Hvorfor virker induktionskogeplader

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Induktion kan give anledning til hvirvelstrømme i alle metaller, men hvorfor kan kogegrej til induktionskomfurer kun anvendes, hvis det kan magnetiseres?

En humanistisk kollega, der lige havde anskaffet et induktionskomfur, spurgte mig for et par år siden, hvorfor man kun kunne anvende gryder og pander af et magnetisk materiale. Han selv forklarede det med, som der også stod i vejledningen, at det var fordi induktionspladen "opvarmede magnetisk". Med en måske lidt uklædelig overbærenhed, forklarede jeg, at det stort set var ligegyldigt, hvilket materiale gryderne var lavet af – blot det var et metal, idet opvarmningen af gryderne ikke skyldes, at de var magnetiske, men derimod hvirvelstrømme, forårsaget af en induceret *emk*, som var givet ved Maxwells 2. ligning – normalt refereret til som Faradays lov.

$$\vec{\nabla}\, x\, \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{eller}$$

$$E_{\text{ind}} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(magnetisk\ fluks)$$

En hurtig overslagsberegning viste, at den afsatte effekt var omvendt proportional med den specifikke modstand, så der ville være forskel på materialerne, kobber eller sølv kogegrej ville være det bedste, men alle metaller ville naturligvis blive varmet op – magnetisk eller ej.

Denne afgørelse var vejledt af, at jeg har lavet induktionsforsøg med aluminiumsringe i 15 år, indtil induktion gled ud af gymnasiets fysikpensum (og blev erstattet af kosmologi). Disse meget instruktive forsøg har i øvrigt været umulige, efter at 220 V spolerne med jernkerne, blev fjernet fra samlingerne af sikkerhedsgrunde!

Dansklæreren kom tilbage efter at have forsøgt med en kobberkedel og erklærede, at det virkede overhovedet ikke – og i øvrigt stod der i vejledningen …..

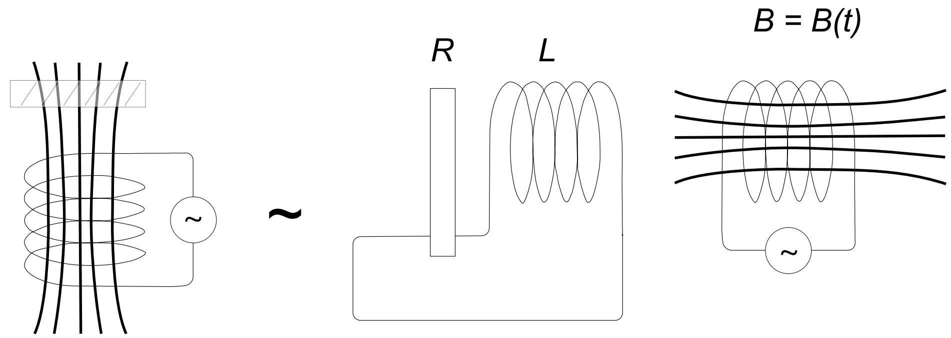
Nu vurderede jeg ikke dansklærerens evne til at foretage målinger selv på en overordentlig simpel eksperimentel opstilling som særlig overbevisende – i hvert fald, når det skulle stilles over for Faradays lov – så det endte med, at jeg "desværre ikke kunne hjælpe ham yderligere med hans spørgsmål".

For nogle måneder siden, så jeg en fuldautomatisk induktionsplade nedsat fra kr. 649,- til kr. 199,- og så kunne jeg ikke rigtig lade være. Og ganske rigtig står der i vejledningen, at kogegrejet skal være magnetisk? Så gik det op for mig, at den magnetiske flux gennem metallet, naturligvis er fra B-feltet i metallet, som er proportional med H, det ydre B-felt gange den relative permeabilitet μ_r.

