

Overfladespænding

OLE WITT-HANSEN, Køge Gymnasium

Vi ved alle, at overfladespænding skyldes, at molekylerne i en væske tiltrækker hinanden, og at man kan mindske vands overfladespænding ved at tilsætte lidt sulfo. Men hvad ved vi ellers?

1. Overfladespænding

Min søn skulle op i fysik til 9. klasses afgangsprøve. Han spurgte en dag henkastet, om jeg ikke kunne forklare ham noget om overfladespænding. Joh..., men udover, at det er overfladespændingen, der holder sæbebobler og vanddråber sammen, og som bevirker at nogle insekter kan gå på vandet, så anede jeg faktisk intet om de lovmæssigheder, der gælder for overfladespænding.

Jeg mindes heller ikke, at overfladespænding nogensinde har været genstand for behandling i lærebøger for gymnasiet. På den anden side involverer beregninger af overfladespænding nogle af matematikkens allerstærkeste teorier, herunder variationsregningen.

Det er ikke så nemt at finde noget mere konkret om emnet, men i Addison Wesley: *University Physics* fra 1992, men ikke i 2008 udgaven, findes et lille udmærket afsnit. Her fastslås, at kraften pr. længdeenhed vinkelret på et "snit" er konstant. Er snittets længde Δl , gælder således.

$$F = \gamma \Delta l$$

γ er en materialkonstant, som man ofte angiver i $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, hvor $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$. F.eks. er

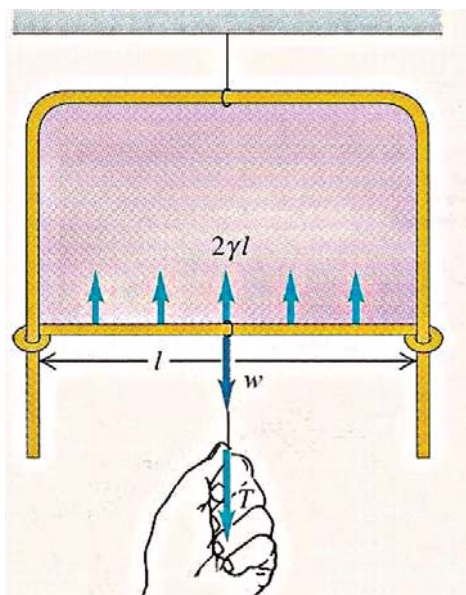
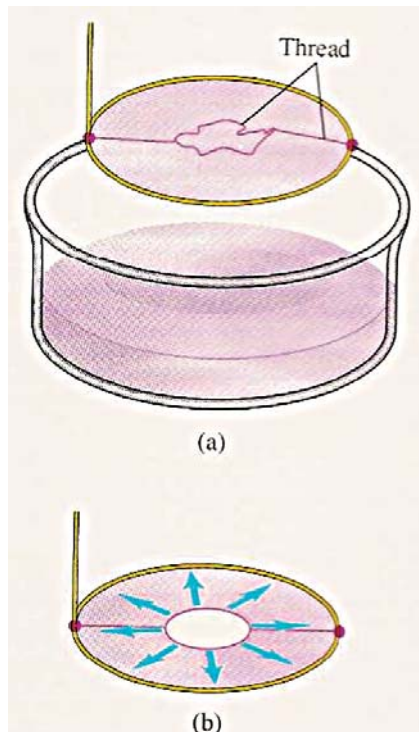
$$\gamma_{\text{vand}} = 76 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$$

Hvis der er to parallelle adskilte overflader, som f.eks. en sæbeboble, er der den samme overfladespænding på hver side, og kraften pr. længdeenhed, vinkelret på et snit, er det dobbelte, så

$$\frac{F}{\Delta l} = \gamma \Leftrightarrow F = \gamma \Delta l.$$

Denne grundlæggende lovmæssighed er søgt illustreret på de to figurer nedenfor.

En tynd tråd flyder i en sæbeflade. Når den indre flade brister, trækker tråden sig ud på grund af overfladespændingen.



På den anden figur er dannet en sæbeflade i et rektangel med en forskydelig side. Overfladespændingen kan principielt bestemmes ved, at måle kraften F og dividere med den dobbelte længde. Det arbejde, der skal udføres for at flytte den bevægelige stang stykket Δs , er

$$\Delta W = F\Delta s = 2\gamma l\Delta s.$$

Heraf følger, at $\Delta W = 2\gamma\Delta A$, hvor ΔA er forøgelsen af arealet.

Da tilvæksten i potentiel energi $\Delta E_{\text{pot}} = \Delta W$, følger det umiddelbart, at den potentielle energi af en overflade, som følge af overfladespændingen er proportional med overfladens areal. Det er ikke vanskeligt formelt at vise, at dette også gælder for krumme overflader.

