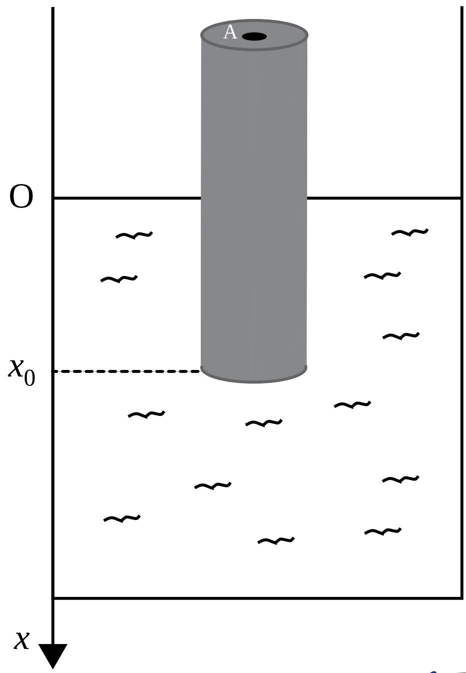
Hvor dybt stikker blyanten?

Af Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium.

I LMFK-bladet fra september er der et referat fra ICTMA-12 i London. Her fik deltagerne stillet små opgaver. En var, hvor dybt en blyant vil stikke, når den tabes i et lodret bægerglas fra en passende højde. Selv om løsningen af denne opgave næppe kan løfte fysikundervisningens nye paradigme om dybe samfundsmæssige og sociale konsekvenser, så er det et stykke enkel fysik, harmløs intellektuel adspredelse, der tidligere kunne anvendes som eksempel på harmonisk svingning i 2g.

Betegnes massen af blyanten med m, blyantens tværsnitsareal med A, væskens massefylde med ρ, og indlægger vi en nedadrettet lodret x-akse med nulpunkt ved vandoverfladen, så finder man ifølge Newtons 2. lov, når blyanten både befinder sig over og under vandet.



$$F_{res} = mg - F_{op} = mg - \rho \cdot g \cdot A \cdot x$$

Ligevægtsstillingen x_0 er givet ved

$$F_{res} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot g \cdot A} ,$$

som fører til følgende omskrivning:

$$F_{res} = m \cdot g - \rho \cdot g \cdot A \cdot x = -\rho \cdot g \cdot A(x - \frac{m \cdot g}{\rho \cdot g \cdot A})$$

$$F_{res} = -\rho \cdot g \cdot A \cdot (x - x_0) = -k \cdot (x - x_0)$$

Idet

$$F_{res} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

bliver differentialligningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\rho \cdot g \cdot A}{m}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot (x - x_0)$$

som genkendes som differentialligningen for en harmonisk oscillator.

Det ses, at blyanten ved en forskydning fra ligevægtsstillingen vil udføre en harmonisk svingning

$$x - x_0 = x_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

med vinkelfrekvens og periode

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho \cdot g \cdot A}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot g \cdot A}}$$

Dette hjælper os ikke umiddelbart til at løse problemet med, hvor langt blyanten vil dykke, når man lader den falde fra højden h, men det bringer os på sporet, idet vi kender udtrykket for energien af en harmonisk oscillator: $E = ½ \cdot k \cdot x^2$. Det er egentlig bare at opskrive energibevarelse, fra blyanten slippes til den bremses af opdriften.

$$\tfrac{1}{2} kx^2 - mg(h + x) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} kx^2 - mgx - mgh = 0$$

med

$$k = \rho \cdot g \cdot A$$

Antager vi, at blyanten har massen $m = 4$ g, længden L=16 cm, diameter d =7 mm, og at den tabes fra højden h = 5 cm, finder man A= 0,385 cm^2, k = 0,378 N/m, og 2. gradsligningen bliver:

$$0{,}189 \cdot x^2 - 0{,}0393 \cdot x - 0{,}00196 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0{,}049 \pm 0{,}055}{0{,}378} = \begin{cases} 0{,}29 \text{ m} \\ -0{,}016 \text{ m} \end{cases}$$

Teorien fører altså til, at blyanten vil dykke betydelig dybere ned i vandet end L = 16 cm ved et fald fra højden 5 cm.

Når Blyanten er helt under vand, kan forudsætningerne ovenfor imidlertid ikke anvendes.

Ved højden h = 0, finder man let:

$$x = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k} = 0{,}203 \text{ m}$$

Blyanten vil i alle tilfælde komme helt under vand, ligegyldig fra hvilken højde man taber den.

For at bestemme den masse m, som blyanten med længden L, og tværsnitsareal A, skal have for ikke at komme helt under vand ved et fald fra højden h = 0, kan man anvende ligningen:

$$\tfrac{1}{2} kL^2 > m \cdot g \cdot L \Rightarrow m < \frac{k \cdot L}{2 \cdot g} = 1{,}9 \text{ g}$$

Hvis man insisterer på at finde den rigtige dybde ved et fald fra højden h, må man dele bevægelsen op, hvor blyanten er delvis over vandet og helt under vandet. Når blyanten er helt under vand er opdriften:

$$F_{op} = \rho \cdot g \cdot A \cdot L = 0{,}0605 \text{ N}$$

Opdriften udfører et arbejde

$$A_{op} = F_{op}(x - L)$$

Dette fører til energiligningen:

$$F_{op}(x - L) - mg(x - L) + \tfrac{1}{2} k \cdot L^2 - mg(L + h) = 0$$

Løses denne ligning mht. x, når m = 4 g, L=16 cm og h = 5 cm, finder man x = 32 cm, hvilket er 3 cm længere end i den første (forkerte) beregning.

Der er set bort fra viskositeten i vandet og blyantens udformning, og læseren udfordres på dette punkt. Man kan godt løse differentialligningen for en dæmpet svingning, hvor viskositeten følger Stokes lov, men energiligningen ovenfor vil ikke kunne løses. Endelig findes der (så vidt jeg ved) ikke et teoretisk udtryk for gnidningsmodstanden ved laminar strømning af en cylinder i en væske. Der er også forudsat at opdriften er større end tyngden af blyanten, ellers gælder udtrykket for harmonisk svingning eller $E_{pot} = ½ \cdot k \cdot x^2$ jo heller ikke. ◊