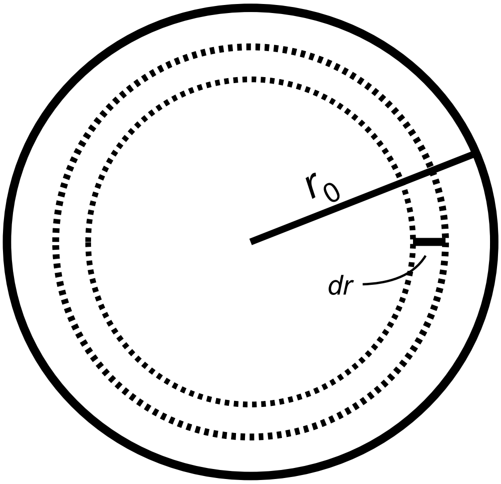
$$B = \mu_r \cdot H$$

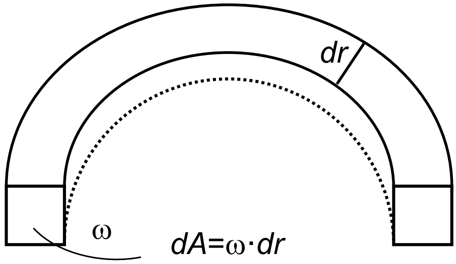
Dernæst gik jeg i gang med en beregning af den effekt P, der afsættes i en cirkulær plade, hvor man i første omgang ser bort fra selvinduktion.

Da feltlinierne fra det elektriske felt, der giver anledning til hvirvelstrømme, er cirkulære, deler vi skiven op i ringe med bredde dr. Skiven har tykkelsen w og radius r_0.



kun på kogegrej af jern?





Modstanden i en ring med radius r bliver ifølge formlen $R = \rho \cdot l/A$, hvor ρ er den specifikke modstand af lederen, l er længden og A er tværsnitsarealet.

$$dR = \rho \frac{2\pi \cdot r}{w \cdot dr}$$

Fluxen gennem ringen er $\Phi_B = \pi \cdot r^2 \cdot B = \pi \cdot r^2 \cdot \mu_r \cdot H$. Her er μ_r den relative permeabilitet af skiven, og H er det ydre magnetiske felt frembragt af spolen. I hver ring induceres der en *emk*, som er

$$E_{ind} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

hvor Φ_B er fluxen gennem ringen. Den afsatte effekt i en ring er givet ved

$$dP = \frac{E_{\text{ind}}^2}{dR} \quad \text{hvor} \quad \frac{1}{dR} = \frac{w}{2\pi \cdot \rho} \frac{dr}{r}$$

Effekten kan da bestemmes ved integration.

Det ydre magnetfelt antages at være givet ved $H(t) = B_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$. Herved får man et udtryk for den inducerede *emk* i en ring med radius r.

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi \cdot r^2 \cdot \mu_r \cdot B_0 \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\omega t}$$

Effektivværdien fås ved at tage modulus og gange med $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kvadrerer man herefter, får man:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\pi^2 \cdot r^4 \cdot \mu_r^2 \cdot B_0^2 \cdot \omega^2$$

som indsat i udtrykket

$$dP = \frac{E_{ind}^2}{dR}$$

med

$$\frac{1}{dR} = \frac{w}{2\pi\rho} \frac{dr}{r}$$

giver:

$$dP = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{w \cdot \mu_r^2 \cdot B_0^2 \cdot \omega^2}{\rho} \cdot r^3 \cdot d$$

Integreres dette fra $r = 0$ til $r = r_0$ finder man

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{w \cdot \mu_r^2 \cdot B_0^2 \cdot \omega^2}{\rho} \cdot r_0^4$$

Bemærk, at det faktisk er korrekt at integrere over $1/dR$ i stedet for over dR, idet skiven kan betragtes som en parallelforbindelse af modstandene dR i hver ring.

I beskrivelsen af induktionskomfurer står der, at de drives af et højfrekvent B-felt, men jeg har ikke kunnet finde en værdi for frekvensen. For at vurdere om udtrykket for P har nogen relation til virkeligheden, sætter vi – ret vilkårligt – $w = 5$ mm, $B_0 = 0{,}10$ Wb/m^2, $\omega = 2\pi \cdot 1$ kHz og $r_0 = 10$ cm. Den relative permeabilitet for jern er $\mu_r = 66$, og den specifikke modstand er $\rho = 8{,}9\ 10^{-2}$ Ωm.

Indsat giver dette en effekt på 1897 W, hvilket må siges, at være et yderst tilfredsstillende resultat.