At den potentielle energi er proportional med overfladen, leverer imidlertid en simpel fysisk forklaring på mange velkendte fænomener, der er et resultat af overfladespænding. Vandråber, sæbebobler, sæbeflader, der alle har den egenskab, at formen er et resultat af den mindste overflade, givet nogen randbetingelser. Den mindste overflade, betyder nemlig minimum for den potentielle (overfladespændings) energi, altså et fysisk "first principle".

Den simple sammenhæng mellem kraft og overfladespænding kan f.eks. anvendes til at beregne (over)trykket i en sæbeboble. Ser man på den kraft fra overfladespændingen, som der er langs en meridian i en sæbeboble, så svarer den til den kraft, som gastypekket yder vinkelret på meridianplanen på hver af de to kugleskaller.

Kraften på hver af de to kugleskaller er imidlertid det samme som kraften på meridianplanen, idet projektionen af kugleskallen er lig med tværsnittet.

Kraften fra overfladespændingen langs en meridianplan er:

$$F_O = 2\gamma(2\pi R).$$

Kraften på meridianplanen som følge af trykket P er

$$F_G = P(\pi R^2)$$

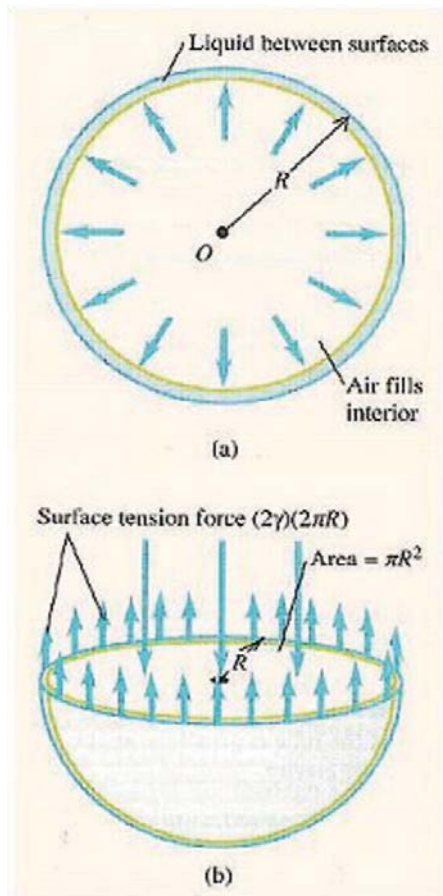
Vi kan herefter opskrive ligningen: $F_O = F_G$

$$2\gamma(2\pi R) = P(\pi R^2)$$

Hvorefter vi finder det ønskede udtryk for trykket i boblen

$$P = \frac{4\gamma}{R}$$

$\gamma_{\text{sæbe}} = 25 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$. For en boble med radius 1 cm, finder vi således et tryk på $100 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{mN}}{\text{cm}^2}$.



2. Variationsregning

Variationsregningen er en af de allerstærkeste matematiske discipliner, som især har fundet anvendelse i differentialgeometrien og i fysikken. I variationsregningen udleder man, at skal man bestemme ekstremum for en funktional:

$$I(y) = \int_a^b F(y', y, x) dx$$

så skal man bestemme den differentilligning, som svarer til variationen $\delta I = 0$. Dette fører til Euler-Lagrange ligningen:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Hvis $F(y', y, x)$ ikke afhænger eksplicit af x , kan man vise, at denne ligning kan integreres til en differentilligning af 1. orden.

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{Const}$$

Som bekendt kan bevægelsesligningerne for alle kendte fysiske teorier, herunder den analytiske mekanik, Maxwells ligninger, almene relativitetsteori, udledes formelt af *Principle of least action*.

Har man givet en Lagrangefunktion af generaliserede koordinater q_i : $L(\dot{q}_i, q_i, t)$, så er bevægelsesligningerne givet ved Euler-Lagrange ligningen:

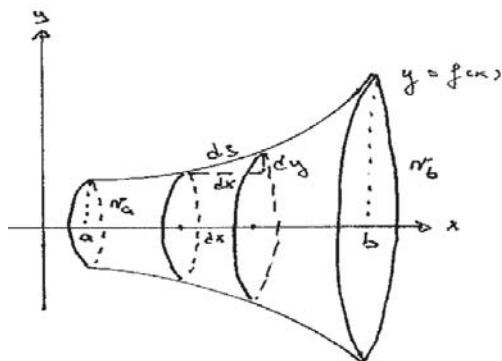
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

2.1 Sæbeflader

Ifølge betragtningerne ovenfor vil en flade, der er afgrænset af nogle randbetingelser indstille sig således, at overfladen er et minimum. Dette er et oplagt variationsproblem, som kan løses for nogle rotationssymmetriske overflader.

Formen af en "sæbeflade", altså snitkurven for et omdrejningslegeme, bestemmes således, at overfladen er mindst. Se figur.

I opgaver af denne type er der altid knyttet nogle såkaldte randbetingelser. I tilfældet på figuren



er randbetingelserne: $f(a) = r_a$ og $f(b) = r_b$, hvor $y = f(x)$ er den snitkurve, som vi ønsker at bestemme.

