# Christiansø i sigte – om fatamorgana og luftspejlinger

OLE WITT-HANSEN, lektor emeritus

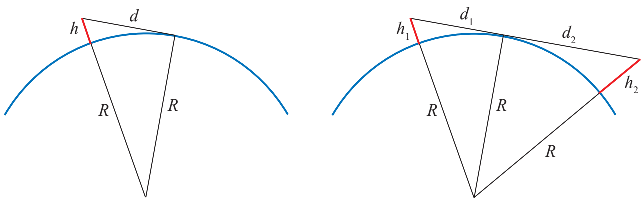
## Afstand til kiming

Vi har et sommerhus på Nordbornholm, nærmere betegnet i Sandkås, beliggende mellem Tejn og Allinge. Huset ligger lige ud til vandet ca. 50 m fra vandkanten og skønnet 5 m over havets overflade. Christiansø befinder sig 70° øst og 23,5 km fra Sandkås.

I almindelighed kan man ikke se Christiansø, når man sidder på terrassen. Men det kan man til gengæld godt, hvis man i klart vejr bevæger sig blot ca. 7 m lodret op i terrænet.

At der ikke er noget underligt i dette, kan man indse, hvis man betragter figurerne nedenfor. Her er afstanden til kimingen udregnet på en linie, der forbinder synsretningen mellem to *'tårne'*.

Først udledes en kendt formel for afstanden til kimingen for en iagttager, der befinder sig i højden $h$. Formlen optræder i flere referencer, men uden den simple udledning nedenfor, som jeg i mange år fra starten af 1g har anvendt som et eksempel på en anvendelse af Pythagoras sætning.




På figuren til venstre skal vi beregne afstanden $d$ til kimingen. Hvad der befinder sig under kimingen, kan jo ikke ses på grund af jordens krumning. Iagttageren har højden $h$ over jordoverfladen, og jordens radius er $R$ = 6.370 km.

Den retvinklede trekant har kateterne $R$ og $d$ samt hypotenusen $R + h$. Der gælder derfor, at

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 + h^2 + 2Rh = R^2 + d^2$$

idet $h/R \approx 10^{-5}$, kan vi se bort fra leddet $h^2$, og man finder da efter reduktion:

$$d = \sqrt{2Rh}$$

Det er almindeligt at måle højden $h$ i m og afstanden $d$ i km. Indsætter man derfor $h$/1000 og værdien for jordradius i km, får man den velkendte formel for afstanden til kimingen:

$$d = 3{,}57\sqrt{h}\ \text{km}$$

Hvis man vil undersøge, hvorvidt en iagttager i højden $h_1$ kan se en genstand i højden $h_2$, skal man som vist på den anden tegning blot udregne summen af afstandene $d_1$ og $d_2$.

Vender vi tilbage til udsigten til Christiansø set fra vores sommerhus, og sigter man mod et punkt, der ligger 10 m over vandet, kan man udregne den største afstand mellem to punkter, hvor genstanden kan ses.

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 3{,}57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})\ \text{km} \\ &= 3{,}57(\sqrt{5} + \sqrt{10})\ \text{km} = 19{,}3\ \text{km} \end{aligned}$$

Da Christiansø ligger 23,5 km væk, vil man ifølge dette ikke kunne se toppen af en 10 m høj bygning fra vores terrasse. Hvis man går op i en højde på 15 m, vil man derimod godt kunne se en 10 m høj genstand i en afstand på ca. 25 km. Afstanden 23,5 km finder man ved at befinde sig ca. 12 m over havet.

Om natten kan man imidlertid godt se fyret på Christiansø. Antager vi at fyret er 25 m højt, udregner man, at fyret kan ses fra en højde på 5 m i en afstand på

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 3{,}57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})\ \text{km} \\ &= 3{,}57(\sqrt{5} + \sqrt{25})\ \text{km} = 25{,}8\ \text{km} \end{aligned}$$

Alt dette er under normale omstændigheder fuldstændig i overensstemmelse med erfaringen.

Men det underlige er, at man engang imellem faktisk kan se Christiansø fra vores terrasse, hvor man ifølge det foregående ikke burde kunne se den. Og hvad mere forunderligt er, så kan man en sjælden gang se nogle konturer i retning af Christiansø, som jeg har studeret i en kikkert, men været ude af stand til at fortolke.

