Der er hul i spanden

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Som matematik– og især fysiklærer, bliver man i forbindelse med studieretningsprojekter ret hyppigt præsenteret for emner, som man ikke har det fjerneste begreb om, hvilket eleven selvsagt heller ikke har, men til gengæld har fundet emnet et eller andet sted på nettet, måske formidlet af de allestedsnærværende hittepåsomme *"videnskabsteori"*–hungrende reformpædagoger.

Hvis man søger efter et sådant emne, viser det sig ofte, at litteraturen enten er for overfladisk eller for avanceret teknisk, og (især efter reformen) *"ikke rigtig rammer gymnasieniveauet"*. Det gælder fx universitetslærebøger i matematik eller fysik.

Hvis eleven så har givet op efter en rundtur på nettet og biblioteker, og hvis det er et emne, som jeg har nogen indsigt i, så har jeg i flere tilfælde skrevet (eller genbrugt) et kompendium om emnet, som eleven har forholdt sig til. Jeg har som regel opnået gode karakterer for eleven, hvis de altså har fulgt mig.

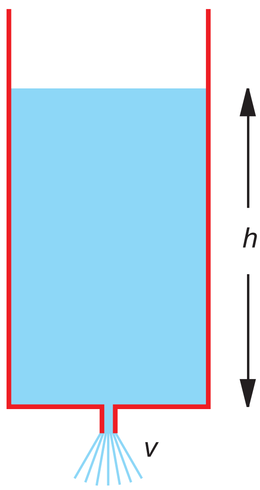
I år var der en elev, hvor jeg ganske vist ikke var vejleder, men som havde valgt et emne med tømning af et kar gennem en studs i bunden. Et klassisk problem, som jeg ikke kunne finde løsningen på i nogen af mine gamle lærebøger.

Da jeg tidligere i forbindelse med et AT–forløb har skrevet et kompendium om strømning i væsker og gasser og Bernoullis lov, så kunne jeg ikke lade være at regne på problemet. Udledningen, der er hentet fra den udmærkede Hugh. D. Young: *University Physics* 1992 (2007–udgaven er mere omfangsrig og langt ringere) følger nedenfor.

Tømning af en beholder via en hane i bunden

Vi betragter en beholder fyldt med viskositetsfri væske op til en højde h over udløbshanen (studsen) i bunden. Væsken har massefylden ρ, og p betegner trykket i højden y. Vi anvender Bernoullis lov:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$



Denne ligning udtrykker, at $p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y =$ konstant (langs en strømningslinie), men vi udelader leddet med trykket, da vi antager, at det ydre tryk er det samme på overfladen, som efter udløb af beholderen. Erstatter vi y med h til at betegne dybden, er ligningen

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Ved overfladen $h = 0$ er $v = 0$, og i dybden h er hastigheden v.

Herved giver Bernoullis lov det samme som gælder for et frit fald i tyngdefeltet:

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(-h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

hvor v er hastigheden, hvormed væsken løber ud af hanen. Hvis massen af væsken i beholderen er $m = m(t)$, og hvis røret til hanen har tværsnitsarealet D, gælder der kontinuitetsligningen for den mængde væske dm, der i tidsrummet dt strømmer ud gennem hanen.

$$\frac{dm}{dt} = -\rho D v \qquad \text{minustegn fordi } m \text{ aftager}$$

Hvis beholderens tværsnit er A, er samtidig $m = \rho A h$, så

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

Ved at sætte de to udtryk for $\frac{dm}{dt}$ lig med hinanden, finder man:

$$\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D v$$

og indsættes udtrykket $v = \sqrt{2gh}$, får man en differentialligning for h.

$$\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho D\sqrt{2gh} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\sqrt{h}$$

Ligningen kan løses ved separation af de variable.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\int_0^t dt \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\,t \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \sqrt{2g}\,\frac{D}{2A}\,t \quad \Leftrightarrow$$

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{D\sqrt{2g}}{2A}\,t\right)^2$$

Beholderen er tømt, når $h = 0$. Det sker ifølge ligningen ovenfor til tidspunktet

$$t = \frac{A}{D}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

For en beholder med $A = 50\times 50\ \text{cm}^2$ og $h_0 = 1{,}0$ m samt $D = 2{,}0\ \text{cm}^2$, giver det en tid for tømning på $t = 564$ s.
I den eksperimentelle del af SRP–opgaven betragtede eleven også den situation, at vand blev tømt fra et kar over i et andet kar med en anden dimension og studs, hvilket fører til to koblede differentialligningen af første orden.

Da det er den samme mængde vand, som løber ud af det første kar og over i det andet, må der for rumfangene gælde: $dV_1 = dV_2 \Leftrightarrow A_1 dh_1 = A_2 dh_2$. Differentialligningen for det første kar er uændret den samme, og for det andet kar, skal vi blot tilføje et positivt bidrag fra det første kar.

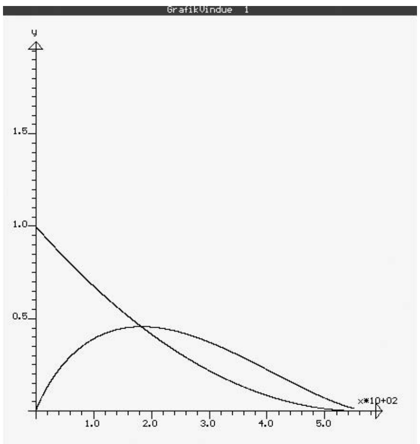
$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_1}\sqrt{h_1} \qquad \text{og}$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{A_1}{A_2}\frac{dh_1}{dt} - \sqrt{2g}\,\frac{D_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

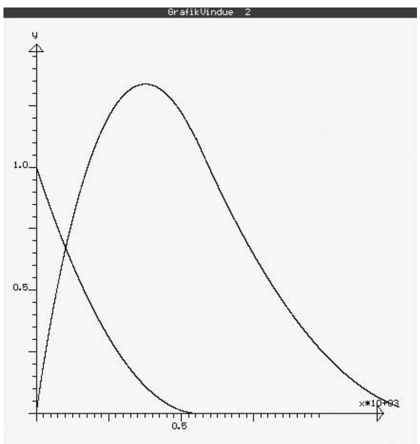
som giver:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_1}\sqrt{h_1} \qquad \text{og}$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \sqrt{2g}\,\frac{D_1}{A_2}\sqrt{h_1} - \sqrt{2g}\,\frac{D_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

Det er ikke umiddelbart at løse differentialligningerne analytisk, men nedenfor er vist to numeriske løsninger. I begge tilfælde har det andet kar et mindre tværsnit, men i første tilfælde er udløbet med en større diameter og i det andet tilfælde en mindre. Den parabolske form er dog tydelig i begge tilfælde.

I figurerne nedenfor viser den ene af kurverne tømningen af den første beholder. Dette er uafhængig af den anden kurve. Den numeriske løsning af differentialligningen, ses at være i overensstemmelse med beregningen ovenfor.





Fysik