Det afgørende er naturligvis størrelsen og frekvensen af B-feltet. Som sagt kender jeg ikke frekvensen, men hvis den kun er 0,1 kHz, bliver den afsatte effekt 100 gange mindre.

Det væsentlige er imidlertid at effekten vokser med kvadratet på B-feltet i metallet og dermed også med kvadratet på den relative permeabilitet.

Den relative permeabilitet for aluminium er 2, så forholdet mellem den afsatte effekt i to i øvrigt ens kogegrej af Fe og Al er $(2/66)^2 \approx 1/1000$. Da kobber er diamagnetisk μ_r = -1, er det fuldstændig ubrugeligt som kogegrej på en induktionsplade – som dansklæreren rigtigt havde konstateret.

Selvinduktion

Vi valgte at se bort fra selvinduktionen i pladen i første omgang. For fuldstændighedens skyld, vil vi nu inddrage den i beregningerne. Regningerne forløber noget anderledes, men det fører til nøjagtig samme resultat.

Opstillingen – vist skematisk på figuren side 32 til højre – er en modstand i serie med en induktans, hvor der udføres en tvungen svingning fra et ydre felt efter ligningen.

$$R \cdot i - L \cdot \frac{di}{dt} = E_{ydre}(t) = \frac{\partial \Phi_B}{dt}$$

hvor vi sætter

$$\Phi_B = \Phi_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \text{ og } \Phi_0 = B_0 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$R \cdot i - L \cdot \frac{di}{dt} - \frac{\partial \Phi_B}{dt} = 0$$

Vi "gætter" $i = e^{i \cdot \omega \cdot t + \varphi}$, som giver løsningen:

$$i_0 = \left| \frac{i \cdot \omega \cdot \Phi_0}{R - i \cdot \omega \cdot L} \right| = \frac{\omega \cdot \Phi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

Effektivværdien er $i_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2} i_0$

For at anvende dette på opstillingen, skal vi erstatte R med dR og L med induktansen af en enkelt cirkulær vinding. Desværre findes der ikke så vidt jeg ved et eksakt udtryk for induktansen af en cirkulær vinding, men hvis man anvender udtrykket for B-feltet i centrum af en cirkulær leder med radius r, så er det nok ikke helt ved siden af, jf. Helmholtzspoler.

$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot r}$, og fluxen gennem den cirkulære leder med radius r bliver derfor

$$\Phi_B = B \cdot A = \mu_0 \cdot \frac{i}{2r} \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot \mu \cdot r \cdot i$$

Sammenlignes med

$$E_{ind} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

ses det, at

$$L = \frac{1}{2} \pi \cdot \mu \cdot r$$

Erstattes R med dR sammen med $L_{\text{cirkuær, vinding}}$ i udtrykket for i_{eff} får man:

$$i_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega \cdot B_0 \cdot \pi \cdot r^2}{\sqrt{\left(\rho \cdot \frac{2\pi \cdot r}{w \cdot dr}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \omega \cdot \pi \cdot \mu \cdot r\right)^2}}$$

som efter reduktion kan omskrives til:

$$i_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega \cdot B_0 \cdot w \cdot r \cdot dr}{2\rho \sqrt{1 + \frac{1}{16} \left(\frac{\omega \cdot w \cdot \mu}{\rho}\right)^2 dr^2}}$$

I nævneren ses det andet led at være forsvindende i forhold til 1, så man finder efter at dette led er kastet bort.

$$i_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\omega \cdot B_0 \cdot w}{2\rho} \cdot r \cdot dr$$

For effekten

$$dP = i_{\text{eff}}^2 \cdot dR = \rho \cdot \frac{2\pi \cdot r}{w \cdot dr} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot B_0{}^2 \cdot w^2}{4\rho^2} \cdot r^2 \cdot dr^2$$

som giver

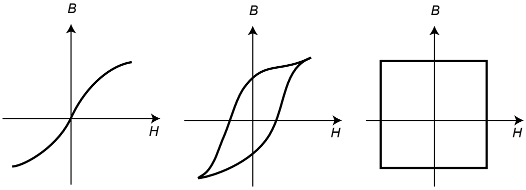
$$dP = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega^2 \cdot B_0{}^2 \cdot w}{\rho} \cdot r^3 \cdot dr$$