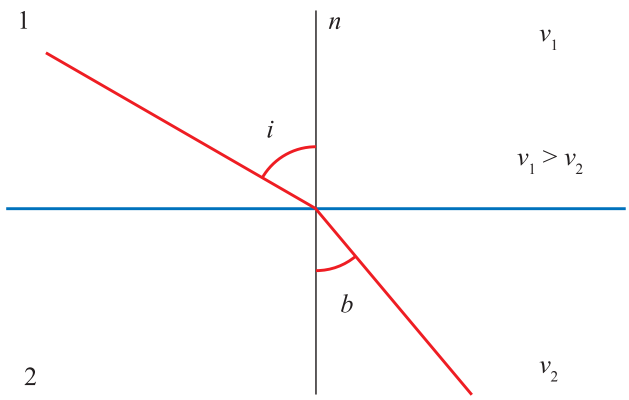
At man kan se Christiansø, hvor man ikke burde kunne, må have sin forklaring i, at lyset brydes som følge af en ændring af luftens brydningsindeks med højden, som godt kan forekomme på grund af ændringer i temperaturgradienten i den nedre atmosfære. Det andet fænomen havde jeg ingen forklaring på, andet end måske skyer og dis, indtil jeg fandt nedenstående foto i Wikipedia, under et afsnit om luftspejling.

*Luftspejling af Christiansø den 24. juli 2012.*

Fotografiet viser Christiansø, hvor øen er spejlet i et omvendt billede, og det må der jo være en naturlig/fysisk forklaring på.

### Brydningsloven på differentiel form

For at forklare ovenstående observationer er det nødvendigt at foretage en udvidelse af brydningsloven, så den ikke blot beskriver lysets brydning ved overgangen mellem to plane grænseflader, men også for lys der bevæger sig gennem stof eller en gas med kontinuert varierende brydningsindeks. Generaliseringen er sådan set triviel, hvis man overvejer det lidt, men også en direkte konsekvens af brydningsloven opstillet på differentiel form.




Ved overgang fra et stof, hvor lyset har hastigheden $v_1$ til et stof med hastigheden $v_2$ er sammenhængen mellem indfaldsvinkel $i$ og brydningsvinkel $b$, givet ved brydningsloven

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{v_1}{c}}{\frac{v_2}{c}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$$

$n_{12}$ kaldes det relative brydningsindeks. Brydningsindekset ved overgangen fra luft til stof kaldes det absolutte brydningsindeks, som altid er større end 1. Er strålegangen den modsatte vej, er brydningsforholdet indlysende $n_{21} = 1/n_{12}$.

Vi vil da generalisere formlen til det tilfælde, at brydningsindekset ændrer sig kontinuert i retning af indfaldsloddet ($y$–retning) og se på afbøjningen ved en infinitesimal ændring af $y$. For brydningsindekset skriver vi $n = n(y)$. Vinklen, som lyset nu danner med indfaldsloddet, betegnes $\theta$.

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta + d\theta)} = \frac{n(y)}{n(y+dy)} \quad \Leftrightarrow$$

$$n(y+dy)\sin\theta = n(y)\sin(\theta + d\theta)$$

Ved at subtrahere $n(y)\sin\theta$ på begge sider af ligningen og sætte uden for parentes får man så:

$$\sin\theta(n(y+dy) - n(y)) = n(y)(\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin\theta\, dn = n(y) d\sin\theta$$

eller

$$\frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{dn}{n(y)}$$

Denne ligning lader sig umiddelbart integrere:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{n(y)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\sin\theta_2 - \ln\sin\theta_1 = \ln n(y_2) - \ln n(y_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n(y_2)}{n(y_1)}$$

Vi genfinder altså brydningsloven uforandret. Brydningsvinklen afhænger kun af brydningsindekset i toppen af det øverste lag og brydningsindekset i det nederste lag. Hvilket betyder at afbøjningen gennem et lag på flere hundrede meter, kan betragtes som brydning i en enkelt grænseflade. Det har den vigtige konsekvens, at der kan forekomme totalrefleksion i luftlag, der er mange meter tykke.

