra luft til vand eller fra luft til glas, så er dette imidlertid ikke tilfældet. Den bane, som lyset vælger, er derimod givet ved brydningsloven.



Ovenfor er vist en tegning som illustrerer dette. Lyset kommer ind fra neden, hvor udbredelseshastigheden er v_1. Lyset passerer derefter en grænseflade til et stof, hvor udbredelseshastigheden er v_2. På figuren er $v_1 > v_2$.

Af de to retvinklede trekanter *PQR* og *PQS* på figuren ovenfor ses, at

$$\sin i = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{|PQ|} \quad \text{og} \quad \sin b = \frac{v_2 \cdot \Delta t}{|PQ|}$$

Ved division af de to ligninger finder man brydningsloven

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$ hvor n_{12} kaldes for brydningsforholdet.

Vi vil nu vise, at brydningsloven hviler på – og kan udledes af – *principle of least time*. Ved udledningen, vil vi imidlertid betragte et tilsyneladende helt andet og mere jordnært problem.

En livredder, der står inde på stranden, får øje på en smuk ung pige, der råber om hjælp ude i vandet. Vi antager, at pigens placering ikke er lige ud fra livredderens position.

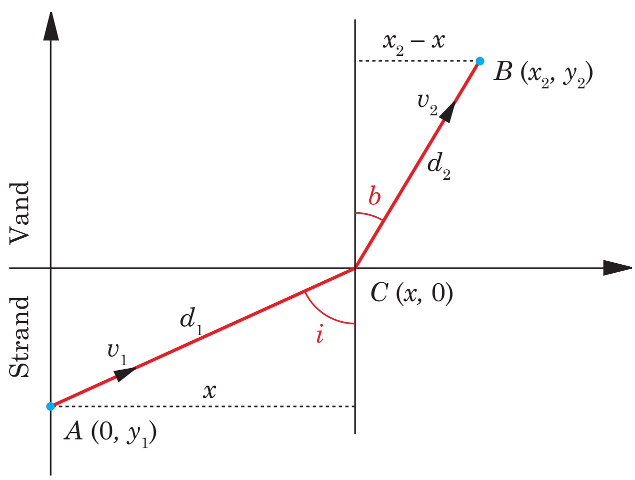
Livredderen bevæger sig langt hurtigere på stranden, end han svømmer, så han vil nok ikke vælge den direkte linie ud til pigen for at nå derud i den kortest mulige tid. Problemet er da, hvilken vej han skal vælge. Situationen er illustreret nedenfor.

For at foretage en analytisk bestemmelse af den vej, som tager den korteste tid, så indlægger vi et koordinatsystem, som vist på den næste figur.

De strækninger, som livredderen skal løbe eller svømme betegnes d_1 og d_2. I det øjeblik livredderen begynder, at løbe ud for at redde pigen, har han positionen $A\ (0, y_1)$. Pigen har positionen $B\ (x_2, y_2)$. Det punkt, hvor livredderen løber ud i vandet og begynder at svømme, er $C\ (x, 0)$.

Vores opgave er nu ad matematisk vej at bestemme x, således at livredderens bevægelse fra A til B sker i den kortest mulige tid.

Livredderen kan løbe på stranden med hastigheden v_1 og svømme med hastigheden v_2. Vi kan nu indse, at dette er fuldstændig analogt til en lysstråle, der passerer en grænseflade. Af samme grund har vi på figuren markeret indfaldsvinklen i og brydningsvinkel b.



Af figuren ses, at $d_1 = |AC|$ og $d_2 = |BC|$. Ifølge afstandsformlen gælder der:

$$d_1 = \sqrt{x^2 + y_1^2} \qquad \text{og} \qquad d_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

Ifølge formlerne for en retvinklet trekant, gælder der:

$$\sin i = \frac{x}{d_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} \qquad \text{og}$$

$$\sin b = \frac{x_2 - x}{d_2} = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$$

Bevæger man sig strækningen s i tidsrummet t, og med hastigheden v, så gælder der som bekendt $s = v \cdot t$. Heraf følger, at tiden t kan beregnes som $t = s/v$.

Livredderen bevæger sig på land (1) strækningen d_1 med hastigheden v_1 og han bevæger sig i i vandet (2) strækningen d_2 med hastigheden v_2. Heraf følger så, at den samlede tid $t(x)$, det tager ham, at nå ud til pigen er:

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

Vi har opskrevet tiden $t = t(x)$ som en funktion af x. Vi vil nu anvende de sædvanlige analytiske metoder for at bestemme minimum for denne funktion. Dette gøres som bekendt ved at differentiere og bestemme nulpunkter for differentialkvotienten. Vi finder ved differentiation:

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-2(x_2 - x)}{2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} \quad \Rightarrow$$
$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$$

For at bestemme minimum sætter vi $t'(x) = 0$. Anvender vi de udtryk for "indfaldsvinkel" og "brydningsvinkel", som blev udledt ovenfor:

$$\sin i = \frac{x}{d_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} \qquad \text{og}$$

$$\sin b = \frac{x_2 - x}{d_2} = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$$

ser vi, at vi kan skrive $t'(x)$ som:

$$t'(x) = \frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin b}{v_2}$$

Ligningen $t'(x) = 0$ har derfor løsningen:

$$\frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin b}{v_2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_1}{v_2}$$

Vi ser altså at *brydningsloven* er en konsekvens af den korteste tid for at nå fra A til B. Vi kan derfor slutte, at når lyset bevæger sig over en grænseflade mellem to stoffer, vil lyset følge den vej, som tager den mindste tid. Dette er indholdet af *"principle of least time"* for lys.

I almindelighed ville opgaven være, at bestemme x af ligningen $t'(x) = 0$. Dette er nu forbundet med en del vanskeligheder, idet resultatet er en 4. gradsligning.

Jeg har gennemgået dette eksempel i 15 år på A–niveau i fysik. Og det leverer faktisk et eksempel på, at matematikcomputerne kommer til kort, for uden den analytiske omskrivning med udtrykkene sin(i) og sin(b), så vil man aldrig få brydningsloven frem.

Men som jeg har gentaget det mange gange siden 2005, så findes der ingen computer, der kan konkurrere med et teoretisk overblik.