Hvis pladen er af et stof med relativ permeabilitet μ_r, så skal B_0 blot multipliceres med denne. Vi får da sluttelig et udtryk, som er identisk med det tidligere fundne.

$$dP = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \mu_r{}^2 \cdot B_0{}^2 \cdot w}{\rho} \cdot r^3 \cdot dr$$

Man ser, at der ikke er noget bidrag fra selvinduktionen. Til gengæld kan man være næsten sikker på, at der vil komme et bidrag til opvarmningen fra rotationen af atomerne på grund af deres magnetiske moment. Der gælder som bekendt formlerne for den potentielle energi af og kraftmomentet på et magnetisk moment μ:

$$E_{pot} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \ ; \ \vec{H} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$



Som demonstreret ovenfor, så er det rimeligt simpelt at udregne bidraget til effekten fra hvirvelstrømmene. Det er derimod langt vanskeligere at udregne bidraget hidrørende fra rotationen af atomernes magnetiske moment.

For det første er det nødvendigt at kende såvel hysteresekurven for jernet som atomernes magnetiske dipolmoment, og selv om begge dele er kendte, kan beregningen både være problematisk og urealistisk.

Ovenfor er skitseret 3 hysteresekurver, hvoraf kun de to første har noget med virkeligheden at gøre.

Fordelene ved den første og sidste er imidlertid, at det er let at beregne tabet i potentiel energi $E_{pot} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$, når kurven gennemløbes og slutter i det samme punkt. Ved den første kurve vil tabet i potentiel energi være nul. Ved den sidste kurve vil der ikke være noget bidrag til ΔE_{pot} på de vandrette stykker, da B er konstant. De lodrette stykker vil derimod give bidrag på $-2\mu \cdot B$ og $2\mu B$, så $\Delta E_{\text{pot}} = -4\mu \cdot B$.

I Feynmann *Lecture II*, hvor der findes en meget omfattende og dybdeborende beskrivelse af ferromagnetisme, kan man læse, at ferromagnetismen næsten udelukkende fra én elektrons magnetiske moment, som er en Bohr magneton.

$$\mu = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} = 9{,}31 \cdot 10^{-24}\,\text{Am}^2$$

Hvis man beregner antallet af jernatomer N i bunden af det tidligere omtalte kogegrej efter formlen:

$$N = n_M \cdot N_A = \frac{m}{M_{Fe}} \cdot N_A$$

$$= \frac{\rho \cdot V_{Fe}}{M_{Fe}} \cdot N_A = 1{,}33 \cdot 10^{25}$$

finder man endelig

$$\Delta E_{\text{pot}} = -4\mu \cdot N \cdot B = -49{,}7 \ \text{J}$$

Multipliceres dette med frekvensen 1 kHz, får man i denne (urealistiske) beregning en effekt på 49,7 kW.

Hvis man skønsmæssigt ganger med en faktor f.eks. 0,1 for at få en værdi for den afsatte effekt, svarende til en realistisk hysteresekurve, svarer dette til ca. 5 kW

Med de anvendte værdier for *B*-felt og frekvens, finder man således, at den afsatte effekt fra de magnetiske momenter er ca. 2½ gange større end bidraget fra hvirvelstrømmene.

Effektbidraget fra hvirvelstrømmene vokser med kvadratet på B-feltet og frekvensen, mens effektbidraget fra de magnetiske momenter kun vokser lineært med disse størrelser.

Da jeg hverken kender B-feltet eller frekvensen, er det umuligt at vurdere, hvilke af de to bidrag til opvarmningen, der dominerer. Konklusionen er dog, at induktionskomfurer kun kan anvendes til gryder af magnetisk materiale, som dansklæreren hævdede, og som det også står i vejledningerne. ◊

Kogegrej til induktionskogezoner

Materiale	egnet
stål, emaljeret stål	ja
støbejern	ja
rustfrit stål	hvis producenten angiver, at det er egnet
aluminium, kobber, messing	---
glas, stentøj, porcelæn	---

Fra en brugsanvisning til et induktionskomfur.