Totalrefleksion kan forekomme i tilfælde af aftagende brydningsindeks (det relative brydningsforhold er mindre end 1), hvor lyset afbøjes bort fra indfaldsloddet, altså hvor brydningsvinklen er større end indfaldsvinklen. Totalrefleksion indtræffer, når brydningsvinklen bliver 90° ifølge brydningsloven:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = n_{12} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin b = \frac{\sin i}{n_{12}}$$

Indsættes $b = 90°$ finder man grænsevinklen $i_g$ for totalrefleksion

$$\sin i_g = n_{12}.$$

For overgangen vand/luft er brydningsforholdet ca. 1/1,33, som giver en grænsevinkel på ca. 49°. I gasser er brydningsforholdet langt mindre. Ved et brydningsforhold på 1/1,001 finder man en grænsevinkel på ca. 87°, svarende til en strejfningsvinkel på 3°.

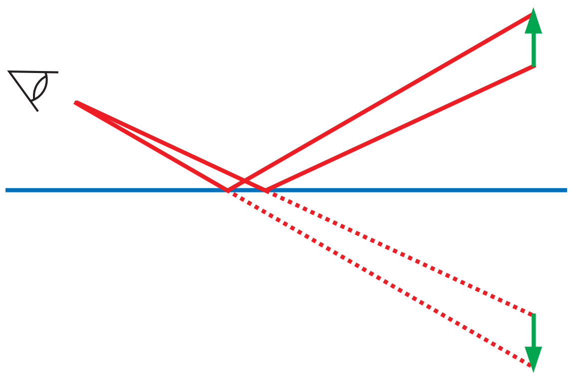
Det absolutte brydningsforhold i atmosfærisk luft er 1,000292, så umiddelbart skulle man tro, at grænsevinklen for totalrefleksion i luft højst kan være sin $i_g$ =1/1,000292, som giver $i_g$ = 88,6°, svarende til en strejfningsvinkel på 1,4°.

Totalrefleksion ved en strejfningsvinkel på 1° svarer til et relativt brydningsindeks på 0,9998 med reciprokværdien 1,0002.

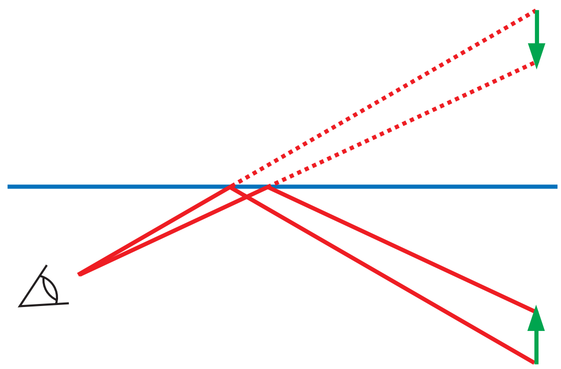
### Nedre og øvre luftspejling

Nedenfor er meget skematisk vist strålegangen ved nedre og øvre luftspejling. Det mest almindelige og velkendte er den nedre luftspejling, som fx kan iagttages på varme sommerdage, hvor det ser ud som om, der ligger vand i en vejsænkning.

Nedre luftspejling



Øvre luftspejling



Forklaringen er naturligvis den, at luften bliver stærkt opvarmet nær den sorte vejbane. Dette giver en mindre massefylde og dermed et mindre absolut brydningsindeks, hvorimod luften højere oppe er køligere og derfor har større brydningsindeks. Som understreget ovenfor er fænomenet totalrefleksion uafhængig af, hvorvidt det sker ved en grænseflade (som vist ovenfor) eller om det sker ved en gradvis ændring af brydningsindekset gennem et vilkårligt tykt lag luft.

Som vist i eksemplet ovenfor, skal forholdet mellem brydningsindeks i det øvre og nedre lag være af samme størrelsesorden, som brydningsindekset for luft 1,000292, samt at strejfningsvinklen skal være af størrelsesorden 1°. Det er ikke særlig interessant at overveje om dette nu er muligt, for erfaringen viser, at det sker. Den *"vandpyt"* man ser på vejen er i virkeligheden et (omvendt) spejlbillede af den blå himmel.

Den øvre luftspejling er helt tilsvarende, bortset fra, at luften ved jorden er køligere end luften længere oppe. Dette er langt sjældnere og forekommer mest i polaregne, hvor det er ret almindeligt.