For at opstille et udtryk for overfladearealet, ser vi på en lille (infinitesimal) strimmel med tykkelse dx ved x .

Omkredsen af denne strimmel er $2\pi f(x) = 2\pi y$. Bredden af strimlen er.

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Bidraget fra den infinitesimale strimmel til over-

fladen er derfor:

$$dO = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

eller

$$dO = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Hele overfladen findes da ved integration.

$$O(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Vi har altså i dette tilfælde:

$$F(y', y', x) = y \sqrt{1 + y'^2},$$

hvor F ikke afhænger eksplicit af x . Vi kan derfor anvende den sidste variant af Euler-Lagrange ligningen.

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C$$

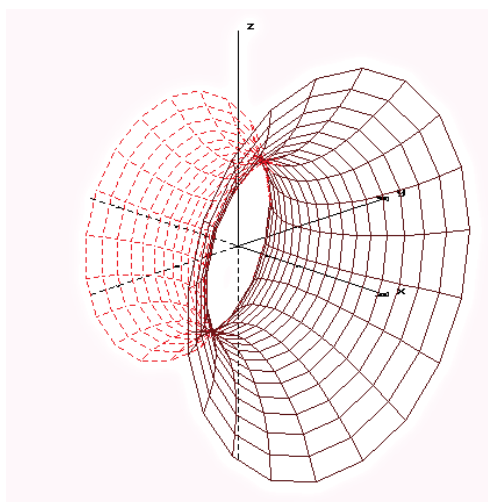
C er en konstant, der er bestemt ved randbetingelserne. Ved at indsætte udtrykket for F og udføre differentiationerne, får man:

$$y' \frac{2yy'}{2\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = C$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{1 + y'^2}$ og reducere finder man ligningen:

$$yy'^2 - y(1 + y'^2) = C \sqrt{1 + y'^2} \Leftrightarrow y = -C \sqrt{1 + y'^2}$$

For at slippe af med kvadratrodstegnet i den sidste ligning sætter vi



$$y' = \sinh\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)$$

Heraf følger, at

$$y = y_0 \cosh\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right) + k$$

Indsætter vi da i ligningen, finder man, at y er løsning til differentialligningen, hvis $k=0$ og $C=y_0$.

$$y = y_0 \cosh\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)$$

Hvis man tegner denne flade med et matematikprogram, vil det f.eks. se ud, som vist på figuren ovenfor.

2.2 Sæbebobler og vintønder

Hvis man vil bestemme formen af en sæbeboble (vi ved, at det er en kugleflade), så er det kun lidt vanskeligere end udregningen ovenfor. Funktionalen, som bestemmer den mindste overflade, er den samme, nemlig

$$O(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

men der skal tilføjes en *bibetingelse*, som fastlægger, at rumfanget er konstant.

Rumfanget af et omdrejningslegeme om x -aksen af funktionen $y=f(x)$ er givet ved udtrykket:

$$V(y) = \pi \int_a^b y^2 dx$$

I variationsregningen viser man, at skal man bestemme ekstremum for funktionalen:

$$\int_a^b F(y', y, x) dx$$

under bibetingelsen

$$\int_a^b G(y', y, x) dx = C$$

som oftest er analytisk ufremkommeligt, så kan det gøres ved at indføre en Lagrange multiplikator λ , og i stedet bestemme ekstremum for funktionalen

$$\int_a^b (F(y', y, x) + \lambda G(y', y, x)) dx$$

Konstanten λ bliver bestemt af problemets randbetingelser.

Opgaven er derfor at bestemme ekstremum for funktionalen:

$$O(y) = 2\pi \int_a^b (2\pi y \sqrt{1+y'^2} + \lambda \pi y^2) dx$$

Da integranden ikke afhænger eksplicit af x , kan vi anvende den simple ligning:

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C$$

som giver:

$$2y' \frac{2yy'}{2\sqrt{1+y'^2}} - 2y\sqrt{1+y'^2} - \lambda y^2 = C$$

Ved at gange igennem med $\sqrt{1+y'^2}$ og reducere finder man ligningen:

$$2y + \sqrt{1+y'^2} (C + \lambda y^2) = 0$$

Det er ikke fornuftigt direkte at forsøge at finde løsninger til denne differentialligning. I stedet undersøger vi, hvorvidt det er muligt at bestemme C og λ , således at ligningen har løsninger af halvcirkler på formen: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Det følger:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Ved at indsætte dette og reducere finder man ligningen:

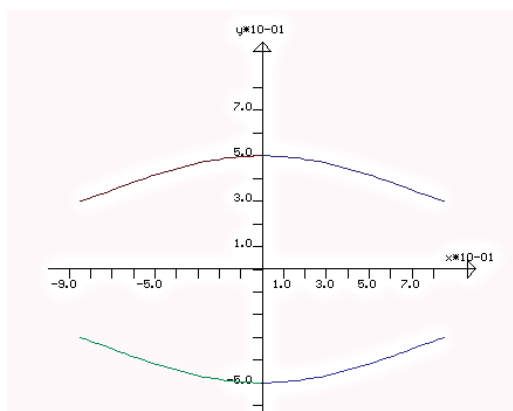
$$2\sqrt{r^2 - x^2} + \lambda(r^2 - x^2 + C) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(r^2 - x^2) + \lambda r(r^2 - x^2 + C) = 0$$

Det ses, at ligningen har løsninger for alle x , hvis og kun hvis $C=0$ og $\lambda = -2/r$. Kuglen er den eneste løsning, hvis $y(r) = y(-r) = 0$.

