Geometriske konstruktioner: Ovaler og det gyldne snit

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Ovaler og det gyldne snit har fundet anvendelse i arkitektur og udsmykning siden oldtiden. Men hvordan konstruerer man en oval? Og hvordan konstruerer man det gyldne snit?. Anvisninger på, hvordan det klares med passer og lineal, vises i denne artikel.

I foråret 2008 skulle jeg som matematiklærer på en studietur til Rom, og opgaven var derfor at knytte noget matematik sammen med kunst eller arkitektur. Man får let tusindvis af hits, hvis man søger på ordene: Matematik, arkitektur og Rom (på dansk eller engelsk). Mindst lige så mange, som hvis man erstatter "matematik" med "mystik" – og endda en del gengangere!

Alle referencer inklusive et par fra LMFK-bladet er dog fortrinsvis beskrivende, med kun meget lidt af det, som jeg – på trods af to reformer af gymnasiet og folkeskolen – stadig opfatter som dækkende for begrebet matematik.

Mine valg af emner blev: Det gyldne snit og konstruktion af geometriske ovaler, da begge disse to emner, kan behandles ved konstruktionsgeometri.

Konstruktion med passer og lineal, har ellers været forsvundet fra matematikundervisningen i mere end 30 år. Lidt synd måske, idet det netop var denne slags opgaver, som vakte min interesse for matematik i mellemskolen. I gymnasiet fyldte konstruktionsopgaverne stadig en del af den skriftlige prøve. De skriftlige prøver var naturligvis uden andre hjælpemidler end logaritmetabellen. De 103 matematiske formler måtte man altså bare kunne.

Herons formel var for en del år tilbage genstand for mange artikler i LMFK-bladet, dog uden at det meget udspekulerede bevis, som afsluttede min lærebog i geometri for mellemskolen, nogensinde blev nævnt.

Det gyldne snit har i de senere år fået en for mig uforståelig høj placering i matematikundervisningen. Især da man aldrig finder Euklids konstruktion og kun sjældent en udledning af den eksakte værdi $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ =1,618. Som jeg plejer at sige til mine elever: Tallet er så nemt at huske, fordi trediveårskrigen som bekendt varede fra 1618-1648…..A-hva?

Dan Brown omtaler i sine bøger 1,618 som et "guddommeligt tal". Gudfaderbevares en bonderøv. Selvfølgelig kan en snusket, tilnærmet decimalbrøk ikke være guddommelig.

Ovaler har fundet anvendelse i arkitektur og udsmykning siden oldtiden. Der findes "ovaler", f.eks. Cassinis, Descartes og Lamés ovaler, som kan beskrives som geometriske steder. Det, som man i almindelighed omtaler som oval, og som man genfinder i talrige renæssance bygninger, er imidlertid ikke "et geometrisk sted" på samme måde, som det gælder for keglesnittene. Tværtimod er en oval sammensat af to par cirkelbuer med forskellige radier.

Geometriske ovaler

I litteraturen kan man finde adskillige sindrige metoder – med en em af gotisk mystik – til at konstruere bestemte ovaler. Fra et matematisk synspunkt, hviler konstruktionen af en oval imidlertid på et aldeles trivielt faktum.

Hvis man skal sammensætte to cirkelbuer med radier r_1 og r_2 til et differentiabelt kurvestykke, må centrene for de to cirkler nødvendigvis ligge på samme radiale linie til sammenstykningspunktet. De to cirkelbuer vil nemlig have en fælles tangent i dette punkt. Dette er til gengæld tilstrækkeligt grundlag for at tegne en vilkårlig oval.

Nedenfor er vist tre figurer, som fører frem til konstruktionen af en oval. I den første figur er to cirkelbuer med centre på samme radiale linie forbundet til en differentiabel kurve.

Når man skal tilføje det andet (symmetriske) sammenstykningspunkt, så skal radien r_2 af den lille cirkel være uforandret, og dets centrum skal ligge på en linie, som går gennem centrum C_1 for den store cirkel.

