Newtons gravitationsproblem

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Vi ved, at man kan beregne gravitationskraften fra et kugleformigt legeme, som om hele legemets masse var placeret i dets centrum. Men hvorfor?

I 1964, da jeg gik til forelæsninger i Fysik 1 hos Jens Martin Knudsen, fortalte han, at Newton ventede i flere år med at publicere sin *Principia*, selv om alle resultaterne lå klar, fordi han havde besvær med at vise, at man kan beregne gravitationskraften fra et kugleformigt legeme, som om hele legemets masse var placeret i dens centrum. Dette skyldes naturligvis ikke manglende evner hos Newton, men at han kun få år i forvejen havde udviklet sin differential- og integralregning, som er nødvendig for at vise sætningen.

Jeg mener ikke, at jeg nogensinde har set et bevis for denne sætning, men jeg har i over 30 år fortalt historien videre til mine elever, når man f.eks. skal beregne gravitationskraften på et legeme nær Jordens overflade.

For nylig i forbindelse med et studieretningsprojekt, kom jeg til at tænke på "Newtons problem", og hvorvidt det kan udredes med elementære analytiske metoder. Det kan det faktisk med kun lidt besvær.

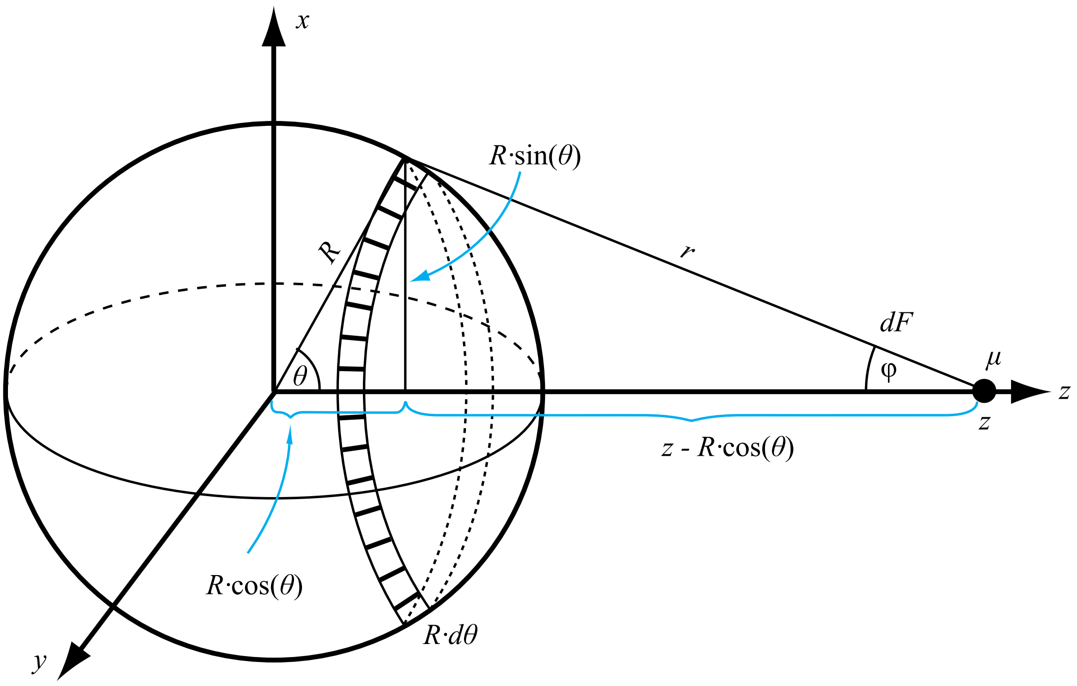
Koordinatsystemet er valgt som vist på figuren nedenfor. Massen μ, som antages punktformig, er anbragt på z aksen i afstanden z fra kuglens centrum. Kuglen har massen M.