Hvis derimod $C \neq 0$, betyder det, at fladen ikke er afsluttet, men har to endeflader. Det kunne f.eks. være at $f(a) = r_a$ og $f(b) = r_b$. Hvis $r_a = r_b$, vil snitkurven have form som en vintønde.

Et eksempel på dette er vist nedenfor som en numerisk løsning af differentialligningen. Ifølge dette er vintøndeformen, således den tøndeform,



som har den mindste overflade for et givet rumfang. Noget som bødkere har vidst i mere end 1000 år.

3. Dugdråber på et plant underlag

Ovenfor har vi vist, at en regndråbe, der falder frit, vil være kugleformet. Sådan forholder det sig imidlertid ikke for en regndråbe, der enten hænger på en kvist eller ligger på et blad. I begge tilfælde yder tyngden af dråben (foruden overfladespændingen) et bidrag til den potentielle energi. Formen af en regndråbe er derfor et oplagt problem for variationsregningen, nemlig for et fastlagt rumfang at bestemme minimum for den samlede potentielle energi.

Hvis regndråben er på et vandret underlag, er det ikke muligt at opstille et udtryk, der kan anvendes i variationsregningen, men man kan godt gøre nogle antagelser. Da en fri dråbe er kugleformet, så er det naturligt at antage, at dråben, der ligger på et underlag kan tilnærmes ved en *omdrejningsellipsoide*. Rotationssymmetrisk om ellipsens lilleakse.

3.1 Omdrejningsellipsoide

For at bestemme minimum for den potentielle energi er det nødvendigt at kende rumfang og overflade for et omdrejningslegeme, der fremkommer, når en funktion $y = f(x)$ roteres 360° om y-aksen.

Formlerne er helt tilsvarende til de formler, der gælder for rotation om x-aksen. Rumfanget af en skive med tykkelse dy er:

$$\begin{aligned} dV &= \pi x^2 dy = \pi x^2 \frac{dy}{dx} \cdot dx \\ &= \pi x^2 f'(x) dx = \pi x^2 y' dx \end{aligned}$$

Overfladen af den tilsvarende skive er:

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi x \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy \\ &= 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dy \end{aligned}$$

En ellipse med halvakslerne a og b har ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Det er lettest at beregne rumfanget:

$$V = \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \pi a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

$$= \pi a^2 \left[y - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b^2} \right]_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

Denne formel er velkendt, og giver, som det ses, det korrekte rumfang for en kugle, når $a = b = r$. Formlen for overfladen af en ellipsoide, der er roteret om lilleaksen, har jeg ikke kunnet finde, og udregningen er da også en del mere kompliceret. Som ved rumfanget, udregnes integralet lettest ved at integrere over y .

$$S = 2\pi \int_{-b}^b x \sqrt{1+x'^2} dy$$

Ud fra formlen $x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ får man ved implicit differentiation efter y : $2xx' = -2y \frac{a^2}{b^2}$ og heraf:

$$x' = -\frac{y}{x} \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 1+x'^2 = \frac{x^2 b^4 + a^4 y^2}{x^2 b^4}$$

Indsættes her $x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ i tælleren, får man:

$$\begin{aligned} 1+x'^2 &= \frac{x^2 b^4 + a^4 y^2}{x^2 b^4} = \\ &= \frac{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) b^4 + a^4 y^2}{x^2 b^4} = \\ &= \frac{a^2 b^4 - a^2 b^2 y^2 + a^4 y^2}{x^2 b^4} = \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{x^2} \frac{b^4 - b^2 y^2 + a^2 y^2}{b^4} =$$

$$\frac{a^2}{x^2} \left(1 - \frac{a^2(1 - \frac{b^2}{a^2})y^2}{b^4}\right)$$

Indfører man eccentriciteten e : $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, slutter man efter nogle omformninger af integranden:

$$S = 2\pi \int_{-b}^b x \sqrt{1+x'^2} dy = 2\pi a \int_{-b}^b \sqrt{1 + \frac{a^2 e^2}{b^4} y^2} dy$$

Indfører man endelig k ved: $k = \frac{ae}{b^2}$ er integralet reduceret til:

$$S = 2\pi \int_{-b}^b x \sqrt{1+x'^2} dy = 2\pi a \int_{-b}^b \sqrt{1+(ky)^2} dy$$