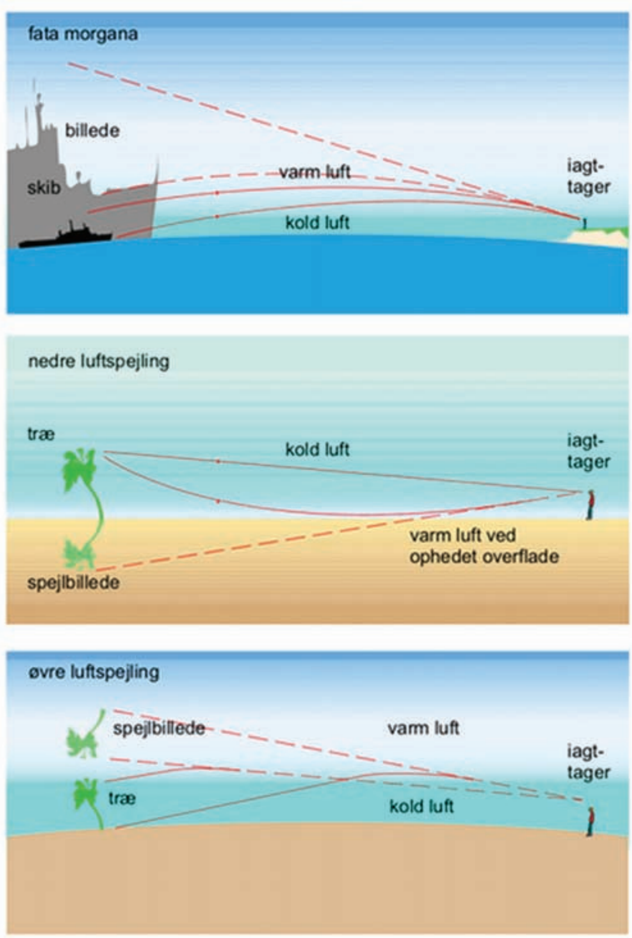
Både ved nedre og øvre luftspejling, ses – som vist på figuren – et omvendt billede af genstanden.

Ved fatamorgana sker der ikke en spejling, men lyset brydes i samme retning som jordens krumning, og man kan af denne grund se genstande, der ligger under kimingen. Der ses ofte et forstørret og forvrænget billede af genstanden, se figurerne nedenfor.

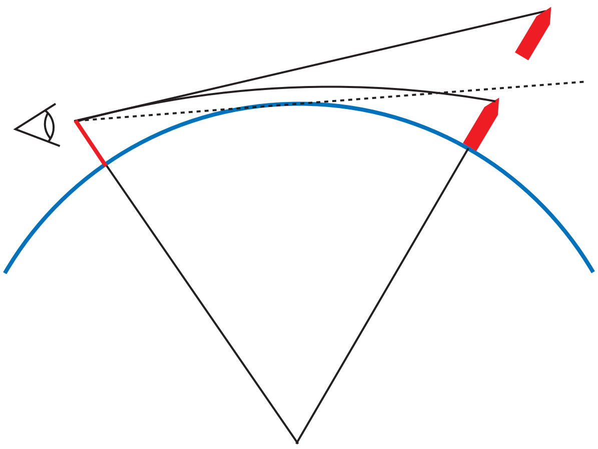
### Fatamorgana

Vi vil nu beskæftige os lidt nøjere med lysets brydning i retning af jordens krumning. Figuren på næste side søger at illustrere dette.

Figuren forestiller et tårn, som ligger under iagttagerens kiming. Det vil sige, at det ikke kan ses af iagttageren under normale omstændigheder. Den anden lysstråle afbøjes i atmosfæren, så tårnet ses *"svævende"* oppe i luften. Afbøjningen skyldes en *"anormal"* temperaturgradient, altså at temperaturen stiger med højden.

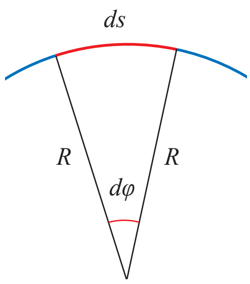


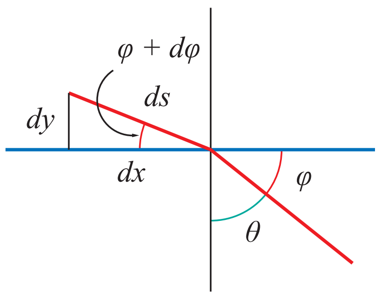

*På figurerne ovenfor, der er hentet fra Den Store Danske Encyklopædi, er øverst vist brydning af en lysstråle i retning af Jordens krumning, dernæst en øvre luftspejling, og sidst en nedre luftspejling.*



Den køligere luft har større massefylde og dermed større absolut brydningsindeks. En lysstråle, der bevæger sig (svagt) opad vil bevæge sig mod et mindre relativt brydningsindeks og dermed afbøjes bort fra indfaldsloddet.