Lad massefylden for kuglen være ρ. Vi deler kuglen op i skaller med tykkelse dr. Massedelene, der ligger i den viste strimmel, har alle samme afstand r til μ, så kraften fra denne strimmel kan relativt let opskrives. Man bemærker dog, at bidragene til kraften vinkelret på z-aksen, går ud mod hinanden, så kraften langs med z-aksen, skal beregnes ved at gange med $\cos(\varphi)$.

Massedelen, der befinder sig i strimlen, kan beregnes som:

$$dm=\rho\cdot dV=\rho\cdot dA\cdot dR=\rho\cdot 2\pi\cdot R\cdot sin(\theta)\cdot R\cdot dR\cdot d\theta$$

Vi finder da ifølge Newtons gravitationslov:



$$F_z = -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\cdot\int_0^\pi (z-R\cdot\cos(\theta))\cdot d(R^2+z^2-2z\cdot R\cdot\cos(\theta))^{-½}$$
$$= -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\Big[(z-R\cdot\cos(\theta))(R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta))^{-½}\Big]_0^\pi$$
$$-\int_0^\pi (R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta))^{-½}\cdot d(z-R\cdot\cos(\theta))$$
$$= -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\cdot\Big[(z-R\cdot\cos(\theta))(R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta))^{-½}\Big]_0^\pi - \Big[\frac{1}{z}(R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta))^{-½}\Big]_0^\pi$$
$$= -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\cdot\left(\frac{z+R}{z+R} - \frac{z-R}{z-R} - \frac{1}{z}\cdot(z+R-(z-R))\right)$$
$$= -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\cdot(1-1-\frac{1}{z}\cdot 2\cdot R)$$
$$= -2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{1}{z\cdot R}\cdot\frac{2\cdot R}{z}$$
$$= G\cdot\frac{4\pi\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\mu}{z^2}$$
$$= G\cdot\frac{dM\cdot\mu}{z^2}$$

$$dF_z = dF\cdot\cos(\varphi) = G\cdot\frac{dm\cdot\mu}{r^2}\cdot\cos(\varphi)$$

Ifølge geometrien er

$$r^2 = (z-R\cdot\cos(\theta))^2+(R\cdot\sin(\theta))^2$$
$$= R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)$$

og

$$\cos(\varphi) = \frac{z-R\cdot\cos(\theta)}{r}$$
$$= \frac{z-R\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}}$$

Samler vi nu det hele får vi:

$$dF_z = G\cdot\frac{dm\cdot\mu}{r^2}\cdot\cos(\varphi)$$
$$= 2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{\sin(\theta)\cdot d\theta}{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}\cdot\frac{z-R\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}}$$

Dette udtryk skal så integreres fra 0 til π.

$$F_z = 2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot$$
$$\int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}\cdot\frac{z-R\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}}\cdot d\theta$$

Selvom dette integral unægtelig ser lidt bistert ud, kan det udregnes ved en delvis integration, som jeg skriver på den form, som jeg lærte i gymnasiet.

$$\int f\cdot dg = f\cdot g - \int g\cdot df$$

Beregningen er foretaget i boksen ovenover. Vi finder således, at bidraget til kraften fra kugleskallen med masse dm og tykkelse dR bliver

$$F_z = G\cdot\frac{dM\cdot\mu}{z^2}$$

hvor z er afstanden fra massen μ til centrum af kuglen. Kaldes denne afstand r, finder man det sædvanlige udtryk:

$$F = G\cdot\frac{dM\cdot\mu}{r^2}$$

Integreres over alle kugleskaller fra 0 til R, radius af kuglen, får man let:

$$\int dM = \int_0^R 4\cdot\pi\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR$$
$$= \rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \rho\cdot V_{\text{kugle}} = M$$