Dette vil imidlertid være opfyldt for en vilkårlig linie, som går gennem C_1. Tegnes en sådan linie og tegnes den anden lille cirkelbue ud fra S_2, har man konstrueret en halv oval.

For at tegne hele ovalen skal man blot konstruere den symmetriske 2. halvdel ved at gentage konstruktionen med to linier, der ligger symmetrisk med 1. aksen.

Ud fra den 3. figur kan man nu indse, at man kan konstruere en vilkårlig oval ved først at tegne en rombe og forlænge siderne i to modstående vinkelspidser. Rombens hjørner er centrum for de 4 cirkelbuer, mens diagonalerne i romben er ovalens symmetrilinier. Radierne kan vælges vilkårligt, blot skal radius for den store cirkelbue være større end siden i romben.

Ud fra figuren til højre kan man bestemme et udtryk for den halve storakse og lilleakse i en oval:

$$a = r_2 + (r_1 - r_2)\cdot\cos(v)$$

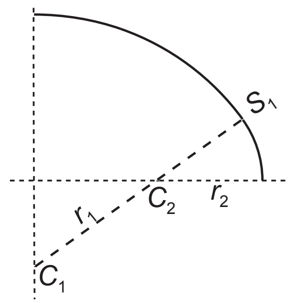
og

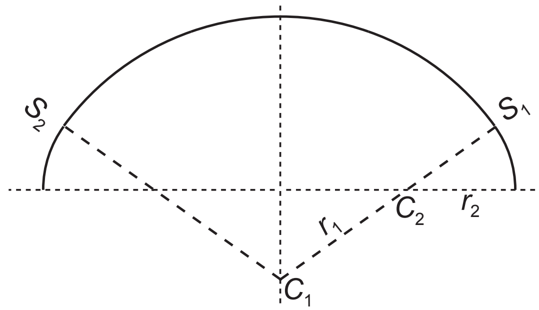
$$b = r_1 - (r_1 - r_2)\cdot\sin(v)$$

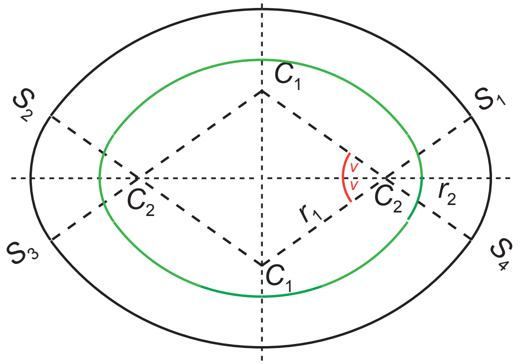
For øjet er det næsten umuligt, at skelne en oval fra en ellipse. Når ovaler er brugt i arkitektur og udsmykning, er det oftest fordi, man ud fra den samme rombe, kan tegne (uendelig mange) koncentriske ovaler, hvilket er vist med et eksempel ovenfor.

Det er derimod umuligt at tegne koncentriske ellipser, hvilket kan være en mulig årsag til at grundplanen for arenaer fra oldtiden ofte er en oval og ikke en ellipse.

Peterspladsen i Rom er et af de kendeste eksempler på en oval form. På pladsen har man bygget to koncentriske søjlerækker. Befinder man sig i et af de to centre for ovalen, ses kun en søjlerække.







Det gyldne snit

Det gyldne snit er betegnelsen for det at dele et liniestykke i to stykker *a* og *b*, som opfylder relationen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Dette kan omskrives til $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$. Sætter man forholdet $\frac{a}{b} = x$, vil det gyldne snit opfylde ligningen:

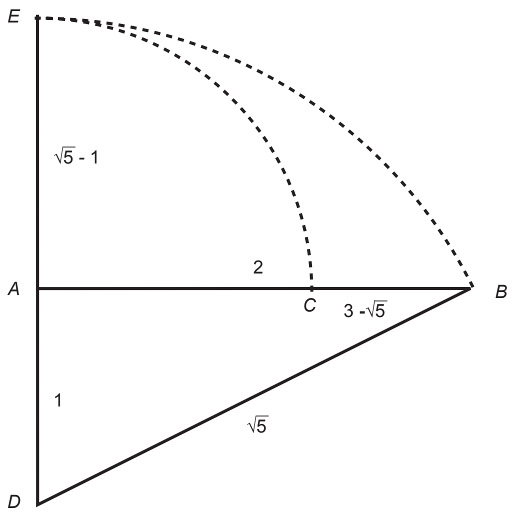
$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Forholdet mellem de to stykker, der deler liniestykket er derfor:

$$\frac{a}{b} = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Den geometriske deling af et liniestykke i det gyldne snit er ikke helt ligetil. Konstruktionen på næste side kan føres tilbage til Euklid.