Vi har reduceret problemet til at bestemme en stamfunktion til $\sqrt{1+x^2}$. Vi laver substitutionen

$$x = \sinh(t) \Rightarrow 1+x^2 = \cosh^2(t) \text{ og } dx = \cosh(t) dt$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+\sinh^2(t)} \cosh(t) dt =$$

$$\int \cosh^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (\cosh(2t) + 1) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh(2t) + t \right) =$$

$$\frac{1}{2} (\sinh(t) \cosh(t) + t) =$$

$$\frac{1}{2} (\sinh(t) \sqrt{1+\sinh^2(t)} + t) =$$

$$\frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x))$$

Anvender vi denne formel på:

$$S = 2\pi a \int_{-b}^b \sqrt{1+(ky)^2} dy$$

finder man efter substitutionen

$$x = ky = \frac{ae}{b^2} y \Rightarrow dy = \frac{b^2}{ae} dx$$

med de nye grænser $x = -\frac{ae}{b}$ og $x = \frac{ae}{b}$ og reduktion:

$$S = 2\pi ab \left(\frac{a}{b} + \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{ae}{b}\right)}{\frac{ae}{b}} \right)$$

For x lille er $\sinh^{-1}(x) \approx x - \frac{1}{6} x^3 \Rightarrow$

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 \text{ så}$$

$$\frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \rightarrow 1 \text{ for } x \rightarrow 0$$

Man noterer sig, at når $a = b = r$ og $e \rightarrow 0$, bliver $S = 4\pi r^2$, overfladen af en kugle.

Da ellipsoideformen i forvejen er en tilnærmelse, vil vi i det følgende nogen gange for simpelhedens skyld approksimere brøken

$$\frac{\sinh^{-1}\left(\frac{ae}{b}\right)}{\frac{ae}{b}}$$

med 1. Vi får da det relativt simple udtryk for overfladen:

$$S = 2\pi ab \left(\frac{a}{b} + 1 \right) = 2\pi(a^2 + ab)$$

Herefter kan vi opskrive et eksakt og et tilnærmet udtryk for den potentielle energi fra overfladespændingen:

$$E_{\text{pot}}(S) = \gamma S = 2\pi\gamma ab \left(\frac{a}{b} + \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{ae}{b}\right)}{\frac{ae}{b}} \right)$$

$$\approx 2\pi\gamma(a^2 + ab) \text{ for } \frac{ae}{b} \ll 1$$

Vi definerer r ved ligningen: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$. hvor r er radius i en kugle, som har samme rumfang som ellipsoiden. Vi laver omskrivningerne:

$$\frac{ae}{b} = \frac{a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}{b} = \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^3 - 1}$$

$$ab = \frac{r^3}{a} = r^2\sqrt{b} \text{ og } \frac{a}{b} = \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Herefter kan udtrykket for $E_{\text{pot}}(S)$ "reduceres" til:

$$E_{\text{pot}}(S) = 2\pi\gamma \left(\frac{r^3}{b} + \frac{r^2 b^2}{\sqrt{r^3 - b^3}} \sinh^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^3 - 1}\right) \right)$$

$$\approx 2\pi\gamma \left(\frac{r^3}{b} + r^2\sqrt{b} \right)$$

For et legeme, der befinder sig i tyngdefeltet, kan den potentielle energi udregnes, som om hele legemet var samlet i massemidtpunktet. For en ellipsoide befinder massemidtpunktet sig i ellipsens symmetricenter. Hvis ellipsoiden ligger på en plan flade ved $y = 0$, er massemidtpunktet hævet stykket b , og den potentielle energi kan udregnes ved: $E_{\text{pot}}(M) = mgb = mgz$. Da b er den eneste variabel, anvender vi i stedet variabelen z . Sætter vi $b = z$, skal vi herefter bestemme minimum for

$$E_{\text{pot}}(z) = E_{\text{pot}}(S) + E_{\text{pot}}(M).$$

Eksakt:

$$E_{\text{pot}}(z) = \rho Vgz + 2\pi\gamma \left(\frac{r^3}{z} + \frac{r^2 z^2}{\sqrt{r^3 - z^3}} \sinh^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{r}{z}\right)^3 - 1}\right) \right)$$

$$= \frac{4}{3}\rho\pi r^3 gz + 2\pi\gamma \left(\frac{r^3}{z} + r^2\sqrt{z} \frac{\sinh^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{r}{z}\right)^3 - 1}\right)}{\sqrt{\frac{r^3}{z} - 1}} \right)$$

Og tilnærmet:

$$E_{\text{pot}}(z) \approx \frac{4}{3}\rho\pi r^3 gz + 2\pi\gamma \left(\frac{r^3}{z} + r^2\sqrt{z} \right)$$

Definerer man de 3 konstanter ved:

$$k_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, k_2 = 2\pi\gamma r^3, k_3 = 2\pi\gamma r^{\frac{3}{2}}$$

kan de to udtryk for $E_{\text{pot}}(z)$ skrives.