Vi vil nu forsøge at opstille en relation mellem den differentielle afbøjning $d\varphi$ og ændringen i brydningsindekset pr. m langs med indfaldsloddet: $dn/dy$.




Den første figur viser et vinkeludsnit $d\varphi$ af jorden med radius $R$. Der gælder $ds = R{\cdot}d\varphi$.
Den anden figur viser en stråle på vej op gennem atmosfæren, som får en infinitesimal afbøjning $d\varphi$ på strækningen $ds$. $\varphi$ er strejfningsvinklen mellem "grænsefladerne". $\varphi = 90°–\theta$, hvor $\theta$ er indfaldsvinklen med indfaldsloddet.

Brydningsloven på differentiel form er:

$$\frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{dn}{n}$$

Vi kan erstatte $d\sin\theta$ med $\cos\theta{\cdot}d\theta$, og anvender vi at $\varphi = 90° - \theta$, får man $d\varphi = -d\theta$.

Vi dropper fortegnet og får

$$\frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{dn}{n} \Leftrightarrow \quad \cos\theta\, d\theta = \frac{\sin\theta}{n} dn$$

Idet $\cos\varphi = \cos(90° - \theta) = \sin\theta$ og $\sin\varphi = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$ omskrives det til

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi}{n\sin\varphi} dn$$

Endelig anvender vi omskrivningerne $dn = \frac{dn}{dy} dy$. Idet $dy = \sin\varphi\, ds$ er $dn = \frac{dn}{dy} \sin\varphi\, ds$, så

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi}{n\sin\varphi} \sin\varphi \frac{dn}{dy} ds \quad \Leftrightarrow \quad d\varphi = \frac{\cos\varphi}{n}\frac{dn}{dy} ds$$

Hvis en lysstråle skal følge Jordens krumning, kan vi bestemme gradienten af brydningsindekset ved at sammenligne dette med $ds = R{\cdot}d\varphi$ eller $d\varphi = 1/R\; ds$.

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi}{n}\frac{dn}{dy} ds \quad \text{og} \quad d\varphi = \frac{1}{R} ds \quad \text{giver:}$$

$$\frac{\cos\varphi}{n}\frac{dn}{dy} = \frac{1}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dn}{dy} = \frac{n}{R\cos\varphi}$$

Antager vi at $\varphi$ er ½°, og sætter vi $n = 1$, $R = 6{,}3 \cdot 10^6$ m, finder man, at

$$\frac{dn}{dy} = 1{,}6 \cdot 10^{-7} \quad \text{m}^{-1}$$

Ifølge referencerne vil gradienten dog meget sjældent have en så stor værdi.

Den nødvendige gradient af brydningsindekset vil for små vinkler vokse proportionalt med strejfningsvinklen $\varphi$. Antager vi fx en gradient, der er 1/10 af ovenstående, altså $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ m$^{-1}$, kan retningsændringen på afstanden til Christiansø fra sommerhuset, som er 23,5 km, beregnes af:

$$\Delta\varphi = \frac{\cos\varphi}{n}\frac{dn}{dy}\Delta s$$

Antagelserne ovenfor vil bevirke en ændring i synsretningen på 0,00038 radian. Ganger vi med 23,5 km, får vi den højdeforskel 8,8 m, som det ville svare til uden afbøjning.

Dette yder i hvert fald en forklaring på det fænomen, at Christiansø, som i klart vejr kan ses i en højde af $10^{-15}$ m over havets overflade, lejlighedsvis også kan ses ret tydeligt fra en højde på blot 5 m.

Fotografiet, som er vist i begyndelsen af artiklen, er en øvre luftspejling af Christiansø. Jeg mener kun, at jeg har observeret fænomenet i sommeren 2013. Jeg tolkede det som tågedis, indtil jeg begyndte at undersøge sagen. Man ser Christiansø og ovenpå et (omvendt) spejlbillede. Det er der intet underligt i. Nogen lysstråler bevæger sig i samme højde, hvor brydningsindekset ikke ændrer sig, hvilket giver det nederste billede. Andre har en lille vinkel opad, så lille at den er i stand til at fremkalde en øvre totalrefleksion. Kravet til dette er en positiv temperaturgradient, altså at temperaturen tæt ved jordoverfladen vokser opad. Noget man vel godt kan forestille sig på en varm sommerdag med et køligt hav.