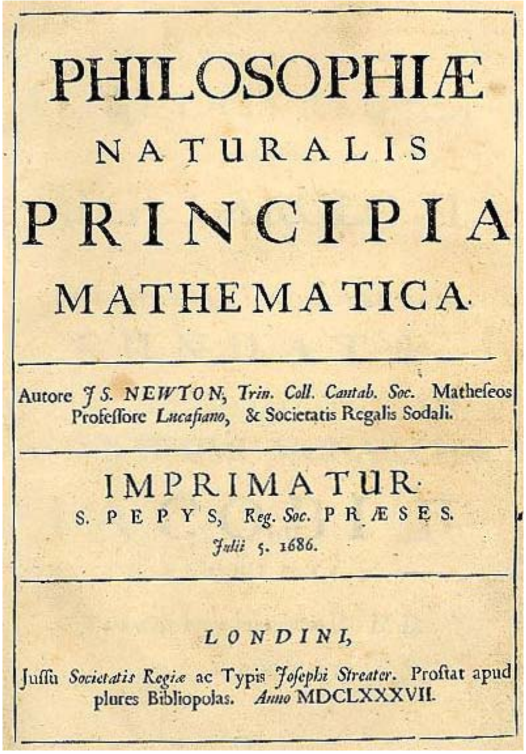
Omdøber vi μ til m, får man det sædvanlige udtryk:

$$F = G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$$

hvor r er afstanden fra m til centrum af kuglen med masse M.

Den potentielle energi

For at imødekomme dem, som er bekendt med, at resultatet kan opnås lettere ved først at bereg-


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Førsteudgaven af Newtons Principia. Kørt før Newtons død i 1727 udkom 3. reviderede og forøgede udgave, hvor de fleste sider indeholdt væsentlige ændringer i forhold til førsteudgaven.

ne den potentielle energi af et legeme med masse μ i gravitationsfeltet fra en kugleskal med radius R, vil jeg vise udregningen af denne. Det kræver naturligvis, at man har opstillet et udtryk for den potentielle energi i tyngdefeltet, hvilket Newton mig bekendt ikke havde.

Udtrykket for den potentielle energi af to masser M og m er:

$$E_{\text{pot}}=-G\cdot\frac{M\cdot m}{r}$$

Kraften, der virker mellem de to legemer, kan beregnes som

$$F=\frac{\partial}{\partial r}E_{\text{pot}}=G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$$

Ved at anvende den samme figur og betegnelser som før finder man bidraget til den potentielle energi fra en strimmel af kugleskallen.

$$dE_{\text{pot}}=-G\cdot\frac{dm\cdot\mu}{r}$$

med

$$\begin{aligned}dm&=\rho\cdot dV=\rho\cdot dA\cdot dR\\&=\rho\cdot 2\pi\cdot R\cdot\sin(\theta)\cdot R\cdot dR\cdot d\theta\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}r^2&=(z-R\cdot\cos(\theta))^2+(R\cdot\sin(\theta))^2\\&=R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)\end{aligned}$$

som indsat giver:

$$\begin{aligned}dE_{\text{pot}}&=-G\cdot\frac{dm\cdot\mu}{r}\\&=-2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\frac{\sin(\theta)\cdot d\theta}{\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}}\end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned}E_{\text{pot}}&=-2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR\cdot\int_0^\pi\frac{\sin(\theta)\cdot d\theta}{\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}}\\&=-\frac{2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR}{z\cdot R}\left[\sqrt{R^2+z^2-2\cdot z\cdot R\cdot\cos(\theta)}\right]_0^\pi\\&=-\frac{2\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR}{z\cdot R}(z+R-(z-R))\\&=-\frac{4\pi\cdot G\cdot\mu\cdot\rho\cdot R^2\cdot dR}{z}\end{aligned}$$

Kalder vi massen af kugleskallen med radius R og tykkelse dR for dM, finder man så:

$$dM=\rho\cdot dV=\rho\cdot 4\pi\cdot R^2\cdot dR$$

og

$$E_{\text{pot}}(dM)=-G\cdot\frac{dM\cdot\mu}{z}$$

eller, hvis man omdøber afstanden til kugleskallens centrum fra z til r

$$E_{\text{pot}}=-G\cdot\frac{dM\cdot\mu}{r}$$

Integrerer man over alle kugleskallerne får man endelig.

$$E_{\text{pot}}=-G\cdot\frac{M\cdot\mu}{r}$$ ◊