$$E_{\text{pot}}(z) = k_1 z + \frac{k_2}{z} + k_3 \sqrt{z}$$

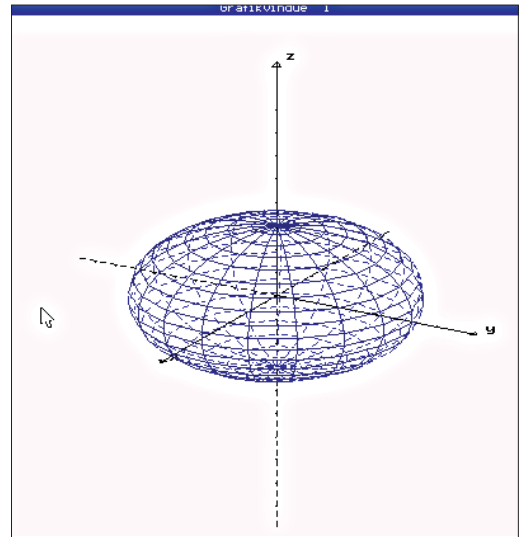
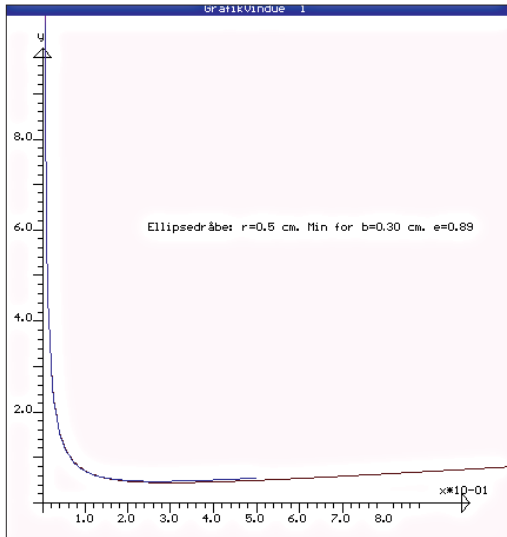
og

$$E_{\text{pot}}(z) = k_1 z + \frac{k_2}{z} + k_3 \sqrt{z} \frac{\sinh^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{r}{z}\right)^3 - 1}\right)}{\sqrt{\frac{r^3}{z} - 1}}$$

Det er ikke muligt at bestemme minimum for $E_{\text{pot}}(z)$ ad analytisk vej. Det viser sig dog, at man i de fleste tilfælde kan anvende det tilnærmede udtryk, som vil gælde, når

$$\sqrt{\left(\frac{r}{z}\right)^3 - 1}$$

er lille, dvs. når formen af dråben ikke afviger alt for voldsomt fra kugleformen.



Regner vi i cgs enheder, har vi værdierne: $\gamma = 76$ dyn/cm, $g = 982$ cm/s² og $\rho = 1,0$ g/cm³. For en regndråbe svarende til, at $r = 0,5$ cm, er forløbet af de to kurver for E_{pot} vist ovenfor.

Minimum findes ved differentiation af de to udtryk, og numerisk løse $f'(x) = 0$. For de to udtryk giver det $b = 0,2988$ og $b = 0,2677$ svarende til, at $a = 0,4395$ og $e = 0,79$. På figuren ovenfor til højre ovenfor er vist den tilsvarende ellipsoide.

På figuren nedenfor til venstre ses at for $r = 0,10$ cm, kan den tilnærmede formel ikke anvendes længere. Figuren til højre viser den

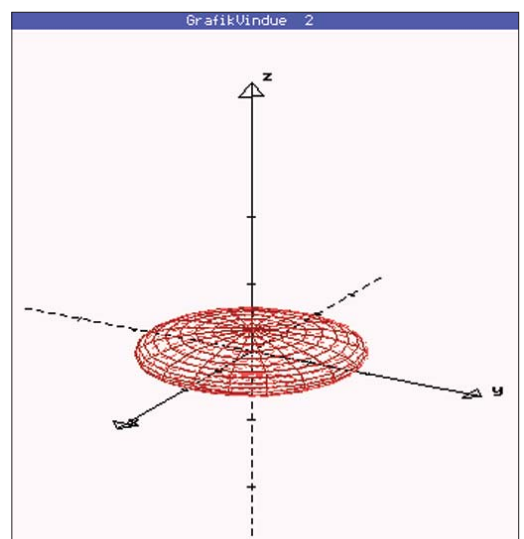
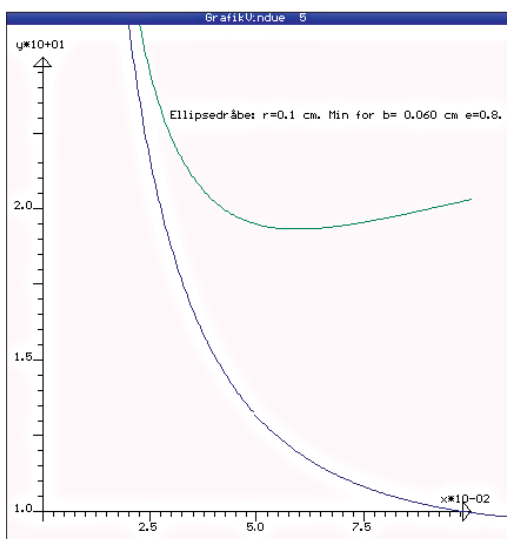
meget sammenpressede regnedråbe for $r = 1,0$ cm.