Liniestykket betegnes *AB*. Uden indskrænkning, sætter vi $|AB| = 2$.



I punktet A oprettes en normal til AB, og man afsætter nedad stykket 1. Endepunktet for liniestykket betegnes D.

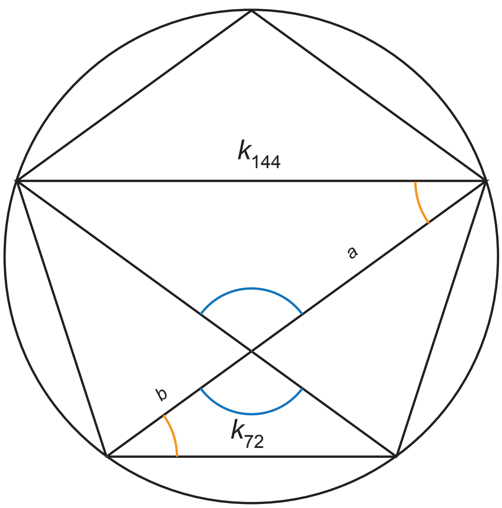
ΔABD er retvinklet med kateterne 1 og 2. Vi finder derfor $|BD| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Med centrum i D og radius $\sqrt{5}$ tegnes en cirkel. Punktet, hvor cirklen skærer normalen i A, betegnes E. Det ses, at $|AE| = \sqrt{5} - 1$.

Med centrum i A og radius $|AE|$ tegnes en cirkel. Skæringspunktet med AB betegnes C. Påstanden er, at C deler AB i det gyldne snit

$$|AC| = |AE| = \sqrt{5} - 1$$

følgelig er

$$|CB| = 2 - |AC| = 3 - \sqrt{5}.$$



Vi udregner da forholdet:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5-3+2\sqrt{5}}{3^2-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

som ses, at give det gyldne snit.

Det gyldne snit dukker op i utallige mere eller mindre tilnærmede og spekulative sammenhænge.

Geometrisk kan man vise, at to diagonaler i en femkant deler hinanden eksakt i et forhold, som er det gyldne snit.

Siden i en femkant er en korde, der spænder over en vinkel på 72° i den omskrevne cirkel. Ifølge kordeformlen:

$k = 2 \cdot R \cdot \sin(\frac{v}{2})$

er siden: $k_{72} = 2R \cdot \sin(36°)$. En diagonal i femkanten spænder over 144°, og følgelig er længden af diagonalen: $k_{144} = 2 \cdot R \cdot \sin(72°)$.

En diagonal i en femkant er – på grund af symmetrien – parallel med den modstående side. De to viste trekanter er hermed ensvinklede, så forholdet mellem k_{144} og k_{72} er det samme som forholdet mellem stykkerne a og b.

$$\frac{a}{b} = \frac{k_{144}}{k_{72}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2 \cdot R \cdot \sin(72°)}{2 \cdot R \cdot \sin(36°)}$$

$$= \frac{\cos(90° - 72°)}{\sin(36°)} = \frac{\cos(18°)}{2 \cdot \sin(18°)\cos(18°)}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sin(18°)}$$

Vi har ovenfor anvendt formlen:

$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v).$

Imidlertid er $\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ kendt fra udledningen af udtrykket for korden k_{10}, altså korden i en regulær 10-kant. Indsættes dette finder man

$$\frac{a}{b} = \frac{k_{144}}{k_{72}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sin(18°)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}\ 1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

altså det gyldne snit. ◊