3.2 Lige før regndråben falder

Som omtalt ovenfor, kan man vanskeligt bringe variationsregningen i anvendelse for en regndråbe, eller en kviksølvdråbe, der ligger på et fast underlag.

Hvis dråben derimod hænger, kan man godt reproducere formen og bestemme minimum for den potentielle energi.

- Den potentielle energi fra overfladespændingen, der er mindst for kugleformen.



• Den potentielle energi fra tyngden: $E_{pot} = mgh$, som er mindst, hv is væsken er udbredt over et så stort areal som muligt så lavt som muligt. Hvis massen bliver for stor, vil overfladespændingen ikke kunne holde sammen på væsken længere i overensstemmelse med, at man aldrig ser vanddråber på mere en et par mm, ligesom det er erfaringen, at når kviksølvdråber samler sig, danner de ikke større og større kugler, men plasker ud.

Den potentielle ener gi en væskedråbe med overflade S har som følge af overfladespændingen er $E_{pot} = \gamma S$, hvor γ er en materialkonstant.

At bestemme formen af dråber, der "hænger" er et oplagt problem for variationsregningen, idet man skal bestemme minimum for summen af $E_{pot}(\text{Overflade}) + E_{pot}(\text{Tyngde})$.

Desværre finder man ikke nogen analytisk løsning, men en numerisk løsning viser, hvorledes dugdråber formodentlig ser ud, og man kan bestemme en omtrentlig maksimal størrelse for dråberne.

Først vil vi opstille nogle formler for overfladen S af et legeme, der roteres om y -aksen, og for den potentielle energi E af en rotationssymmetrisk skive med tykkelsen dy i højden y .

$$dS = 2\pi x \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi x \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$dE_{pot}(S) = \gamma dS = 2\pi \gamma x \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi x^2 \frac{dy}{dx} dx = \pi x^2 y' dx$$

$$dE_{pot}(V) = g y dV = \rho g \pi x^2 y y' dx$$

Herefter er opgaven at søge minimum for den potentielle energi.

$$2\pi \gamma \int_{-r}^r x \sqrt{1+y'^2} dx + \pi \rho g \int_{-r}^r x^2 y y' dx =$$

$$\pi \int_{-r}^r (2\gamma x \sqrt{1+y'^2} + \rho g x^2 y y') dx$$

under bibetingelsen $\pi \int_{-r}^r x^2 y' dx = V_0$.

Vi dropper den fælles faktor π , og vores $F(y', y, x)$ er herefter med Lagrange multiplikatoren λ .

$$F(y', y, x) = 2\gamma x \sqrt{1+y'^2} + \rho g x^2 y y' + \lambda x^2 y'$$

I dette tilfælde afhænger F eksplicit af x , så vi skal anvende den generelle form af Euler – Lagrange ligningerne, som er en 2. ordens differentialligning i y .

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Vi udregner først de to partielle afledede.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \rho g x^2 y' \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\gamma x y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \rho g x^2 y + \lambda x^2$$

Og dernæst

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2\gamma \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + x \left(\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y' 2y'y''}{2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) + \rho g (2xy + x^2 y') + 2\lambda x$$

Indsætter man i Eulers-Lagrange ligningerne, finde man efter reduktion

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} \left(y' + \frac{xy''}{1+y'^2} \right) + \rho g 2xy + 2\lambda x = 0$$

Endelig isolerer man y'' .

$$y'' = -(1+y'^2) \left(\sqrt{1+y'^2} \left(\frac{\rho g}{\gamma} y + \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{y'}{x} \right)$$

Ønsker vi en løsning med begyndelse i $(0,0)$, og som ligger i den positive halvplan, må vi fjerne minustegnet i ligningen. Ellers vil løsningen forløbe i den negative halvplan. Vi vil altså se på løsninger til differentialligningen:

$$y'' = (1+y'^2) \left(\sqrt{1+y'^2} \left(\frac{\rho g}{\gamma} y + \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{y'}{x} \right)$$

Umiddelbart er mulighederne for at finde en analytisk løsning til denne differentialligning uhyre ringe, og man er derfor henvist til numeriske løsningsmetoder.

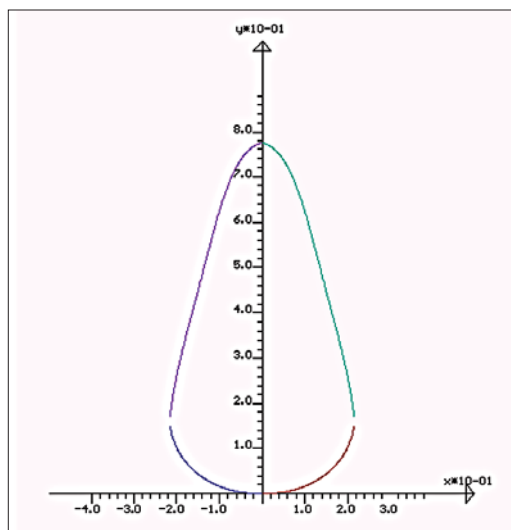
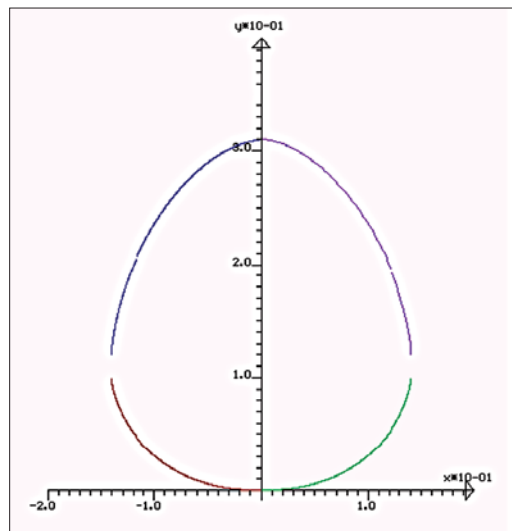
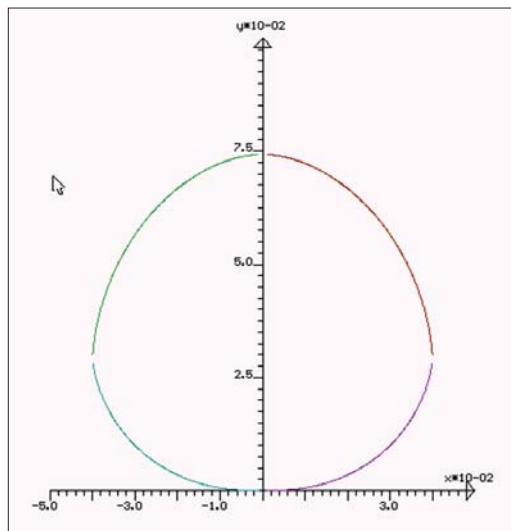
Det er svært at udtale sig om værdien af λ . Nedenfor er vist løsninger for $\lambda = 50$, $\lambda = 100$ og $\lambda = 500$. Den største dråbe, svarer til $\lambda = 50$.

Den numeriske løsning er imidlertid heller ikke problemfri, idet snitkurven vil have to lodrette tangenter, og udtrykket i øvrigt ikke er defineret for $x = 0$. Man er derfor henvist til at dele løsningen op i 4 forskellige stykker, og vælge grænserne med forsigtighed.

På næste side er vist et tværsnit af en dråbe, svarende til en bredde på 0,35 mm, 1,5 mm og 2,3 mm. Den største dråbe har en længde på 8 mm.

Forsøger man sig med større dråber, finder man ingen løsning for den øverste del af dråben

Ud fra differentialligningen, kan man godt forstå, hvorfor der er en øvre grænse for størrelsen af dråben. Betegner vi det punkt, hvor snitkurven går fra at være konveks til konkav med (a,b) , så skal $y'' < 0$ for $y > b$. Dette giver uligheden:



$$\sqrt{1+y'^2} \left(\frac{\rho g}{\gamma} b + \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{y'}{a} < 0 \Leftrightarrow$$

$$a \left(\frac{\rho g}{\gamma} b + \frac{\lambda}{\gamma} \right) < -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Funktionen

$$f(y') = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

har værdimængde $]-1, 1[$, så betingelsen kan skrives derhen, at:

$$a \left(\frac{\rho g}{\gamma} b + \frac{\lambda}{\gamma} \right) < 1 \Leftrightarrow \lambda < \frac{\gamma}{a} - \rho g b$$

Indsætter man

$$\gamma = 76 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}} \text{ og } \rho g = 982 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}$$

får man uligheden:

$$\lambda < \frac{76}{a} - 982b.$$

Skønner vi, at $b = \frac{1}{2}a$, så kan vi undersøge, hvornår størrelsen

$$\frac{76}{a} - 491a > 0.$$

Man finder da, at $a < 0,4$ cm. Vi skønner altså, at bredden af en dråbe højst kan være omkring 4 mm. Dette er fuldstændig i overensstemmelse med den eksperimentelle undersøgelse af løsningerne til differentialligningen. Skønner vi, at $b = \frac{1}{3}a$, finder vi en maximal dråbestørrelse på omkring 0,5 cm. \diamond



← En regndråbe. Foto: freeimage4u.com.